

现代数学基础丛书 142

Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用

苗长兴 吴家宏 章志飞 著



科学出版社

(O-4635.0101)

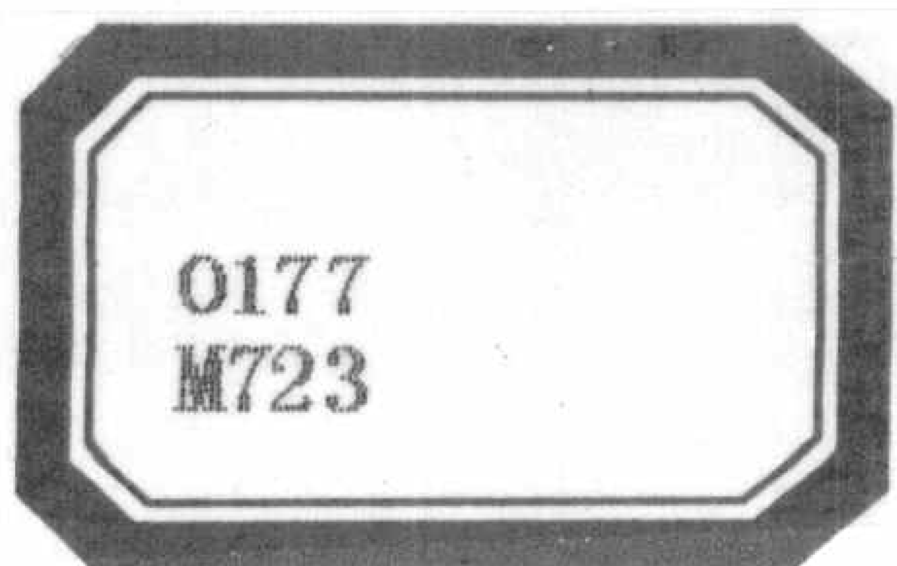
www.sciencep.com

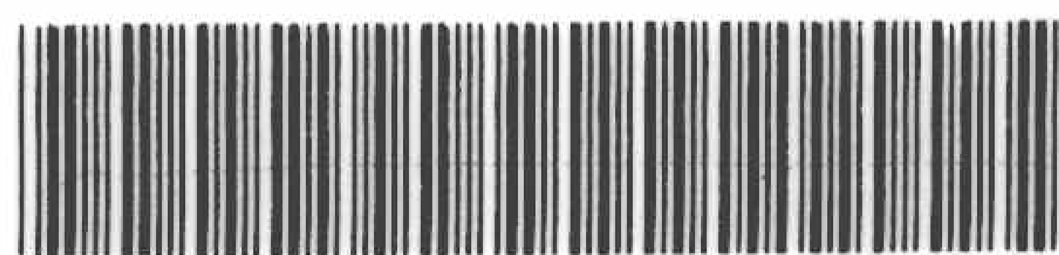


科学出版中心 数理分社
电话：(010) 64033664
Email：math-phy@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等数学

定 价：98.00 元





国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 142

Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用

苗长兴 吴家宏 章志飞 著



科学出版社
北京

内 容 简 介

本书内容涉及Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用两大部分. 其一包含了频率空间的局部化、Besov空间的Littlewood-Paley刻画、Bony的仿积分解及仿线性化技术、新型的Bernstein不等式等. 其二在Littlewood-Paley理论的框架下，建立输运扩散方程解的时空正则性估计、频谱层次的正则性估计及零阶Besov空间的log-型估计，给出了既包含对流，也包含扩散现象的流体动力学问题的统一处理方法. 在这个新的框架下，重点讨论了不可压的Euler方程与Navier-Stokes方程、Boussinesq方程、临界Quasi-Geostrophic方程及可压的Navier-Stokes方程等. 本书的特点是将现代调和分析理论，诸如：频率空间的分析、Fourier局部化技术、Bony的仿积分解及仿线性化技术等和传统的连续模方法、De Giorgi-Nash-Moser迭代技术相结合，充分利用与开发流体动力学方程内在的几何与代数结构、正交结构、消失条件来研究相应的非线性相互作用，达到在自然临界空间研究流体动力学方程的目的.

本书可供理工科大学数学系、应用数学系的高年级本科生、研究生、教师以及相关的科学工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用/苗长兴，吴家宏，章志飞著. —北京：科学出版社，2012

(现代数学基础丛书；142)

ISBN 978-7-03-033412-1

I. ①L… II. ①苗… ②吴… ③章… III. ①泛函分析 ②泛函分析-应用-流体动力学-动力学方程 IV. ①O177 ②O313

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第014380号

责任编辑：赵彦超／责任校对：钟 洋
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012年3月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012年3月第一次印刷 印张：29
字数：567 000

定价：98.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003年8月

序　言

Littlewood-Paley 理论最重要的作用之一就是频率空间的局部化. 众所周知, Fourier 变换将物理空间中的微分运算转化成频率空间中的代数运算, Littlewood-Paley 分解将缓增分布形式地写成在频率空间意义下几乎正交的光滑函数的和, 从而实现在不同频段上求导与微分运算的代数化. Littlewood-Paley 理论在偏微分方程研究中的辉煌成就当属 Bony 的仿积分解理论, 它是 Bony 在研究双曲型方程解的奇性传播时引入的, 经过 Meyer 等数学家发展后广泛地应用到偏微分方程的研究. 随着其他重要的分析工具, 诸如: 振荡积分理论、Fourier 限制性估计与 Strichartz 估计、Profiles 分解与集中紧原理等方法的发展与使用, 进一步突显了 Littlewood-Paley 理论的框架性、普适性、灵活性等特征, 从而使这一理论逐步成为研究非线性发展方程的基本工具.

本书的主旨就是 Littlewood-Paley 理论及其在各种流体动力学方程中的应用. Littlewood-Paley 理论的基本思想就是频率空间分析与局部化理论, 其优势包括几个主要方面: 其一是微分算子或一般的 Fourier 乘子算子作用到 Fourier 变换具有环形支集 (或球形支集) 的分布上等价数乘运算 (或被数乘估计控制). 其二是将函数或缓增分布分解成一系列在频率空间上几乎正交的光滑函数的和式, 展示了内在的几何与代数结构, 以便给出非线性相互作用的精确分析. 特别地, Bony 的仿积分解与仿线性化技术为非线性估计提供了强有力的武器. 其三是 Littlewood-Paley 理论不仅给出了一般可微函数空间 (研究偏微分方程的载体) 的完美刻画, 同时也提供了研究偏微分方程的基本工具. 已有的关于输运方程与扩散方程的研究框架基本上处于相互独立的状况, 因此, 它们各自的经典研究方式并不适用于对方. 许多物理模型特别是流体动力学问题中均涉及对流和扩散两种现象, 发展一种同时适应对流和扩散两种现象的研究框架是很有意义的. 它丰富了输运扩散方程的研究, 给出了一个统一的框架与研究方法. 与此同时, Fourier 局部化方法不仅适用于不可压模型, 也可以应用到可压的流体动力学问题.

第 1 章从频率空间上的局部化出发, 通过经典 Bernstein 不等式与频率空间上的单位分解定理, 给出齐次与非齐次型的 Littlewood-Paley 分解理论. 在 Littlewood-Paley 理论的框架下, 讨论 Besov 空间理论, 特别是 Besov 空间的各种不同刻画之间的等价关系等. 作为 Littlewood-Paley 理论的重要组成部分, 着重介绍 Bony 的仿积分解及仿线性化技术. 作为应用, 着重讨论了新型的 Bernstein 不等式, 它是建立分数阶耗散算子在局部化空间 (如: Besov 空间、分数阶 Sobolev 空间等) 正性估

计的基础, 在研究分数阶发展型方程中起着重要的作用.

第 2 章主要通过 Fourier 局部化方法建立输运扩散方程的解在 Besov 空间框架下的一致性估计. 需要指出的是, 输运项中的向量场可以不满足不可压条件, 因此它不仅适合于不可压的流体动力学方程, 同时可以应用到可压的流体动力学问题. 鉴于 Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间的局部化特征, 我们讨论了各种形式的局部化估计与交换子估计. 另一方面, 充分利用输运扩散方程的 Lagrange 形式, 将对流项的估计转化为平坦空间中的 Laplace 算子与非平坦空间中的 Laplace 算子所派生的交换子估计, 因此可以通过二次微局部化的过程来处理含交换子型扰动项的热传导方程.

第 3 章首先在 Besov 空间的框架下, 给出 d 维空间不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题的局部适定性与 Blow-up 准则. 作为 Beale-Kato-Majda 准则特例, 就直接推出二维不可压 Euler 方程 Cauchy 问题光滑解的整体适定性. 其次, 通过建立 Vishik 的 "衰减型正交性" 及 log- 型估计, 证明二维不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题在临界空间中的整体适定性. 3.3 节详细讨论具有轴对称无旋的三维不可压 Euler 方程, 利用其特殊的几何结构、涡度场不同分解的 "衰减正交性" 等证明了具有轴对称无旋的三维不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题在临界与次临界空间中的整体适定性. 最后, 还详细研究二维不可压 Navier-Stokes 方程在 Besov 空间 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$ 中的无黏性极限问题, 其中 $p \geqslant 2$ 的情形源于 Hmidi-Keraani [HK3], $p < 2$ 的情形是本书中首次给出.

第 4 章集中讨论具部分黏性的二维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性. 4.1 节主要基于用能量估计与 log-型不等式, 建立具部分黏性的二维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题光滑解的整体适定性. 4.2 节利用 Fourier 局部化方法及相应的输运扩散方程在 Besov 型空间中的正则性估计、频谱层次上的正则性估计等, 在临界空间中建立具部分黏性的二维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性. 4.3 节利用 Boussinesq 方程组自身的耦合结构与对称化的理念, 在适当的条件下, 证明了具有轴对称初值的三维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性.

第 5 章着力于临界 Quasi-Geostrophic 方程. 5.1 节给出了在临界空间的局部适定性与 Blow-up 机制, 同时还介绍了这一方程的研究历史. 5.2 节主要介绍 Kiselev-Nazarov-Volberg 的连续模方法, 它主要基于如下重要观察: 奇异积分算子虽然不能保持连续模, 但它对连续模的破坏也不大. 5.3 节主要讨论 Caffarelli-Vasseur 方法, 这是一个普适性的方法, 基本思想是采用调和扩张及 De Giorgi-Nash-Moser 迭代技术建立 Leray-Hopf 弱解的正则性.

第 6 章主要介绍作者采用 Littlewood-Paley 理论研究可压缩 Navier-Stokes 方程的一个结果, 这是一个新的尝试. 首先给出了一个线性化的双曲抛物耦合系统的基本解, 通过 Fourier 局部化方法, 分析此系统在不同的频率空间中表现的不同效

应, 从而引入了适合高低频演化的 Hybrid-Besov 空间这一新的框架. 为了克服高频时对流项作为扰动项带来的关于密度的导数损失，引入了频谱层次上的 Lagrange 坐标, 从而得到了具有高振荡初值 (即某种意义上的大初值) 的整体适定性.

最后, 在附录中给出了经典的不可压 Navier-Stokes 方程的研究进展, 以方便读者参考使用. 内容涉及 Leray-Hopf 弱解、光滑解的局部适定性、Kato 的双模方法、时空正则性与单模方法、L^p- 方法及无条件唯一性等, 主要取材于文献 [Chem3], [Ca1], [Lem1] 及 [MiZ].

本书的初稿始于在北京大学国际数学中心、香港中文大学数学研究所、北京应用物理与计算数学研究所等讲座与课程的讲稿, 后经认真修改、增删而成. 在本书形成过程中, 得到了田刚院士、辛周平教授的大力支持, 作者深表感谢. 本书的部分内容与张恭庆院士、洪家兴院士、陆善镇教授进行了交流, 得到了鼓励与支持, 在此表示由衷的感谢. 作者感谢周毓麟院士、郭柏灵院士等长期的指导与帮助, 以及对本书提出的许许多多的建设性意见.

最后, 作者还要感谢年轻同事与学生：陈琼蕾副研究员、徐桂香副研究员、原保全教授、苑佳博士、吴刚博士、张军勇博士及博士生薛留堂、郑孝信、程星、郑继强、夏素霞、张谦、徐夫义、杨建伟、王大卫、路静等, 他们为本书的校对做了许多有益的工作.

本书得到国家科学技术学术著作出版基金、国家杰出青年基金、国家自然科学基金、北京应用物理与计算数学研究所“学习、创造、提高”活动的资助.

作　者

2011 年 10 月于北京

目　录

第 1 章　Littlewood-Paley 理论

Littlewood-Paley 理论最重要的作用之一就是将频率空间局部化. 众所周知, Fourier 变换将物理空间中的微分运算转化成频率空间中的代数运算, Littlewood-Paley 分解将缓增分布形式地写成在频率空间意义下几乎正交的光滑函数的和. 这种局部化方法的优点在于对于其 Fourier 变换支在球或环上的分布, 可以充分利用 Bernstein 估计, 实现求导或微分运算的代数化. Littlewood-Paley 理论在偏微分方程研究中的辉煌成就当属 Bony 的仿积分解理论, 它是 Bony 在研究双曲方程解的奇性传播时引入的, 经过 Meyer 等数学家发展后广泛地应用到偏微分方程的研究. 随着其他重要的分析工具, 诸如: 振荡积分理论、Fourier 限制性估计与 Strichartz 估计、Profile 分解与集中紧原理等方法的发展与使用, 进一步突显了 Littlewood-Paley 理论的框架性、普适性、灵活性等特征, 从而使这一理论逐步成为研究非线性发展方程的基本工具.

本章从频率空间上的局部化出发, 1.1 节着力于讨论经典 Bernstein 不等式与频率空间上单位分解定理, 给出缓增分布的齐次与非齐次型的 Littlewood-Paley 分解. 1.2 节在 Littlewood-Paley 理论的框架下, 给出齐次 Besov 空间定义、基本的嵌入关系、插值定理及热传导方程的解在混合时空 Besov 空间上的时空正则性. 重点讨论 Besov 空间的各种不同刻画之间的等价关系等. 1.3 节主要讨论相应的非齐次 Besov 空间的理论. 作为特例, 介绍了 Hölder 型空间 C^α 与 Zygmund 型空间 $\mathscr{C}^1_* = B^1_{\infty,\infty}$ 及其应用. 1.4 节着力介绍 Bony 的仿积分解及仿线性化技术, 它是其他章节的基本工具之一. 1.5 节介绍新型的 Bernstein 不等式, 它是建立分数阶耗散算子在局部化空间 (如: Besov 空间、分数阶 Sobolev 空间等) 正性估计的基础, 在研究分数阶发展型方程的研究中起着重要的作用.

1.1　频率空间的局部化

Littlewood-Paley 理论的基本思想就是频率空间的局部化, 其优势在于将物理空间的微分运算转化成频率空间的数乘运算. 更一般地, Fourier 乘子算子作用在 Fourier 变换具有环形支集 (或球形支集) 的缓增分布上, 等价于数乘运算 (或被数乘估计控制). 为书写方便, 本节 Fourier 变换与逆变换采用如下形式:

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \triangleq \hat{f}(\xi),$$

$$\mathcal{F}^{-1}g(x)=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}g(\xi)d\xi\triangleq\check{g}(x).$$

在这种形式下, 常常用到 $\mathcal{F}[e^{-|x|^2/2}]=e^{-|\xi|^2/2}$. 频率局部化中最基本引理就是如下的 Bernstein 不等式.

引理 1.1 (Bernstein 不等式) *设 $\mathscr{C}$ 与 B 分别是以原点为中心的环和球. 存在常数 $C>0$ 使得对任意整数 $k\geqslant 0$, 任意度为 m 的光滑齐次函数 $\sigma(x)$, 任意的数对 $b\geqslant a\geqslant 1$ 及任意的 L^a 函数 u, 有如下估计:*

$$\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)}\leqslant C^{k+1}\lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)},\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda B,\tag{1.1}$$

$$C^{-(k+1)}\lambda^k\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}\leqslant\sup_{|\alpha|=k}\|\partial^\alpha u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}\leqslant C^{k+1}\lambda^k\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)},\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C},\tag{1.2}$$

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{\sigma,m}\lambda^{m+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)},\quad \operatorname{supp}\hat{u}\subset\lambda\mathscr{C}.\tag{1.3}$$

证明 第一步. 取 $\hat{\phi}(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\begin{cases}\hat{\phi}(\xi)=1, & \xi\in B,\\ \hat{\phi}(\xi)=0, & \xi\in\mathbb{R}^d\setminus 2B,\end{cases}\tag{1.4}$$

这里 $2B$ 是与 B 同心、半径扩张 2 倍的球 ($2\mathscr{C}$ 同理定义). 易见

$$\hat{u}(\xi)=\hat{\phi}(\xi)\hat{u}(\xi),\quad \operatorname{supp}\hat{u}(\xi)\subset B,\tag{1.5}$$

因此

$$u(x)=\phi*u(x)\Longrightarrow\partial^\alpha u=\partial^\alpha\phi*u.\tag{1.6}$$

利用 Fourier 变换的定义、插值可见

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha\phi(x)\|_{L^c}&\leqslant\|\partial^\alpha\phi\|_{L^\infty}+\|\partial^\alpha\phi\|_{L^1} && (1\leqslant c\leqslant\infty)\\ &\leqslant 2\omega_d\|(1+|x|^2)^d\partial^\alpha\phi\|_\infty && (\omega_d:\mathbb{R}^d\ \text{单位球面的面积})\\ &\leqslant 2\omega_d\|(I-\Delta)^d(i\xi)^\alpha\hat{\phi}(\xi)\|_{L^1}\\ &=:C^{k+1}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

利用 Young 不等式, (1.6) 两边取 L^b 模就得

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b}\leqslant\|\partial^\alpha\phi\|_{L^c}\|u\|_{L^a}\leqslant C^{k+1}\|u\|_{L^a},\tag{1.8}$$

这里

$$\frac{1}{b}+1=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}.$$

两边关于 $|\alpha|=k$ 取上确界, 就得 (1.1) 在 $\lambda=1$ 的情形. 通过尺度变换技术, 它本质上就意味着一般的结果. 事实上

$$\hat{u}(\xi) = \hat{\phi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\hat{u}(\xi), \qquad \forall \xi \in \lambda B,$$

于是

$$u(x) = \lambda^d \phi(\lambda \cdot) * u(\cdot) \Longrightarrow \partial^\alpha u = \lambda^d \partial_x^\alpha(\phi(\lambda \cdot)) * u(\cdot), \tag{1.9}$$

注意到

$$\|\lambda^d \partial_x^\alpha \phi(\lambda x)\|_{L^c} = \lambda^{k+\frac{(c-1)d}{c}} \|\partial_x^\alpha \phi(x)\|_{L^c} = \lambda^{d(1-\frac{1}{c})+k} C^{k+1}, \tag{1.10}$$

由 Young 不等式及关系式 $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = 1 - \dfrac{1}{c}$ 就推出

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^b} \leqslant \lambda^{k+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} C^{k+1} \|u\|_{L^a}, \qquad \mathrm{supp}\ \hat{u} \subset \lambda B,$$

关于 $|\alpha| = k$ 取上确界就是估计 (1.1).

第二步. 取 $\hat{\psi}(\xi) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, 并且

$$\begin{cases} \hat{\psi}(\xi) = 1, & \xi \in \mathscr{C}, \\ \hat{\psi}(\xi) = 0, & \mathrm{dist}(\xi, \mathscr{C}) \geqslant \dfrac{d(0, \mathscr{C})}{2}. \end{cases} \tag{1.11}$$

利用代数恒等式

$$|\xi|^{2k} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_d^2)^k = \sum_{1 \leqslant j_1, j_2, \cdots, j_k \leqslant d} \xi_{j_1}^2 \cdots \xi_{j_k}^2 = \sum_{|\alpha|=k} (i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha,$$

有

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{(i\xi)^\alpha (-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} = 1. \tag{1.12}$$

利用 $\hat{\psi}(\xi)$ 取代 $\hat{\phi}(\xi)$ 的位置, 完全类似于第一步的推导, 就可以证明 (1.2) 的第二个不等式. 下面仅证第一个不等式

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{\psi}(\xi)(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi), \quad \mathrm{supp}\hat{u} \subset \mathscr{C}, \tag{1.13}$$

$$u(x) = \sum_{|\alpha|=k} g_\alpha * \partial^\alpha u, \quad g_\alpha(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{\psi}(\xi)\Big) \in L^1(\mathbb{R}^d), \tag{1.14}$$

当 $\lambda \neq 1$ 时, 形如 (1.14) 的表示推导如下:

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}} \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) = \lambda^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(-i\xi/\lambda)^\alpha}{(|\xi|/\lambda)^{2k}} \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)(i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi),$$

由此可见

$$u(x) = \lambda^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \lambda^d g_\alpha(\lambda x) * \partial^\alpha u. \tag{1.15}$$

直接估计

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^a} &\leqslant \sum_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \\ &\leqslant \#\{|\alpha| = k\} \cdot \max_{|\alpha|=k} \|g_\alpha\|_{L^1} \|\partial^\alpha u\|_{L^a} \\ &=: C^{k+1} \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a},\end{aligned}$$

因此

$$C^{-(k+1)} \|u\|_{L^a} \leqslant \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^a}, \quad \text{supp } \hat{u} \subset \mathscr{C}. \tag{1.16}$$

同理, 用 (1.15) 代替 (1.14), 就得估计 (1.2) 的第一个不等式.

第三步. 注意到 $\sigma(\xi)\hat{u} = \hat{\psi}(\xi)\sigma(\xi)\hat{u}(\xi)$, 就得

$$\sigma(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}(\xi)\sigma(\xi)) * u = g_\sigma(x) * u, \quad \text{supp}\hat{u} \subset \mathscr{C}. \tag{1.17}$$

由于 $\sigma(\xi)$ 是 m 阶齐次函数, 容易看出

$$\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \lambda^m \hat{\psi}\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\sigma\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big)\hat{u}(\xi).$$

因此, $\sigma(D)u = \lambda^m \lambda^d g_\sigma(\lambda x) * u(x)$. 由此推出

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b} \leqslant C_{\sigma,m} \|u\|_{L^a}, \tag{1.18}$$

这里

$$\|g_\sigma(x)\|_{L^c} =: C_{\sigma,m}, \quad 1 + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \quad \text{supp } \hat{u}(\xi) \subset \mathscr{C}. \tag{1.19}$$

同理推得

$$\|\sigma(D)u\|_{L^b} \leqslant \lambda^{m+d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} C_{\sigma,m} \|u\|_{L^a}, \quad \text{supp } \hat{u}(\xi) \subset \lambda\mathscr{C}. \tag{1.20}$$

□

下面来重点讲授单位分解定理.

定理 1.2　设 $\mathscr{C}$ 是一个以原点为中心, 长半径是 $\frac{8}{3}$, 短半径是 $\frac{3}{4}$ 的环. 存在两个径向函数 $\chi(\xi) \in \mathscr{D}(B_{\frac{4}{3}}(0))$,$\hat{\varphi}(\xi) \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$ 满足 $0 \leqslant \chi(\xi), \hat{\varphi}(\xi) \leqslant 1$ 及

$$\chi(\xi) + \sum_{j \geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1.21}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{1.22}$$

$$\text{supp}\ \hat{\varphi}(2^{-j}\cdot)\cap\text{supp}\ \hat{\varphi}(2^{-j'}\cdot)=\varnothing,\quad |j-j'|\geqslant 2, \tag{1.23}$$

$$\text{supp}\ \chi(\cdot)\cap\text{supp}\ \hat{\varphi}(2^{-j}\cdot)=\varnothing,\quad j\geqslant 1. \tag{1.24}$$

令

$$\tilde{\mathscr{C}}:=B_{\frac{2}{3}}(0)+\mathscr{C}=\left\{\xi\ \middle|\ \frac{1}{12}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{10}{3}\right\}, \tag{1.25}$$

则 $\tilde{\mathscr{C}}$ 是环, 并且有如下关系式:

$$2^{j'}\tilde{\mathscr{C}}\cap 2^{j}\mathscr{C}=\varnothing,\quad |j-j'|\geqslant 5, \tag{1.26}$$

$$1/3\leqslant\chi^2(\xi)+\sum_{j\geqslant 0}\hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi)\leqslant 1,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d, \tag{1.27}$$

$$1/2\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi)\leqslant 1,\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}. \tag{1.28}$$

证明 第一步. 这是一个构造性的证明. 取 $\alpha\in(1,4/3)$, 记

$$\mathscr{C}'=\{\ \xi|\ \alpha^{-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2\alpha\}\subsetneq\mathscr{C}, \tag{1.29}$$

取 $\theta(\xi)=\theta(|\xi|)\in\mathscr{D}(\mathscr{C})$ 并且

$$0\leqslant\theta(\xi)\leqslant 1;\quad \theta(\xi)\equiv 1,\qquad \xi\in\mathscr{C}'. \tag{1.30}$$

重要观察:

$$2^j\mathscr{C}\cap 2^{j'}\mathscr{C}=\varnothing,\quad |j-j'|\geqslant 2. \tag{1.31}$$

否则, 就应有

$$2^j\frac{8}{3}>2^{j'}\frac{3}{4}\ \text{且}\ 2^{j'}\frac{8}{3}>2^j\frac{3}{4},$$

即

$$2^{j-j'}>\frac{9}{32},2^{j-j'}<\frac{32}{9}\Longleftrightarrow|j-j'|<2.$$

类似地, 亦有

$$B_{\frac{4}{3}}(0)\cap 2^j\mathscr{C}=\varnothing,\quad j\geqslant 1, \tag{1.32}$$

$$\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}2^j\mathscr{C}=\mathbb{R}^d\setminus\{0\}. \tag{1.33}$$

由 (1.31) 说明 $\theta_j(\xi)=\theta(2^{-j}\xi)$ 是几乎正交的光滑函数列, 令

$$S(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\theta(2^{-j}\xi), \tag{1.34}$$

易见, 上面和式在 $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ 上是局部有限求和 (具体地说, 对 $\forall\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, 存在含 ξ 的邻域 U_ξ, 满足在邻域 U_ξ 上, (1.34) 的右边和式中非零项不超过 3 项). 从而,

$S(\xi) \in C^\infty$. 与此同时, (1.34) 表达式就意味着

$$S(2^k\xi) \equiv S(\xi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.35}$$

故令

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\theta(\xi)}{S(\xi)} \Longrightarrow \text{supp } \hat{\varphi}(\xi) \subset \mathscr{C}, \tag{1.36}$$

且

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\theta(2^{-j}\xi)}{S(\xi)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\theta(2^{-j}\xi)}{S(2^{-j}\xi)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{1.37}$$

由此可以推出 $0 \leqslant \hat{\varphi}(\xi) \leqslant 1$ 并且满足 (1.22),(1.23) 及定理中所涉及的光滑性 $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathscr{D}(\mathscr{C})$.

由 $\{\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\}$ 的几乎正交性可见

$$\chi(\xi) := 1 - \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi), \tag{1.38}$$

光滑并且满足 (1.21), 由于

$$\text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \subset \left\{ \xi \,\middle|\, \frac{3}{4}\cdot 2^j \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}\cdot 2^j \right\},$$

故

$$\text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \subset \left\{ \xi \,\middle|\, |\xi| \leqslant \frac{4}{3} \right\}, \quad \forall j \leqslant -1,$$

因此

$$\sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = 1, \quad \forall |\xi| \geqslant \frac{4}{3}. \tag{1.39}$$

由此说明 $\chi(\xi) \in \mathscr{D}(B_{\frac{4}{3}}(0))$. 进而, 当 $j \geqslant 1$ 时,

$$\text{supp } \hat{\varphi}_j(\xi) := \text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) \subset \left\{ \xi \mid |\xi| > \frac{3}{2} \right\}.$$

自然

$$\text{supp } \chi(\xi) \cap \text{supp } \hat{\varphi}(2^{-j}\xi) = \varnothing, \quad j \geqslant 1.$$

第二步. 下面来证明 (1.26)~(1.28). 注意到

$$\widetilde{\mathscr{C}} = \left\{ \xi \,\middle|\, \frac{1}{12} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{10}{3} \right\},$$

容易看出

$$\begin{aligned} 2^{j'}\widetilde{\mathscr{C}} \cap 2^j\mathscr{C} \neq \varnothing &\Longleftrightarrow \frac{3}{4}\cdot 2^j < 2^{j'}\frac{10}{3} \text{ 且 } \frac{1}{12}\cdot 2^{j'} < 2^j \frac{8}{3} \\ &\Longleftrightarrow 2^{j-j'} < \frac{40}{9}, 2^{j-j'} > \frac{1}{32} \\ &\Longleftarrow |j'-j| < 5. \end{aligned}$$

于是, (1.26) 得证.

注意到 $0 \leqslant \chi(\xi), \hat{\varphi}(\xi) \leqslant 1$, 容易推出

$$\chi^2(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant \Big(\chi(\xi) + \sum_{j\geqslant 0} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\Big)^2 = 1,$$

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)\Big)^2 = 1.$$

故仅需证明 (1.27),(1.28) 左边的不等式即可. 记 $j = 0(2)$ 与 $j = 1(2)$ 分别表示偶数和奇数. 这样, 利用几乎正交性原理及

$$\Big[\sum_{j=0(2)} \hat{\varphi}_j(\xi) + \sum_{j=1(2)} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big]^2 = 1, \quad \hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

$$\Big[\chi(\xi) + \sum_{j=0(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi) + \sum_{j=1(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big]^2 = 1, \quad \hat{\varphi}_j(\xi) = \hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

可得

$$2\Big(\sum_{j=0(2)} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 + 2\Big(\sum_{j=1(2)} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 \geqslant 1,$$

$$3\chi^2(\xi) + 3\Big(\sum_{j=0(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 + 3\Big(\sum_{j=1(2),j\geqslant 0} \hat{\varphi}_j(\xi)\Big)^2 \geqslant 1.$$

从而推出 (1.27), (1.28) 成立. □

基于频率空间上的单位分解定理与 $\chi(\xi), \hat{\varphi}(\xi)$ 的构造, 我们引入一些与 Littlewood-Paley 理论相关的记号:

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)), \quad \varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi}(\xi)), \tag{1.40}$$

$$\begin{cases} \Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\hat{u}(\xi)); \quad \Delta_j u = 0, \quad j \leqslant -2, \\ \Delta_j u = \hat{\varphi}(2^{-j}D)u = 2^{jd}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y)u(x-y)dy, \quad j \geqslant 0, \\ S_j u = \chi(2^{-j}D)u = 2^{jd}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} h(2^j y)u(x-y)dy, \quad j \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \\ \hat{\varphi}\Big(\dfrac{\xi}{2^j}\Big) = \chi\Big(\dfrac{\xi}{2^{j+1}}\Big) - \chi\Big(\dfrac{\xi}{2^j}\Big) \Longleftrightarrow \Delta_j u = (S_{j+1} - S_j)u, \quad j \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.41}$$

$$\begin{cases} \dot{\Delta}_j u = \hat{\varphi}(2^{-j}D)u = 2^{jd}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y)u(x-y)dy, \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \dot{S}_j u \triangleq \chi(2^{-j}D)u, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.42}$$

容易看出

$$S_j u = \sum_{j' \leqslant j-1} \Delta_{j'} u, \quad \dot{S}_j u \neq \sum_{j' \leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} u, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

事实上, 如果不然, 取 $u = 1$, 对于任意整数 j, 正交性意味着

$$\dot{\Delta}_j 1 = 0 \quad (\ \hat{\varphi}_j(\xi)\delta(\xi) = 0\ ), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

故

$$\langle 1, \phi \rangle = \langle \dot{S}_j 1, \phi \rangle = \Big\langle \sum_{j' \leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} 1, \quad \phi \Big\rangle = 0, \qquad \forall \phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

是一个矛盾式. 说明

$$\dot{S}_j u \neq \sum_{j' \leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} u, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

这充分说明与非齐次 Littlewood-Paley 算子不同, 我们不能用 $\sum\limits_{k \leqslant j-1} \dot{\Delta}_k$ 来定义 $\dot{S}_j$.

然而, 对于 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P} = \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$, 总有

$$\dot{S}_j u = \sum_{j' \leqslant j-1} \dot{\Delta}_{j'} u, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d).$$

进而, 算子 $\Delta_j(\dot{\Delta}_j)$, $S_j = \dot{S}_j$ 是 (p,p) 型有界算子, 算子的界均不依赖于 j, 这一事实将来会一直使用.

下面来考察分解

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j = I\ (\text{非齐次分解}); \qquad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j = I\ (\text{齐次分解}) \tag{1.43}$$

的意义. 以非齐次分解为例先来说明.

命题 1.3 设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 则在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 分布意义下, 有

$$u = \lim_{j \to \infty} S_j u. \tag{1.44}$$

证明 对任意 $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 易见

$$\langle u - S_j u, f \rangle \equiv \langle u, f - S_j f \rangle.$$

因此, (1.44) 就归结为证明

$$f \xlongequal{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \lim_{j \to \infty} S_j f, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{1.45}$$

注意到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上的局部凸拓扑可以用如下半范数簇

$$|||\cdot|||_{k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \xlongequal{\text{def}} \sup_{|\alpha| \leqslant k, \xi \in \mathbb{R}^d} (1 + |\xi|)^k |\partial^\alpha \hat{f}(\xi)|$$

所诱导. 采用 Leibniz 公式, 直接验算

$$|||f-S_jf|||_{k,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\leqslant\sup_{|\alpha|\leqslant k,\xi\in\mathbb{R}^d}\Big\{(1+|\xi|)^k\Big(|1-\chi(2^{-j}\xi)|\cdot|\partial^\alpha\hat{f}(\xi)|$$
$$+\sum_{0<\beta\leqslant\alpha}C_\alpha^\beta 2^{-j|\beta|}|(\partial^\beta\chi)(2^{-j}\xi)|\cdot|\partial^{\alpha-\beta}\hat{f}(\xi)|\Big)\Big\}.$$

对第一项使用中值定理 (用到 $\chi(0)=1$), 则

$$|||f-S_jf|||_{k,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_\alpha 2^{-j}|||f|||_{k+1,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}\to 0,\quad j\to\infty. \tag{1.46}$$

□

下面给出的命题表明, 如果通项的 Fourier 变换只是支在二进制环上, 那么级数在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 意义下的收敛条件是相当弱的.

命题 1.4 设 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是有界函数序列, 并且$\mathrm{supp}\hat{u}_j\subset 2^j\tilde{\mathscr{C}}$, $\tilde{\mathscr{C}}$ 是给定的环, 如果

$$\|u_j\|_\infty\leqslant C2^{jN}, \tag{1.47}$$

则级数 $\sum_j u_j$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 意义下收敛.

证明 取 $\varphi(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ 且在 $\tilde{\mathscr{C}}$ 附近是 1, 则

$$\hat{u}(\xi)=\varphi(\xi)\hat{u}(\xi)=\sum_{|\alpha|=k}\frac{(i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}\varphi(\xi)(-i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi),$$

等价于

$$u=\sum_{|\alpha|=k}g_\alpha*\partial^\alpha u,\quad g_\alpha=\mathcal{F}^{-1}\Big[\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}\varphi(\xi)\Big].$$

同理, 在每一个 $2^j\tilde{\mathscr{C}}$ 上, 有表达式

$$\hat{u}(\xi)=\sum_{|\alpha|=k}2^{-jk}\frac{(i\xi/2^j)^\alpha}{(|\xi|/2^j)^{2k}}\varphi(\xi/2^j)(-i\xi)^\alpha\hat{u}(\xi),$$

即

$$u(x)\equiv 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}2^{jd}g_\alpha(2^j\cdot)*\partial^\alpha u.$$

现在 $u(x)$ 取成 $u_j(x)$, 自然亦有

$$u_j=2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}2^{jd}g_\alpha(2^j\cdot)*\partial^\alpha u_j(x). \tag{1.48}$$

任取 $f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 考察

$$
\begin{aligned}
\langle u_j, f(x)\rangle &= 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\langle u_j, 2^{jd}g_\alpha(-2^j\cdot)*(-\partial)^\alpha f\rangle \\
&\leqslant 2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\|u_j\|_\infty\|2^{jd}g_\alpha(-2^j\cdot)\partial^\alpha * f\|_{L^1} \\
&\leqslant C2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}2^{jN}\|\partial^\alpha f\|_{L^1}.
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

显然, 当 M 充分大时, $\|\partial^\alpha f\|_{L^1}\leqslant \|f\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$. 事实上,

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\alpha f\|_{L^1} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\frac{dx}{(1+|x|^2)^d}\cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^d,|\alpha|\leqslant \max(k,2d)}(1+|x|)^{2d}|\partial^\alpha f(x)| \\
&\leqslant C\sup_{x\in\mathbb{R}^d,|\alpha|\leqslant k+2d}(1+|x|)^{2d+k}|\partial^\alpha f(x)| \\
&= C|||f|||_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)},\qquad M=2d+k.
\end{aligned}
$$

因此, 取 k 充分大 (即 $k>N$) 就可以保证

$$
\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle u_j, f\rangle\leqslant C|||f|||_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}
$$

是一个收敛级数. 因此, 收敛级数

$$
\langle u, f\rangle \triangleq \lim_{j\to\infty}\sum_{j'\leqslant j}\langle u_{j'}, f\rangle \tag{1.50}
$$

就定义了一个缓增分布. 特别地, 对于任意的 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 也可以通过满足命题 1.4 条件的有界函数序列所确定的级数来定义, 即

$$
\langle u, f\rangle \triangleq \lim_{j\to\infty}\sum_{j'\leqslant j}\langle \Delta_{j'}u, f\rangle. \tag{1.51}
$$

对于算子 $\dot{\Delta}_j$ 问题就变得稍稍复杂些, 换言之, 如果在 (1.51) 中用 $\dot{\Delta}_j$ 来代替 Δ_j 是不成立的. 事实上, 取 $u=1$, 利用正交性

$$
\dot{\Delta}_j 1=0,\qquad \forall j\in\mathbb{Z}.
$$

因此

$$
\langle 1, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty}\sum_{j'\leqslant j}\langle \dot{\Delta}_{j'}1, \phi\rangle = 0
$$

是一个矛盾式. 说明对于齐次的 Littlewood-Paley 算子, (1.51) 不能成立. □

注记 1.1 　可以证明: 对任意多项式函数 $P(x)$, 有 $\dot{\Delta}_j P(x)=0$. 事实上,

$$
\dot{\Delta}_j P(x)=0 \Longleftrightarrow \forall g(x),\quad \langle \dot{\Delta}_j P(x), g\rangle = 0.
$$

我们知道

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dot{\Delta}_j g(x)dx = \widehat{\dot{\Delta}_j g}(0) \equiv 0.$$

更进一步, 对任意多项式 $P(x)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} P(x)\dot{\Delta}_j g(x)dx = \left[P(D_\xi)\widehat{\dot{\Delta}_j g}\right](0) = 0.$$

利用卷积的性质, 就得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dot{\Delta}_j P(x)g(x)dx = 0.$$

根据 $\dot{S}_j$ 的定义, 对于任意的 $j \in \mathbb{Z}$ 及非零的多项式, 总有

$$\dot{S}_j P(x) = P(x) \neq 0.$$

鉴于上面分析, 需要引入新的概念来刻画齐次 Besov 型空间.

定义 1.1 用 $\mathcal{S}'_h$ 表示满足

$$\lim_{j\to-\infty} \dot{S}_j u = 0, \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

的 Schwartz 分布 u 的全体.

关于分布函数空间 $\mathcal{S}'_h$, 有下列基本事实 (可作为习题来思考):

(1)

$$\mathcal{S}'_h = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \;\middle|\; u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \dot{\Delta}_j u \right\}. \tag{1.52}$$

(2) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 且 $\hat{u}(\xi)$ 在 0 的邻域内局部可积, 则 $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$ (很简单, 直接按定义验证).

(3) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\theta(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ 且在 $x = 0$ 的邻域上, $\theta(x) \equiv 1$ 且 $\theta(D)u \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leqslant p < \infty$, 则 $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$. 特别, 当 $p < \infty$ 时, 总有如下的嵌入关系:

$$B^s_{p,r} \hookrightarrow \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d).$$

(4) 任何非零的常数均不属于 $\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$.

事实上, 常数的频率支在原点, 故 $\dot{S}_j u = u, \forall j \in \mathbb{Z}$, 这样就得

$$\lim_{j\to-\infty} \dot{S}_j u = u \neq 0.$$

注记 1.2 (a) $u \in \mathcal{S}'_h$ 或 $u \bar{\in} \mathcal{S}'_h$ 主要取决于低频部分. 具体地说, 仅需 $\hat{u}(\xi)$ 在 0 附近可积就行了.

(b) 在弱拓扑意义下, $\mathcal{S}'_h$ 不是 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的闭子空间. 例如, 取 $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(0) = 1$, 构造序列

$$f_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d),$$

可以证明

$$f_n(x) \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} 1 \bar{\in} \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d).$$

(c) 上面 (4) 可以推广成为: 多项式 $u \bar{\in} \mathcal{S}'_h$ (因为 $\dot{S}_j u = u, \forall j \in \mathbb{Z}$).

(d) $u \in \mathcal{S}'_h \Longleftrightarrow$ 对任意 $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, θ 在原点附近恒等于 1, 有

$$\lim_{\lambda \to \infty} \theta(\lambda D) u = 0, \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

提示: 取$h(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 证明:

$$\lim_{j \to -\infty} \int \hat{\dot{S}}_j(\xi) \hat{u}(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\lambda \to \infty} \int \theta(\lambda \xi) \hat{u}(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi = 0.$$

(e) 证明 $\mathcal{S}'_h \cong \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ 是全体多项式之集合, 或证明其等价形式:

$$\mathcal{S}'_h = \Big\{ f |\ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \big[P(D)\hat{f}\big](0) = 0 \Big\}.$$

应用: 主要考察热群作用在具有球形 (或环形) 支集的分布上的效果.

命题 1.5 设 $\mathscr{C}$ 是中心在原点的固定环, 存在正常数 c 与 C, 对任意 $1 \leqslant a \leqslant \infty$ 及正常数对 (t, λ), 有

$$\operatorname{supp} \hat{u} \subset \lambda \mathscr{C} \Longrightarrow \|e^{t\Delta} u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)} \leqslant C e^{-ct\lambda^2} \|u\|_{L^a(\mathbb{R}^d)}.$$

证明 设 $\varphi(\xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 并且在环形区域 $\mathscr{C}$ 附近恒等于 1 . 于是

$$\begin{cases} \varphi(\xi) e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi) \equiv e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi), & \operatorname{supp} \hat{u}(\xi) \subset \mathscr{C}, \\ \varphi(\xi/\lambda) e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi) \equiv e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi), & \operatorname{supp} \hat{u}(\xi) \subset \lambda \mathscr{C}. \end{cases} \tag{1.53}$$

注意到

$$\begin{cases} e^{t\Delta} u = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\xi) e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi)) = g(t, \cdot) * u, \quad \operatorname{supp} \hat{u}(\xi) \subset \mathscr{C}, \\ g(t, x) \equiv \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) e^{-t|\xi|^2} d\xi. \end{cases} \tag{1.54}$$

由 Fourier 变换的性质, 可见

$$e^{t\Delta} u = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) e^{-t\lambda^2 |\frac{\xi}{\lambda}|^2} \hat{u}(\xi)\right) = \lambda^d g(t\lambda^2, \lambda \cdot) * u \triangleq g_\lambda(t, x) * u. \tag{1.55}$$

断言: $\|g(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C e^{-ct}$. 此断言意味着

$$\|g_\lambda(t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|\lambda^d g(\lambda^2 t, \lambda \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|g(\lambda^2 t, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C e^{-c\lambda^2 t}. \tag{1.56}$$

下面来证明断言. 由表示公式 (1.54), 直接计算可见

$$\begin{aligned}g(t,x) &\cong (1+|x|^2)^{-d}\int(1+|x|^2)^d e^{ix\cdot\xi}\varphi(\xi)e^{-t|\xi|^2}d\xi\\&=(1+|x|^2)^{-d}\int[(I-\Delta_\xi)^d e^{ix\cdot\xi}]\varphi(\xi)e^{-t|\xi|^2}d\xi\\&=(1+|x|^2)^{-d}\int e^{ix\cdot\xi}(I-\Delta)^d(\varphi(\xi)e^{-t|\xi|^2})d\xi.\end{aligned}\tag{1.57}$$

利用 Leibniz 法则

$$(I-\Delta)^d(\varphi(\xi)e^{-t|\xi|^2})=\sum_{\beta\leqslant\alpha,\ |\alpha|\leqslant 2d}C_\alpha^\beta(\partial^{\alpha-\beta}\varphi(\xi))(\partial^\beta e^{-t|\xi|^2})\tag{1.58}$$

及 Faá-di-Bruno 公式

$$e^{t|\xi|^2}\partial^\beta(e^{-t|\xi|^2})\cong\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_\ell=|\beta|\\|\beta_j|\geqslant 0}}(-t)^{|\beta|}\prod_{j=1}^{\ell}\partial^{\beta_j}(|\xi|^2).\tag{1.59}$$

由于 supp $\varphi(\xi)$ 在环 $\{\xi\ |c_0\leqslant|\xi|\leqslant C_0\}$ 上, 因此, 对于 $\forall\xi\in\operatorname{supp}\varphi(\xi)$ 有

$$\left|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(\xi)(\partial^\beta e^{-t|\xi|^2})\right|\leqslant C(1+t)^{|\beta|}e^{-t|\xi|^2}\leqslant C(1+t)^{|\beta|}e^{-c_0^2 t}.\tag{1.60}$$

注意到

$$\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{1}{2}c_0^2 t}(1+t)^{|\beta|}=0,\tag{1.61}$$

就得

$$|g(x,t)|\leqslant C(1+|x|^2)^{-d}e^{-ct}\quad\left(c=c_0^2/2\right).\tag{1.62}$$

因此

$$\|g(x,t)\|_{L^1}\leqslant Ce^{-ct}.$$ □

推论 1.6 设 $\mathscr{C}$ 是一个环, 存在正常数 c 与 C, 对于任意 $b\geqslant a\geqslant 1$, $q\geqslant p\geqslant 1$ 及任意 $\lambda>0$, $f(t,x)$ 满足 $\hat f(t,\cdot)\in\lambda\mathscr{C},\forall t\in[0,T]$. 设 u 是线性问题

$$\partial_t u-\nu\Delta u=f,\quad u(0)=0\tag{1.63}$$

的解, 则

$$\|u\|_{L^q([0,T];L^b(\mathbb{R}^d))}\leqslant C(\nu\lambda^2)^{-1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\lambda^{d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})}\|f\|_{L^p([0,T];L^a)}.\tag{1.64}$$

证明

$$u(t)=\int_0^t e^{-\nu(t-s)\Delta}f(s,x)ds.\tag{1.65}$$

利用引理 1.1 及经典的 Bernstein 估计, 可见

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^q([0,T);L^b_x(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \Big\| \int_0^t \|e^{-\nu(t-s)\Delta} f(s,x)\|_{L^b_x} ds \Big\|_{L^q_t} \\
&\leqslant C \Big\| \int_0^t e^{-c(t-s)\nu\lambda^2} \|f(s,x)\|_{L^b_x} ds \Big\|_{L^q_t} \\
&\leqslant C \Big\| \int_0^t e^{-c(t-s)\nu\lambda^2} \lambda^{d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|f(s,x)\|_{L^a_x} ds \Big\|_{L^q_t} \\
&\leqslant C \Big\| e^{-c\nu\lambda^2\tau} \chi_{[0,t]} \Big\|_{L^\ell_t} \|f(t,x)\|_{L^p_t L^a_x} \cdot \lambda^{d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \quad (\text{Young 不等式}) \\
&\leqslant C(\nu\lambda^2)^{-1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \lambda^{d(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})} \|f(t,x)\|_{L^p_t L^a_x},
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

这里用到

$$
1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{p}.
$$

□

1.2 齐次 Besov 空间

定义 2.1 设 $s \in \mathbb{R}, p, r \geqslant 1$, 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上引入半范数

$$
\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{rjs} \|\dot{\Delta}_j u\|_p^r \Big)^{\frac{1}{r}}.
$$

注意到

$$
\dot{\Delta}_j u = 0, \qquad u \in \mathscr{P} \text{ (多项式集合, 其频率均支在原点)}.
$$

因此

$$
\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} = 0 \not\Longrightarrow u = 0.
$$

这就说明 $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ 本质上是一个半范数 (模掉多项式集合就是一个范数了).

定理 2.1 存在常数 C, 使得

$$
\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r_2}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r_1}}, \quad r_1 \leqslant r_2, \tag{2.1}
$$

$$
\|u\|_{\dot{B}^s_{p_2,r}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^{s+d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_1,r}}, \quad p_1 \leqslant p_2, \tag{2.2}
$$

$$
\|u\|_{\dot{B}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,r}} \leqslant C\|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,r}} \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,r}}, \quad \theta \in [0,1], \tag{2.3}
$$

进而还有如下最优型的插值不等式:

$$
\|u\|_{\dot{B}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}} \leqslant \frac{C}{s_2-s_1}\Big(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{1-\theta}\Big)\|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}}, \quad s_2 > s_1,\ \theta \in (0,1). \tag{2.4}
$$

证明 由经典的 Bernstein 不等式

$$
\|\dot{\Delta}_j u\|_{p_2} \leqslant C 2^{jd(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})} \|\dot{\Delta}_j u\|_{p_1}. \tag{2.5}
$$

再结合使用 $l^{r_1}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow l^{r_2}(\mathbb{Z}), r_1 \leqslant r_2$ 就推出估计 (2.1) 和 (2.2).

下面证明插值型估计 (2.3).

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,r}} &= \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big(2^{j\theta s_1+(1-\theta)s_2 j}\|\dot{\Delta}_j u\|_p\big)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big(2^{j\theta s_1 r}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^{\theta r}\big)\big(2^{j(1-\theta)s_2 r}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^{(1-\theta)r}\big)\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big(2^{js_1 r}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\big)\Big)^{\frac{\theta}{r}} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js_2 r}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{(1-\theta)}{r}} \\
&\leqslant \|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,r}} \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,r}}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

最后, 利用高频和低频分解技术来证明最优型的插值不等式 (2.4). 事实上,

$$\|u\|_{\dot{B}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}} = \sum_{j\leqslant N} 2^{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)j}\|\dot{\Delta}_j u\|_p + \sum_{j>N} 2^{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)j}\|\dot{\Delta}_j u\|_p, \tag{2.7}$$

注意到

$$2^{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)j}\|\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant 2^{j(1-\theta)(s_2-s_1)}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}}, \tag{2.8}$$

$$2^{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)j}\|\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant 2^{-j\theta(s_2-s_1)}\|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}}, \tag{2.9}$$

从而推知

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}} &\leqslant \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \sum_{j\leqslant N} 2^{j(1-\theta)(s_2-s_1)} + \|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}} \sum_{j>N} 2^{-j\theta(s_2-s_1)} \\
&\leqslant \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \frac{2^{N(1-\theta)(s_2-s_1)}}{2^{(1-\theta)(s_2-s_1)}-1} + \|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}} \frac{2^{-N\theta(s_2-s_1)}}{1-2^{-\theta(s_2-s_1)}} \\
&\leqslant \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \frac{2^{N(1-\theta)(s_2-s_1)}}{(1-\theta)(s_2-s_1)2^{(1-\theta)(s_2-s_1)\eta_1}\log 2} \\
&\quad + \|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}} \frac{2^{-N\theta(s_2-s_1)}}{\theta(s_2-s_1)2^{-\theta(s_2-s_1)\eta_2}\log 2} \\
&\leqslant \|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}} \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}} \frac{C}{s_2-s_1}\Big(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{1-\theta}\Big),
\end{aligned}$$

上式的最后一步用到选取 N 满足:

$$\frac{\|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}}}{\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}}} \leqslant 2^{N(s_2-s_1)} \leqslant 2^{s_2-s_1}\frac{\|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}}}{\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,\infty}}}.$$

从而推出估计 (2.4). □

需要指出, 半范数 $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ 确定了 $s-\dfrac{d}{p}$ 次齐次函数. 具体来说, 设 $u(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义 $u_N(x)=u(2^Nx)$, 则有如下结果:

命题 2.2 $\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}<\infty$, 则 u_N 亦然, 并且满足

$$\|u_N\|_{\dot{B}^s_{p,r}}=2^{N(s-\frac{d}{p})}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.10}$$

证明

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_j u_N(x)&=2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-y))u_N(y)dy\\&=2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-y))u(2^Ny)dy\\&=2^{(j-N)d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^jx-2^{j-N}z)u(z)dz\qquad(z=2^Ny)\\&=2^{(j-N)d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^{j-N}(2^Nx-z))u(z)dz\\&=(\dot{\Delta}_{j-N}u)(2^Nx),\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\|\dot{\Delta}_j u_N\|_p=2^{-N\frac{d}{p}}\|\dot{\Delta}_{j-N}u\|_p\Longrightarrow 2^{js}\|\dot{\Delta}_j u_N\|_p=2^{N(s-\frac{d}{p})}2^{(j-N)s}\|\dot{\Delta}_{j-N}u\|_p. \tag{2.12}$$

两边关于 $j\in\mathbb{Z}$ 求 l^r 范数, 就得齐次伸缩公式 (2.10). □

定义 2.2(齐次 Besov 空间的定义) $s\in\mathbb{R},1\leqslant p,r\leqslant\infty$, 定义

$$\dot{B}^s_{p,r}=\left\{\,f\in\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)\;\middle|\;\|f\|_{\dot{B}^s_{p,r}}<\infty\right\}.$$

命题 2.3 $\dot{H}^s=\dot{B}^s_{2,2}$, 并且范数等价

$$\frac{1}{C^{|s|+1}}\|u\|_{\dot{B}^s_{2,2}}\leqslant\|u\|_{\dot{H}^s}\leqslant C^{|s|+1}\|u\|_{\dot{B}^s_{2,2}}. \tag{2.13}$$

证明 注意到

$$\operatorname{supp}\,\widehat{(\dot{\Delta}_j u)}\subset 2^j\mathscr{C}.$$

因此, 对于 $j\in\mathbb{Z}$, 存在常数 C, 对任意实数 s 及任意满足 $\hat{u}\in L^2_{\mathrm{loc}}$ 的函数 u, 成立如下 Bernstein 估计:

$$C^{-2(|s|+1)}2^{2js}\|\dot{\Delta}_j u\|^2_{L^2}\leqslant\|\dot{\Delta}_j u\|^2_{\dot{H}^s}\leqslant C^{2(|s|+1)}2^{2js}\|\dot{\Delta}_j u\|^2_{L^2},$$

两边关于 $j\in\mathbb{Z}$ 求和, 就是

$$C^{-2(|s|+1)}\|u\|^2_{\dot{B}^s_{2,2}}\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\dot{\Delta}_j u\|^2_{\dot{H}^s}\leqslant C^{2(|s|+1)}\|u\|^2_{\dot{B}^s_{2,2}}. \tag{2.14}$$

另一方面, 注意到不等式 $\frac{1}{2} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}^2(2^{-j}\xi) \leqslant 1$, 有

$$\frac{1}{2}\|u\|_{\dot{H}^s}^2 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_j u\|_{\dot{H}^s}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(2^{-j}\xi)|\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \|u\|_{\dot{H}^s}^2. \tag{2.15}$$

由 (2.14), (2.15) 即得估计 (2.13). □

下面给出一个不属于常规 Sobolev 空间的函数, 但它属于 Besov 空间.

命题 2.4 设 $\sigma \in (0,d)$, 则对任意 $p \in [1,\infty]$, 有

$$\frac{1}{|x|^\sigma} \in \dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-\sigma}(\mathbb{R}^d). \tag{2.16}$$

证明 注意到

$$\mathcal{F}|x|^{-\sigma} = C_d|\xi|^{\sigma-d} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d),$$

说明 $|x|^{-\sigma} \in \mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d)$. 直接计算

$$\begin{aligned}(\dot{\Delta}_j|\cdot|^{-\sigma})(x) &= 2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j(x-y))|y|^{-\sigma}dy \\ &= 2^{j\sigma}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^jx-2^jy)|2^jy|^{-\sigma}d2^jy \\ &= 2^{j\sigma}\varphi_\sigma(2^jx),\end{aligned} \tag{2.17}$$

这里

$$\varphi_\sigma(y) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y-z)|z|^{-\sigma}dz.$$

易见

$$\widehat{\varphi_\sigma}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\mathcal{F}(|\cdot|^{-\sigma}) = C_n\hat{\varphi}(\xi)|\xi|^{\sigma-d}.$$

因为 $\hat{\varphi}(\xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\}) \Longrightarrow \widehat{\varphi_\sigma}(\xi) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. 由此说明

$$\|\varphi_\sigma(y)\|_p < \infty, \quad \forall p \in [1,\infty].$$

于是, 由 (2.17) 可见

$$\|\dot{\Delta}_j|\cdot|^{-\sigma}\|_p = 2^{j(\sigma-\frac{d}{p})}\|\varphi_\sigma\|_p. \tag{2.18}$$

因此

$$\left\|\frac{1}{|x|^\sigma}\right\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-\sigma}} = \sup_j 2^{j(\frac{d}{p}-\sigma)}\|\dot{\Delta}_j|x|^{-\sigma}\|_p = \|\varphi_\sigma\|_p < \infty. \quad \square$$

命题 2.5 $(\dot{B}_{p,r}^s, \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,r}^s})$ 是赋范空间.

证明 显然 $\|\cdot\|_{\dot{B}_{p,r}^s}$ 是半范数. 设 $u \in \mathcal{S}_h'$ 满足 $\|u\|_{\dot{B}_{p,r}^s} = 0$, 则

$$\mathrm{supp}\ \hat{u}(\xi) \subset \{0\}. \tag{2.19}$$

事实上, $\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}=0$ 就意味着

$$\forall j, \dot{\Delta}_j u=0 \Longrightarrow \hat{\varphi}_j(\xi)\hat{u}(\xi)=0.$$

由于

$$\hat{\varphi}_j(\xi)\neq 0, \qquad \frac{3}{4}2^j \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3}2^j.$$

故

$$\hat{u}(\xi)=0, \qquad \frac{3}{4}2^j < |\xi| < \frac{8}{3}2^j, \qquad \forall j\in\mathbb{Z}.$$

根据 j 的任意性就得 (2.19). 因此, $u\in\mathcal{P}$. 换句话说, 对任意 $j\in\mathbb{Z}$, 均有 $\dot{S}_j u=u$.

另一方面, 按 $u\in\mathcal{S}'_h$ 的定义知

$$\lim_{j\to-\infty}\dot{S}_j u=0.$$

由此推出 $u=0$. □

我们发现, $\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}}$ 关于 s 不具有单调性, 说明齐次 Besov 空间可以承载低频亦可以承载高频的信息.

命题 2.6 *存在常数 C 满足下面性质: 设 $s<0$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $u\in\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$. 则 $u\in\dot{B}^s_{p,r}$ 的充要条件是*

$$\left\{2^{js}\|\dot{S}_j u\|_p\right\}_j\in\ell^r.$$

进而, 还有

$$2^{-|s|-1}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant \left\|\{2^{js}\|\dot{S}_j u\|_p\}_j\right\|_{\ell^r} \leqslant C\left(1+\frac{1}{|s|}\right)\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.20}$$

证明 注意到

$$\dot{S}_j u=\sum_{j'\leqslant j-1}\dot{\Delta}_{j'}u, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad u\in\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d).$$

因此

$$2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant 2^{js}(\|\dot{S}_{j+1}u\|_p+\|\dot{S}_j u\|_p)=2^{-s}2^{(j+1)s}\|\dot{S}_{j+1}u\|_p+2^{js}\|\dot{S}_j u\|_p,$$

于是

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant 2^{-s+1}\|\{2^{js}\|\dot{S}_j u\|_p\}_j\|_{\ell^r} \quad (\text{利用 } s<0 \text{ 的条件}),$$

即

$$2^{-|s|-1}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant \left\|\{2^{js}\|\dot{S}_j u\|_p\}_j\right\|_{\ell^r}.$$

另一方面, 注意到

$$\begin{aligned}2^{js}\|\dot{S}_j u\|_p &\leqslant 2^{js}\sum_{j'\leqslant j-1}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p \leqslant \sum_{j'\leqslant j-1}2^{-(j'-j)s}2^{j's}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p\\ &\leqslant \frac{2^s}{1-2^s}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} \leqslant C\left(\frac{1}{|s|}+1\right)\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}},\end{aligned}$$

这里用到当 $|s|>1$ 时, $\left|\dfrac{2^s}{1-2^s}\right|\leqslant 1$; 当 $|s|\to 0$, 有 $\left|\dfrac{2^s}{1-2^s}\right|\leqslant\dfrac{1}{|s|}$ 及 Sobolev 嵌入定理 $\dot{B}^s_{p,r}\hookrightarrow\dot{B}^s_{p,\infty}$. □

定理 2.7 设 $s<\dfrac{d}{p}$, 则 $(\dot{B}^s_{p,r},\|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}})$ 是一个 Banach 空间. 对任意 $p\geqslant 1$, $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$ 也是 Banach 空间.

证明 由命题 2.5, $\dot{B}^s_{p,r}$, $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$ 是赋范空间.

第一步. 证明嵌入关系 $\dot{B}^s_{p,r}\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ $\left(s<\dfrac{d}{p}\right)$ 与 $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

代数意义下的包含关系 $\dot{B}^s_{p,r}\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ $\left(s<\dfrac{d}{p}\right)$ 与 $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 是已知的, 但拓扑意义下的嵌入需要证明. 事实上, 由 Bernstein 估计

$$\|\dot{\Delta}_j u\|_\infty\leqslant C2^{j\frac{d}{p}}\|\dot{\Delta}_j u\|_p. \tag{2.21}$$

若 $u\in\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$ (自然有 $u\in\mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$)

$$\|u\|_\infty\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\dot{\Delta}_j u\|_\infty\leqslant C\sum_j 2^{j\frac{d}{p}}\|\dot{\Delta}_j u\|_p=C\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}. \tag{2.22}$$

说明 $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}\hookrightarrow L^\infty\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

对于 $s<\dfrac{d}{p}$, 先处理低频部分 $j<0$ 的估计. 对于任意的 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 考察

$$\begin{aligned}|(\dot{\Delta}_j u,f)|&\leqslant\|\dot{\Delta}_j u\|_\infty\|f\|_1\leqslant 2^{j\frac{d}{p}}\|\dot{\Delta}_j u\|_p\|f\|_1\\&\leqslant C2^{j(\frac{d}{p}-s)}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\|f\|_{2d,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)},\end{aligned} \tag{2.23}$$

这里

$$\|f\|_{2d,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}=\sup_{|\alpha|\leqslant 2d,\ x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{2d}|\partial^\alpha f|.$$

因此

$$\left\langle\sum_{j<0}\dot{\Delta}_j u,f\right\rangle\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\|f\|_{2d,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.24}$$

对于高频部分 $j\geqslant 0$, 利用物理空间中表示公式

$$u=\sum_{|\alpha|=k}g_\alpha*\partial^\alpha u,\quad g_\alpha=\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{(i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2k}}\hat{\varphi}(\xi)\Big),\quad \hat{\varphi}(\xi)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})\text{且在 }\mathscr{C}\text{ 附近是1}.$$

用 $\dot{\Delta}_j u$ 代替 u, $\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$ 代替 $\hat{\varphi}(\xi)$, 可以看出

$$\dot{\Delta}_j u=2^{-jk}\sum_{|\alpha|=k}\partial^\alpha(2^{jd}g_\alpha(2^j\cdot)*\dot{\Delta}_j u). \tag{2.25}$$

因此, 对于任意的 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\begin{aligned}\langle \dot{\Delta}_j u, f\rangle &= 2^{-jk} \sum_{|\alpha|=k} \langle \partial^\alpha (2^{jd} g_\alpha(2^j \cdot) * \dot{\Delta}_j u), f\rangle \\ &= 2^{-jk} \sum_{|\alpha|=k} \langle \dot{\Delta}_j u,\ 2^{jd} g_\alpha(-2^j \cdot) * (-\partial)^\alpha f\rangle \\ &\leqslant \|\dot{\Delta}_j u\|_{L^\infty} 2^{-jk} \|f\|_{M_k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)},\end{aligned} \tag{2.26}$$

这里 $M_k \geqslant 2d$ 是充分大的数. 由 $\dot{B}^s_{p,r}$ 的定义与基本嵌入关系, 可见

$$\langle \dot{\Delta}_j u, f\rangle \leqslant C 2^{j(\frac{d}{p}-s-k)} \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|f\|_{M_k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.27}$$

今取 $k > \dfrac{d}{p} - s$, $M_k = 2d + [k] + 1$ 及 $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$, 那么

$$\begin{aligned}\langle u, f\rangle \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle \dot{\Delta}_j u, f\rangle &\leqslant C\Big[\sum_{j<0} 2^{j(\frac{d}{p}-s)} + \sum_{j\geqslant 0} 2^{j(\frac{d}{p}-s-k)}\Big] \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|f\|_{M_k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|f\|_{M_k, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

因此, $\dot{B}^s_{p,r} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

第二步. 证明完备性. 设 $\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是 $\dot{B}^s_{p,r}$ 中的 Cauchy 列, 其中 $s < \dfrac{d}{p}$ 或 $s = \dfrac{d}{p}, r = 1$. 将 $u_\ell - u_k$ 代入 (2.22) 或 (2.28) 可见, 存在 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 使得

$$u_\ell \xrightarrow{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad \ell \longrightarrow \infty.$$

下面来证 $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$.

情形 1. $s < \dfrac{d}{p}$. 对 $\forall \ell, u_\ell \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$. 由估计 (2.23) 及推导方法, 可以看出

$$\begin{aligned}\big|\langle \dot{S}_j u_\ell, f\rangle\big| &\leqslant \sum_{k<j} \big|\langle \dot{\Delta}_k u_\ell, f\rangle\big| \leqslant \sum_{k<j} \|\dot{\Delta}_k u_\ell\|_\infty \|f\|_1 \\ &\leqslant C \sum_{k<j} 2^{k(\frac{d}{p}-s)} \|u_\ell\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|f\|_{M,\mathcal{S}} \\ &\leqslant C_s 2^{j(\frac{d}{p}-s)} \|u_\ell\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|f\|_{M,\mathcal{S}}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

由于 $u_\ell \xrightarrow{\mathcal{S}'} u$, 在 (2.29) 两边取 $\ell \longrightarrow \infty$, 可见

$$\big|\langle \dot{S}_j u, f\rangle\big| \leqslant C_s 2^{j(\frac{d}{p}-s)} \sup_l \|u_\ell\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|f\|_{M,\mathcal{S}}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{2.30}$$

因此

$$\lim_{j\to-\infty} \dot{S}_j u = 0 \Longrightarrow u \in \mathcal{S}'_h.$$

情形 2. $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$. 设 $\{u_\ell\}$ 是 $\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1} \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,1}$ 的 Cauchy 列, 则对于任意正数 $\varepsilon > 0$, $\exists \ell_0$ 使得对 $\forall j \in \mathbb{Z}$, 及 $\ell \geqslant \ell_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k<j} \|\dot{\Delta}_k u_\ell\|_\infty &\leqslant \sum_{k<j} \|\dot{\Delta}_k (u_\ell - u_{\ell_0})\|_\infty + \sum_{k<j} \|\dot{\Delta}_k u_{\ell_0}\|_\infty \\ &\leqslant \|u_\ell - u_{\ell_0}\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} + \sum_{k\leqslant j} \|\dot{\Delta}_k u_{\ell_0}\|_\infty \\ &\leqslant \varepsilon/2 + \sum_{k\leqslant j} \|\dot{\Delta}_k u_{\ell_0}\|_\infty. \end{aligned} \tag{2.31}$$

选取 j_0 充分小 (绝对值充分大), 使得

$$\sum_{k<j} \|\dot{\Delta}_k u_{\ell_0}\|_\infty < \varepsilon/2, \quad \forall j \leqslant j_0. \tag{2.32}$$

综合上面两式容易推出: 对于 $u_\ell \in \mathcal{S}'_h$, 有 $\forall j \leqslant j_0$, $\forall \ell \geqslant \ell_0$, 成立

$$\|\dot{S}_j u_\ell\|_\infty \leqslant \sum_{k<j} \|\dot{\Delta}_k u_\ell\|_\infty < \varepsilon/2 + \sum_{k\leqslant j} \|\dot{\Delta}_k u_{\ell_0}\|_\infty < \varepsilon. \tag{2.33}$$

因为

$$\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1} \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty,$$

$\{u_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 亦是 L^∞ 中的 Cauchy 列, 记

$$u_\ell \longrightarrow u \in L^\infty, \quad \ell \longrightarrow \infty.$$

因此, 在 (2.33) 中取 $\ell \to \infty$, 就可推出

$$\|\dot{S}_j u\|_\infty \leqslant \varepsilon, \quad \forall j \leqslant j_0. \tag{2.34}$$

这恰好说明 $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$.

情形 3. 由 $\dot{B}^s_{p,r}$ 的定义可见, 对任意固定 j, $\{\dot{\Delta}_j u^{(\ell)}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 均是 L^p 中的 Cauchy 列. 由 L^p 的完备性, 存在 u_j 使得

$$\lim_{\ell\to\infty} \|\dot{\Delta}_j u^{(\ell)} - u_j\|_p = 0. \tag{2.35}$$

又

$$u^{(\ell)} \xrightarrow{\mathcal{S}'} u, \qquad \ell \to \infty, \tag{2.36}$$

因此

$$\dot{\Delta}_j u^{(\ell)} \xrightarrow{\text{a.e.}} \dot{\Delta}_j u, \qquad \ell \to \infty, \tag{2.37}$$

从而推出 $u_j = \dot{\Delta}_j u$. 现定义

$$a_j^{(\ell)} = 2^{js} \|\dot{\Delta}_j u^{(\ell)}\|_p, \quad a_j = 2^{js} \|\dot{\Delta}_j u\|_p, \tag{2.38}$$

由 (2.35)~(2.37) 可以推出

$$\lim_{\ell\to\infty} a_j^{(\ell)} = a_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{2.39}$$

对于 $\ell \in \mathbb{N}$, 数列 $\{a_j^{(\ell)}\}$ 是 $l^r(\mathbb{Z})$ 上的有界列, 从而 $\{a_j\}$ 也是 $l^r(\mathbb{Z})$ 上的有界列. 这说明 $u \in \dot{B}^s_{p,r}$.

另一方面, 对于任意给定的 $J_0 > 0$, 由于 $\{\Delta_j u^{(\ell)}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $\Delta_j u$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \ell_0 > 0$ 使得当 $\ell \geqslant \ell_0$ 时, 有

$$\left(\sum_{|j|\leqslant J_0} \left(2^{js}\|\Delta_j(u^{(\ell)} - u)\|_p\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{|j|\leqslant J_0} \left(2^{js}\|\Delta_j(u^{(\ell)} - u^{(m)})\|_p\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.40}$$

注意到 $\{u^\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 是 $\dot{B}^s_{p,r}$ 中的 Cauchy 列, 因此存在不依赖于 J_0 的 ℓ_0, 使得对于所有的 $\ell > \ell_0$, 都有

$$\left(\sum_{|j|\leqslant J_0} \left(2^{js}\|\Delta_j(u^{(\ell)} - u)\|_p\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \varepsilon. \tag{2.41}$$

最后, 令 J_0 趋向于 ∞, 就完成了定理 2.7 的证明. □

注记 2.1　当 $s > \frac{d}{p}$ 或 $s = \frac{d}{p}$, $r > 1$ 时, $\dot{B}^s_{p,r}$ 不是 Banach 空间. 例如, 取 $d = 1$, 定义序列

$$\hat{f}_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\chi_0(\xi)}{\xi \log|\xi|}, & |\xi| \geqslant 2^{-n}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

这里 $\chi_0(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^0)$ 满足 $\chi_0(\xi) = 1$, $|\xi| < \frac{3}{4}$, 且 $\mathrm{supp}\chi_0(\xi) = B_{\frac{4}{5}}(0)$, 直接验证

$$\hat{f}_n - \hat{f}_m = \begin{cases} 0, & |\xi| \geqslant 2^{-m}, \\ \dfrac{\chi_0(\xi)}{\xi\log|\xi|}, & 2^{-n} < |\xi| < 2^{-m}, \\ 0, & |\xi| \leqslant 2^{-n}. \end{cases}$$

因此

$$\|f_n - f_m\|_{\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,\infty}} \longrightarrow 0.$$

然而

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \notin \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,\infty}.$$

事实上, 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\xi) = \frac{\chi_0(\xi)}{\xi\log|\xi|}, \qquad \forall \xi > 0$$

在原点附近是不可积的, 因此

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\chi_0(\xi)}{\xi\log|\xi|}\right]\notin \mathcal{S}_h'(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\chi_0(\xi)}{\xi\log|\xi|}\right]\notin \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{2,\infty}.$$

1. 齐次 Besov 空间范数定义的良定性

先建立一个齐次 Besov 范数的控制引理, 借此就可以证明齐次 Besov 空间范数定义的良定性.

引理 2.8 设 $\mathscr{C}'$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的环, $s<\dfrac{d}{p}, 1\leqslant p,r\leqslant\infty$ 或 $s=\dfrac{d}{p}, r=1$. $\{u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一串光滑函数序列满足

$$\operatorname{supp}\hat{u}_j\subset 2^j\mathscr{C}',\quad \left\|\{2^{js}\|u_j\|_p\}_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{l^r}<\infty. \tag{2.42}$$

则

$$u\triangleq\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j\in\dot{B}^s_{p,r} \tag{2.43}$$

并且

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\leqslant C_s\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{rsj}\|u_j\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.44}$$

证明 第一步. 对于低频部分 $\{u_j\}_{j\leqslant 0}$, 利用 Bernstein 估计可见

$$\|u_j\|_\infty\leqslant 2^{\frac{d}{p}j}\|u_j\|_p,$$

因此

$$\sum_{j\leqslant 0}\|u_j\|_\infty\leqslant\sum_{j\leqslant 0}2^{(\frac{d}{p}-s)j}(2^{js}\|u_j\|_p)<\infty.$$

利用正交性, 存在常数 $N_0>0$, 使得

$$u^-=\sum_{j\leqslant 0}u_j$$

满足

$$\|\dot{S}_ju^-\|_\infty\leqslant\sum_{\ell\leqslant 0}\|\dot{S}_ju_\ell\|_\infty=\sum_{\ell<j+N_0}\|u_\ell\|_\infty\longrightarrow 0,\quad j\longrightarrow-\infty.$$

因此, 利用 $L^\infty\hookrightarrow\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 就可以推出对于 $\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\langle\dot{S}_ju^-,f\rangle\longrightarrow 0,\quad j\longrightarrow-\infty.$$

于是

$$\lim_{j\to-\infty}\dot{S}_ju^-\overset{\mathcal{S}'}{=\!=}0,\quad 即\ u^-\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d).$$



第二步. 由 Bernstein 估计, 可见

$$\|u_j\|_\infty \leqslant C2^{j(\frac{d}{p}-s)}\sup_{j\in\mathbb{Z}}(2^{js}\|u_j\|_p) \leqslant C2^{j(\frac{d}{p}-s)}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{rsj}\|u_j\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant C2^{j(\frac{d}{p}-s)},$$

因此, 由命题 1.4, 级数 $\{u_j\}_{j\geqslant 0}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 中收敛, 记

$$u^+ = \sum_{j>0} u_j.$$

直接验算, $\operatorname{supp}\widehat{u^+} \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\xi : |\xi| < \operatorname{dist}(0,\mathscr{C}')\}$. 从而推出 $u^+ \in \mathcal{S}_h'$. 结合第一步的结论就得

$$u = u^+ + u^- \in \mathcal{S}_h'. \tag{2.45}$$

第三步. 设 $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ 是中心相同的两个不同的环, 则当 $\exists N_0$ 使得 $|j'-j| \geqslant N_0$, 就有

$$2^j\mathscr{C} \cap 2^{j'}\mathscr{C}' = \varnothing \quad (\mathscr{C}\text{ 就是定义中出现的环}). \tag{2.46}$$

此意味着如下的正交性

$$\dot{\Delta}_{j'}u_j = 0, \quad |j-j'| \geqslant N_0. \tag{2.47}$$

因此

$$\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p = \Big\|\sum_{|j-j'|\leqslant N_0}\dot{\Delta}_{j'}u_j\Big\|_p \leqslant C\sum_{|j-j'|\leqslant N_0}\|u_j\|_p, \tag{2.48}$$

于是

$$2^{j's}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p \leqslant C\sum_{|j-j'|\leqslant N_0}2^{j's}\|u_j\|_p \leqslant C\sum_{|j-j'|\leqslant N_0}2^{(j'-j)s}2^{js}\|u_j\|_p. \tag{2.49}$$

令

$$c_k = I_{[-N_0,N_0]}(k)2^{ks}, \qquad d_l = I_{\mathbb{N}}(\ell)2^{s\ell}\|u_\ell\|_p,$$

则 (2.49) 可以改写成卷积形式

$$2^{j's}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p \leqslant (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} * (d_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}, \tag{2.50}$$

两边取 l^r 范数, 采用离散的 Young 不等式, 可得

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant C\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsr}\|u_j\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}, \quad C \sim N_0+1. \tag{2.51}$$

□

推论 2.9 设 s,p,r 同引理 2.8 的条件, 则在等价的意义下 Besov 空间的范数不依赖于 χ 与 $\hat{\varphi}(\xi)$ 的选取, 即

$$\boxed{\begin{array}{llll} \dot{B}^s_{p,r}: & \mathscr{C}, & \hat{\varphi}(\xi), & \chi(\xi) \stackrel{\Delta}{\Longrightarrow} \|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \\ \dot{B}^s_{p,r}: & \mathscr{C}_1, & \hat{\varphi}_1(\xi), & \chi_1(\xi) \stackrel{\Delta}{\Longrightarrow} \|\cdot\tilde{\|}_{\dot{B}^s_{p,r}} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \lesssim \|\cdot\tilde{\|}_{\dot{B}^s_{p,r}} \\ \|\cdot\tilde{\|}_{\dot{B}^s_{p,r}} \lesssim \|\cdot\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \end{array}}$$

其中引理 2.8 与推论 2.9 要求 $\dot{B}^s_{p,r}$ 是 Banach 空间是确保所定义级数的收敛元属于 $\dot{B}^s_{p,r}$.

定理 2.10 (齐次 Besov 空间中的 Sobolev 嵌入定理) 设

$$1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty, \quad 1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \infty, \quad s \in \mathbb{R}.$$

则

$$\dot{B}^s_{p_1,r_1} \hookrightarrow \dot{B}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}. \tag{2.52}$$

证明 由 Bernstein 估计

$$\|\dot{\Delta}_j u\|_{p_2} \leqslant C2^{jd(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}\|\dot{\Delta}_j u\|_{p_1},$$

直接推出

$$2^{js-jd(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}\|\dot{\Delta}_j u\|_{p_2} \leqslant 2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_{p_1}.$$

两边求 l^{r_2} 范数, 并使用嵌入关系 $l^{r_1}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow l^{r_2}(\mathbb{Z})$ 就得

$$\|u\|_{\dot{B}^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p_1,r_2}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p_1,r_1}}.$$ □

定理 2.11 设 $\sigma(\xi)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 光滑、齐次度是 m 的齐次函数. 设 $s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, 并且满足 $\dot{B}^{s-m}_{p,r}$ 是一个 Banach 空间, 则 $\sigma(D): \dot{B}^s_{p,r} \mapsto \dot{B}^{s-m}_{p,r}$ 是连续的映射.

证明 $\dot{B}^{s-m}_{p,r}$ 是一个 Banach 空间就意味着条件

$$s - m < \frac{d}{p} \quad \text{或} \quad s - m = \frac{d}{p},\ r = 1.$$

由乘子型的 Bernstein 估计

$$\|\sigma(D)\dot{\Delta}_j u\|_p = \|\sigma(D)\dot{\tilde{\Delta}}_j\dot{\Delta}_j u\|_p = 2^{mj}\|[\tilde{\varphi}\sigma](2^{-j}D)\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant C2^{jm}\|\dot{\Delta}_j u\|_p,$$

容易看出

$$\|\sigma(D)u\|_{\dot{B}^{s-m}_{p,r}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.53}$$

因此, 问题就归结于证明 $\sigma(D)u \in S'_h(\mathbb{R}^d)$.

情形 1. $r > 1$ 的情形.

$$\begin{aligned} \dot{S}_j\sigma(D)u &= \sum_{j' \leqslant j-1} \sigma(D)\dot{\Delta}_{j'}u = \sum_{j' \leqslant j-1} \dot{\tilde{\Delta}}_{j'}\sigma(D)\dot{\Delta}_{j'}u \\ &= \sum_{j' \leqslant j} 2^{mj'}[\tilde{\varphi}\sigma](2^{-j'}D)\dot{\Delta}_{j'}u. \end{aligned} \tag{2.54}$$

因此

$$\|\dot{S}_j\sigma(D)u\|_\infty \lesssim \sum_{j'\leqslant j} 2^{j'(\frac{d}{p}+m-s)}2^{j's}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p \lesssim 2^{j(\frac{d}{p}+m-s)}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}. \tag{2.55}$$

由于 $\frac{d}{p}+m-s>0$ 及 (2.55) 就得

$$\lim_{j\to-\infty}\dot{S}_j\sigma(D)u=0 \Longrightarrow \sigma(D)u\in S'_h(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \sigma(D)u\in \dot{B}^{s-m}_{p,r}.$$

情形 2. $s=m+\frac{d}{p}$, $r=1$ 的情形. 从估计

$$\begin{aligned}\|\dot{S}_j\sigma(D)u\|_\infty &\lesssim \sum_{j'\leqslant j} 2^{j'(\frac{d}{p}+m-s)}2^{j's}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p\\ &\lesssim \sum_{j'\leqslant j} 2^{j's}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p \longrightarrow 0,\quad j\longrightarrow -\infty,\end{aligned}$$

就能推出

$$\lim_{j\to-\infty}\dot{S}_j\sigma(D)u=0,\qquad 即\ \sigma(D)u\in S'_h(\mathbb{R}^d).$$

因此, $\sigma(D)u\in \dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}$. □

2. 齐次 Besov 空间的等价刻画及应用

下面讨论涉及 Fourier 频率局部化技术的刻画、Gauss 刻画及差分刻画.

定理 2.12　*设 $s>0$, $p,r\in[1,\infty]$. 存在 $C>0$ 满足如下性质: 对于 $u\in S'_h(\mathbb{R}^d)$, 有*

$$C^{-1}\|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}} \leqslant \big\|\, \|t^s e^{t\Delta}u\|_p \,\big\|_{L^r(\mathbb{R}^+,\frac{dt}{t})} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}, \tag{2.56}$$

这里

$$\|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}} \triangleq \big\|\, \|t^s e^{t\Delta}u\|_p \,\big\|_{L^r(\mathbb{R}^+,\frac{dt}{t})} = \left(\int_0^\infty t^{sr}\|e^{t\Delta}u\|_p^r\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

特别, 当 $r=\infty$ 时, 有

$$\sup_t t^s\|e^{t\Delta}u\|_p = \|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,\infty}}.$$

证明　第一步. 由半群的局部化命题 1.5, 可见

$$\|t^s\dot{\Delta}_j e^{t\Delta}u\|_p \leqslant Ct^s 2^{2js}e^{-ct2^{2j}}2^{-2js}\|\dot{\Delta}_j u\|_p. \tag{2.57}$$

注意到 $u\in S'_h(\mathbb{R}^d)$ 与齐次 Besov 空间的范数定义, 可见

$$\|t^s e^{t\Delta}u\|_p \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\|t^s\dot{\Delta}_j e^{t\Delta}u\|_p$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}}\left(\frac{2^{-2js}\|\dot{\Delta}_j u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}}\right)\\
&=: C\|u\|_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} c_{r,j},
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

这里 $\{c_{r,j}\}_j \in l^r$ 且 $\|\{c_{r,j}\}_j\|_{l^r} = 1$.

情形 1. $r=\infty$. (2.56) 的第二个不等式可以直接从下面引理推得.

引理 2.13 设 $s>0$, 则

$$
\sup_{t>0}\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} < \infty. \tag{2.59}
$$

事实上, 利用积分的定义, 容易看出

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} &= \int_{-\infty}^{\infty} t^s 2^{2\ell s} e^{-ct2^{2\ell}} d\ell \qquad \left(\lambda = 2^{2\ell},\ d\ell = \frac{d\lambda}{2\lambda \log 2}\right)\\
&= \int_0^\infty t^s \lambda^s e^{-ct\lambda}\frac{d\lambda}{(2\log 2)\ \lambda} = \frac{1}{2\log 2}\int_0^\infty \tau^s e^{-c\tau}\frac{d\tau}{\tau}\\
&= \frac{1}{2c^s\log 2}\int_0^\infty \tau^{s-1}e^{-\tau}d\tau = \frac{\Gamma(s)}{2c^s\log 2}.
\end{aligned}
$$

情形 2. $r<\infty$. 对离散和式采用加权的 Hölder 不等式 (具权函数 $2^{2js}e^{-ct2^{2j}}t^s$)、式 (2.59) 与 Fubini 定理可见

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{rs}\|e^{t\Delta}u\|_p^r\frac{dt}{t} &\leqslant C\|u\|^r_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}\int_0^\infty\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} c_{r,j}\right)^r\frac{dt}{t}\\
&\leqslant C\|u\|^r_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}\int_0^\infty\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}}\right)^{r-1}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} c^r_{r,j}\right)\frac{dt}{t}\\
&\leqslant C\|u\|^r_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}\int_0^\infty \sum_{j\in\mathbb{Z}} t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}} c^r_{r,j}\frac{dt}{t}\\
&\leqslant C\|u\|^r_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c^r_{r,j}\int_0^\infty t^s 2^{2js} e^{-ct2^{2j}}\frac{dt}{t}\\
&\leqslant c^{-s}C_s\|u\|^r_{\dot{B}^{-2s}_{p,r}}, \qquad C_s := \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt.
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

第二步. 由于

$$
C_{s+1} = \int_0^\infty t^s e^{-t}dt \Longleftrightarrow 1 = C_{s+1}^{-1}\int_0^\infty (|\xi|^2 t)^s e^{-|\xi|^2 t} d|\xi|^2 t,
$$

两边同乘以 $\hat{\varphi}_j(\xi)\hat{u}(\xi)$, 可见

$$
\hat{\varphi}_j(\xi)\hat{u}(\xi) = C_{s+1}^{-1}\int_0^\infty t^s(|\xi|^2)^{s+1}e^{-|\xi|^2 t}\hat{\varphi}_j(\xi)\hat{u}(\xi)dt.
$$

返回到物理空间, 就有表达式

$$\dot{\Delta}_j u = C_{s+1}^{-1} \int_0^\infty t^s (-\Delta)^{s+1} e^{t\Delta} \dot{\Delta}_j u dt. \tag{2.61}$$

采用 $e^{t\Delta}u = e^{t/2\Delta}e^{t/2\Delta}u$ 及 Fourier 局部化技术

$$\begin{aligned} \|\dot{\Delta}_j u\|_p &\leqslant C \int_0^\infty t^s 2^{2j(s+1)} e^{-c\frac{t}{2}2^{2j}} \|\dot{\Delta}_j e^{\frac{t}{2}\Delta} u\|_p dt \\ &\leqslant 2^{1+s} C \int_0^\infty t^s 2^{2j(s+1)} e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta} u\|_p dt. \end{aligned} \tag{2.62}$$

情形 1. $r = \infty$.

$$\|\dot{\Delta}_j u\|_p \lesssim \sup_{t>0} (t^s \|e^{t\Delta} u\|_p) \int_0^\infty 2^{2j(s+1)} e^{-ct2^{2j}} dt \lesssim 2^{2js} \sup_{t>0} (t^s \|e^{t\Delta} u\|_p),$$

因此

$$\sup_j 2^{-2js} \|\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant C \sup_{t>0} (t^s \|e^{t\Delta} u\|_p), \tag{2.63}$$

此即 (2.56) 的第一个不等式.

情形 2. $r < \infty$. 利用估计 (2.62) 及范数定义

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-2jsr} \|\dot{\Delta}_j u\|_p^r \lesssim \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2jr} \left(\int_0^\infty t^s e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta} u\|_p dt \right)^r. \tag{2.64}$$

采用加权的 Hölder 不等式, 可见

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty t^s e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta} u\|_p dt \right)^r &\leqslant \left(\int_0^\infty e^{-ct2^{2j}} dt \right)^{r-1} \int_0^\infty t^{rs} e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta} u\|_p^r dt \\ &\leqslant C 2^{-2j(r-1)} \int_0^\infty t^{rs} e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta} u\|_p^r dt. \end{aligned} \tag{2.65}$$

将 (2.65) 代入 (2.64), 并用到 (2.59) 及 Fubini 定理, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-2rsj} \|\dot{\Delta}_j u\|_p^r &\leqslant C \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{2j} \int_0^\infty t^{rs} e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta} u\|_p^r dt \\ &\leqslant C \int_0^\infty \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} t 2^{2j} e^{-ct2^{2j}} \right) t^{rs} \|e^{t\Delta} u\|_p^r \frac{dt}{t} \\ &\leqslant C \int_0^\infty (t^s \|e^{t\Delta} u\|_p)^r \frac{dt}{t}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

两边开 r 次幂, 就得 (2.58) 的第一个不等式. □

3. Besov 空间的差分刻画

仅需处理 $s \in (0,1)$ 这一基本情形. 事实上, 如果 $s > 1$ 但不是整数, 则 $\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} := \|D^{[s]}u\|_{\dot{B}^{s-[s]}_{p,r}}$.

定理 2.14 设 $s \in (0,1)$, $p, r \in [1,\infty]$, 存在常数 C, 使得对任意 $u \in \mathcal{S}'_h(\mathbb{R}^d)$, 有

$$C^{-1}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant \left\| \frac{\|\tau_{-z}u - u\|_p}{|z|^s} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^d, \frac{dz}{|z|^d})} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \tag{2.67}$$

这里 $\tau_z u = u(x-z) - u(x)$.

注记 2.2 写成我们熟悉的形式, 就是

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\|\tau_{-z}u - u\|_p}{|z|^s} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^d, \frac{dz}{|z|^d})} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |z|^{-sr} \|\tau_{-z}u - u\|_p^r \frac{dz}{|z|^d} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (\text{直角坐标形式}) \\ &\cong \left(\int_0^\infty \rho^{-sr} \sup_{|z|\leqslant\rho} \|\tau_{-z}u - u\|_p^r \frac{d\rho}{\rho} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (\text{极坐标形式}). \end{aligned} \tag{2.68}$$

证明 第一步. 先考察 $\|\tau_{-z}\dot{\Delta}_j u - \dot{\Delta}_j u\|_p$. 由 $\dot{\Delta}_j$ 的定义

$$\begin{aligned} \tau_{-z}\dot{\Delta}_j u - \dot{\Delta}_j u &= \int_{\mathbb{R}^d} 2^{jd}[\varphi(2^j(x+z-y)) - \varphi(2^j(x-y))]u(y)dy \\ &= 2^{jd}\sum_{\ell=1}^d 2^j z_\ell \Big(\int_0^1 \varphi_{\ell,j}(2^j\cdot, tz)dt * u \Big), \end{aligned} \tag{2.69}$$

其中

$$\varphi_{\ell,j}(X,z) = \partial_{x_\ell}\varphi(X + 2^j z). \tag{2.70}$$

注意到

$$\operatorname{supp} \widehat{\varphi_{l,j}(\cdot,z)} \subset \mathscr{C}, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^d.$$

由 $\dot{\Delta}_j \tilde{\dot{\Delta}}_j = \dot{\Delta}_j$, 在 (2.69) 的右边 $u(y)$ 可以换成

$$\tilde{\dot{\Delta}}_j u(y) \Longrightarrow \tau_{-z}\dot{\Delta}_j u - \dot{\Delta}_j u = 2^{jd}\sum_{\ell=1}^d \sum_{|j-j'|\leqslant 1} 2^j z_\ell \int_0^1 \varphi_{\ell,j}(2^j\cdot, tz)dt * \dot{\Delta}_{j'} u. \tag{2.71}$$

本质上这里使用了 Newton-Leibniz 公式

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+th)dt = \int_0^1 h\cdot\nabla f(x+th)dt.$$

对任意 z, 由于 L^p 模数的平移不变性,

$$\|\varphi_{\ell,j}(\cdot,z)\|_{L^1} = \|\partial_{x_\ell}\varphi\|_{L^1} \Longleftrightarrow 2^{jd}\|\varphi_{\ell,j}(2^j\cdot,z)\|_{L^1} = \|\partial_{x_\ell}\varphi\|_{L^1}.$$

故

$$\|\tau_{-z}\dot{\Delta}_j u-\dot{\Delta}_j u\|_p \lesssim 2^j|z|\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\|\dot{\Delta}_{j'}u\|_p \lesssim 2^{j(1-s)}|z|c_{r,j}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \tag{2.72}$$

这里

$$c_{r,j}=\frac{2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}. \tag{2.73}$$

另一方面

$$\|\tau_{-z}\dot{\Delta}_j u-\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant 2\|\dot{\Delta}_j u\|_p \lesssim c_{r,j}2^{-js}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.74}$$

$\forall j'\in\mathbb{Z}$, 利用分频技术来进行估计 (要充分理解处理高低频的技术):

$$\|\tau_{-z}u-u\|_p \lesssim \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\left(|z|\sum_{j\leqslant j'}c_{r,j}2^{j(1-s)}+\sum_{j\geqslant j'}2^{-js}c_{r,j}\right). \tag{2.75}$$

现选取 $j'=j_z$ 使得 $\dfrac{1}{|z|}\leqslant 2^{j_z}<\dfrac{2}{|z|}$.

情形 1. $r=\infty$. 对于任意的 $z\in\mathbb{R}^d$, 有

$$\|\tau_{-z}u-u\|_p \lesssim \|u\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}(|z|2^{j_z(1-s)}+2^{-j_z s}) \lesssim |z|^s\|u\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}}. \tag{2.76}$$

情形 2. $r<\infty$. 按定义写成

$$\left\|\frac{\|\tau_{-z}u-u\|_p}{|z|^s}\right\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d,\frac{dz}{|z|^d})} \lesssim 2^r\|u\|^r_{\dot{B}^s_{p,r}}(I_1+I_2), \tag{2.77}$$

这里

$$I_1:=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{j\leqslant j_z}c_{r,j}2^{(1-s)j}\right)^r|z|^{-d+r(1-s)}dz, \tag{2.78}$$

$$I_2:=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sum_{j>j_z}c_{r,j}2^{-sj}\right)^r|z|^{-d-rs}dz. \tag{2.79}$$

采用带权 $2^{j(1-s)}$ 的 Hölder 不等式, 并注意使用 j_z 的定义, 容易看出

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j\leqslant j_z}c_{r,j}2^{(1-s)j}\right)^r &\leqslant \left(\sum_{j\leqslant j_z}2^{(1-s)j}\right)^{r-1}\sum_{j\leqslant j_z}c^r_{r,j}2^{(1-s)j}\\ &\lesssim |z|^{-(1-s)(r-1)}\sum_{j\leqslant j_z}c^r_{r,j}2^{(1-s)j}.\end{aligned}$$

注意到

$$j\leqslant j_z \Longleftrightarrow 2^j\leqslant 2^{j_z}\leqslant\frac{2}{|z|}\Longleftrightarrow |z|\leqslant 2^{-j+1}.$$

采用 Fubini 定理, 直接计算

$$
\begin{aligned}
I_1 &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j\leqslant j_z} c_{r,j}^r 2^{j(1-s)} |z|^{-d+1-s} dz \\
&\lesssim \sum_j \Big(\int_{B_{2^{-j+1}}(0)} |z|^{-d+1-s} dz \Big) 2^{j(1-s)} c_{r,j}^r \\
&\lesssim \sum_j 2^{-(1-s)(j-1)} 2^{j(1-s)} c_{r,j}^r \\
&\lesssim \sum_j 2^{1-s} c_{r,j}^r < \infty.
\end{aligned} \tag{2.80}
$$

类似地

$$
j \geqslant j_z \Longleftrightarrow 2^j \geqslant 2^{j_z} \geqslant \frac{1}{|z|} \Longleftrightarrow |z| \geqslant 2^{-j},
$$

及

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{j\geqslant j_z} c_{r,j} 2^{-js} \Big)^r &\leqslant \Big(\sum_{j\geqslant j_z} 2^{-js} \Big)^{r-1} \sum_{j\geqslant j_z} c_{r,j}^r 2^{-js} \\
&\lesssim 2^{-j_z s(r-1)} \sum_{j\geqslant j_z} c_{r,j}^r 2^{-js} \\
&\lesssim |z|^{s(r-1)} \sum_{j\geqslant j_z} c_{r,j}^r 2^{-js}.
\end{aligned}
$$

采用 Fubini 定理, 得

$$
\begin{aligned}
I_2 &\lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j\leqslant j_z} c_{rj}^r 2^{-js} |z|^{-d-s} dz \lesssim \sum_j \Big(\int_{B_{2^{-j}}^c(0)} |z|^{-d-s} dz \Big) 2^{-js} c_{r,j}^r \\
&\lesssim \sum_j 2^{sj} 2^{-js} c_{r,j}^r \lesssim \sum_j c_{r,j}^r < \infty.
\end{aligned} \tag{2.81}
$$

将 (2.80), (2.81) 代入 (2.77), 两边开方就得估计 (2.67) 的右边不等式.

第二步. 下面证明 (2.67) 左边的不等式. 注意到 $\varphi(x)$ 消失性, 即

$$
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 0.
$$

容易看出

$$
\begin{aligned}
\dot{\Delta}_j u(x) &= 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y) \tau_y u(x) dy \quad (\text{卷积定义}, \tau_y u = u(x-y)) \\
&= 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j y)(\tau_y u(x) - u(x)) dy.
\end{aligned} \tag{2.82}
$$

情形 1. $r = \infty$. 直接验算

$$
2^{js} \|\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} 2^{js} |\varphi(2^j y)| \|\tau_y u - u\|_p dy
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} 2^{js}|y|^s|\varphi(2^j y)|dy \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \frac{\|\tau_y u - u\|_p}{|y|^s} \\
&\leqslant C \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \frac{\|\tau_y u - u\|_p}{|y|^s},
\end{aligned} \tag{2.83}
$$

两边关于 j 取上确界就得 $r=\infty$ 的情形的证明.

情形 2. $r<\infty$. 利用 $(a+b)^r \leqslant 2^r(a^r+b^r)$, 可见

$$
\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r \leqslant 2^r\left(\sum_1 + \sum_2\right), \tag{2.84}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\displaystyle\sum_1 := \sum_j 2^{jsr}\left(\int_{2^j|y|\leqslant 1} 2^{jd}|\varphi(2^j y)|\|\tau_y u - u\|_p dy\right)^r, \\
\displaystyle\sum_2 := \sum_j 2^{jsr}\left(\int_{2^j|y|\geqslant 1} 2^{jd}|\varphi(2^j y)|\|\tau_y u - u\|_p dy\right)^r.
\end{cases} \tag{2.85}
$$

采用 Hölder 不等式, 小尺度部分的估计如下:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{2^j|y|\leqslant 1} 2^{jd}|\varphi(2^j y)|\|\tau_y u - u\|_p dy\right)^r \\
&\leqslant \left(\int_{2^j|y|\leqslant 1} 2^{jdr'}|\varphi(2^j y)|^{r'} dy\right)^{r-1} \int_{2^j|y|\leqslant 1} \|\tau_y u - u\|_p^r dy \\
&\leqslant \left(\int_{2^j|y|\leqslant 1} |\varphi(2^j y)|^{r'} d2^j y\right)^{r-1} \cdot 2^{jd(r'-1)(r-1)} \cdot \int_{2^j|y|\leqslant 1} \|\tau_y u - u\|_p^r dy \\
&\leqslant 2^{jd} C \int_{2^j|y|\leqslant 1} \|\tau_y u - u\|_p^r dy.
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

采用 Fubini 定理, 可见

$$
\sum_1 \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{2^j|y|\leqslant 1} 2^{j(rs+d)}\|\tau_y u - u\|_p^r dy \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|\tau_y u - u\|_p^r}{|y|^{rs}} \frac{dy}{|y|^d}. \tag{2.87}
$$

下面考虑 $\sum_2$ 的估计. 对具有权函数的测度 $|y|^{-d}dy$ 采用 Hölder 不等式, 可见

$$
\begin{aligned}
\sum_2 \text{中的通项} &= 2^{-jr}\left(\int_{2^j|y|\geqslant 1} |2^j y|^{d+1}|\varphi(2^j y)| \frac{\|\tau_y u - u\|_p}{|y|} \frac{dy}{|y|^d}\right)^r \\
&\leqslant 2^{-jr} \int_{2^j|y|\geqslant 1} \frac{\|\tau_y u - u\|_p^r}{|y|^r} \frac{dy}{|y|^d} \left(\int_{2^j|y|\geqslant 1} |2^j y|^{(d+1)r'}|\varphi(2^j y)|^{r'} \frac{dy}{|y|^d}\right)^{r-1} \\
&\leqslant 2^{-jr} \int_{2^j|y|\geqslant 1} \frac{\|\tau_y u - u\|_p^r}{|y|^r} \frac{dy}{|y|^d} \|y^{d+1}\varphi(y)\|_{r'}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C2^{-jr}\int_{2^j|y|\geqslant 1}\frac{\|\tau_y u-u\|_p^r}{|y|^r}\frac{dy}{|y|^d}. \tag{2.88}$$

利用 Fubini 定理, 可以看出

$$\begin{aligned}\sum_2 &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\sum_{|2^j y|\geqslant 1}2^{-jr(1-s)}\Big)\frac{\|\tau_y u-u\|_p^r}{|y|^r}\frac{dy}{|y|^d}\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}|y|^{r(1-s)}\frac{\|\tau_y u-u\|_p^r}{|y|^r}\frac{dy}{|y|^d}\\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\|\tau_y u-u\|_p^r}{|y|^{sr}}\frac{dy}{|y|^d}.\end{aligned} \tag{2.89}$$

将 (2.87),(2.89) 代入 (2.84), 即得 (2.67) 式中左边的估计式. □

注记 2.3 (i) 认真的读者会发现, 这里给出的刻画没有涉及到整数阶的 Besov 空间的刻画. 事实上, 整数点对应的 Besov 空间需要二阶差分刻画 (其特殊情形就是 Zygmund 空间 $\mathscr{C}_*^\alpha$).

记

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{\ell=0}^m\binom{m}{\ell}(-1)^\ell f(x+(m-\ell)h),\quad m=1,2,\cdots, \tag{2.90}$$

则有如下结果: 设 $s\in(0,1]$, $p,r\in[1,\infty)$, 存在常数 C 使得对任意 $u\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d)$ 有

$$C^{-1}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\leqslant\left\|\frac{\|\Delta_z^2 u\|_p}{|z|^s}\right\|_{L^r(\mathbb{R}^d,\frac{dz}{|z|^d})}\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.91}$$

对任意 $s\geqslant 1$ 的实数, 通过形如

$$s=[s]^-+\{s\}^+,\quad 0<\{s\}^+\leqslant 1$$

的分解就可以刻画齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,r}$ $(s\geqslant 1)$.

(ii) 类似于频率空间中的估计原则, 在物理空间中小尺度部分 (高频) 采用积分的方法, 对于大尺度部分 (低频) 就要利用衰减性条件来进行估计.

4. 应用 1-精确的 Sobolev 不等式

众所周知, 我们有如下经典的插值公式:

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_\infty^{1-\theta}\|f\|_q^\theta,\quad \theta=\frac{q}{p},\quad 1\leqslant q<p<\infty.$$

这完全是由尺度变换决定的的插值公式. 下面采用分频技术及 L^p 空间的分布函数表示等建立如下的精确的 Sobolev 不等式.

定理 2.15 设 $1\leqslant q<p<\infty$, $\alpha>0$ 是实数. 存在常数 C 使得

$$\|f\|_p\leqslant C\|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}\|f\|^\theta_{\dot{B}^\beta_{q,q}},\quad \beta=\alpha\Big(\frac{p}{q}-1\Big),\quad \theta=\frac{q}{p}. \tag{2.92}$$

证明　采用 L^p-范数的分布函数表示公式

$$\|f\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m\{x \mid |f| > \lambda\} d\lambda, \tag{2.93}$$

现对 f 进行高低频分解

$$f = \dot{S}_j f + (I - \dot{S}_j) f. \tag{2.94}$$

由 $\|\cdot\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}\|\dot{S}_j f\|_\infty &\leqslant \sum_{k\leqslant j-1} \|\dot{\Delta}_k f\|_\infty \leqslant \sum_{k\leqslant j-1} 2^{k\alpha} 2^{-k\alpha} \|\dot{\Delta}_k f\|_\infty \\ &\leqslant \sum_{k\leqslant j-1} 2^{k\alpha} \|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}} \leqslant C 2^{j\alpha} \|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

不失一般性, 可设 $\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}} = 1$, 否则, 对 $\tilde{f} = \dfrac{f}{\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}}$ 来代替 f 进行估计即可.

考察

$$\Big\{x \mid |f| > \lambda\Big\} \subset \Big\{x \mid |\dot{S}_j f| > \frac{\lambda}{2}\Big\} \cup \Big\{x \mid |(I - \dot{S}_j) f| > \frac{\lambda}{2}\Big\}. \tag{2.96}$$

为了 (2.96) 右边的第一个集合是空集, 选取特殊的 j_λ 满足

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda}{4C}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant 2^{j_\lambda} \leqslant \Big(\frac{\lambda}{4C}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} \Longleftrightarrow 2^{j_\lambda \alpha} \in \Big[\frac{\lambda}{2^\alpha 4C}, \frac{\lambda}{4C}\Big]. \tag{2.97}$$

故 (2.96) 就等价于

$$\Big\{x \mid |f| > \lambda\Big\} \subset \Big\{x \mid |(I - \dot{S}_{j_\lambda}) f| > \frac{\lambda}{2}\Big\}. \tag{2.98}$$

采用 Chebyshev 不等式 $m\{x : |f| > \lambda\} \leqslant \lambda^{-q} \|f\|_q^q$, 直接计算就得

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p &\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m\Big\{x : |(I - \dot{S}_{j_\lambda}) f| > \frac{\lambda}{2}\Big\} d\lambda \\ &\leqslant p 2^q \int_0^\infty \lambda^{p-q-1} \|(I - \dot{S}_{j_\lambda}) f\|_q^q d\lambda. \end{aligned} \tag{2.99}$$

由半范数 $\|\cdot\|_{\dot{B}^\beta_{q,q}}$ 的定义, 直接估计

$$\begin{aligned}\|(I - \dot{S}_{j_\lambda}) f\|_q &\leqslant \sum_{j\geqslant j_\lambda} \|\dot{\Delta}_j f\|_q \leqslant \sum_{j\geqslant j_\lambda} 2^{-j\beta} 2^{j\beta} \|\dot{\Delta}_j f\|_q \\ &\leqslant C\|f\|_{\dot{B}^\beta_{q,q}} \sum_{j\geqslant j_\lambda} 2^{-j\beta} c_j, \quad c_j = \frac{2^{j\beta} \|\dot{\Delta}_j f\|_q}{\|f\|_{\dot{B}^\beta_{q,q}}}, \end{aligned} \tag{2.100}$$

于是

$$\|f\|_p^p \leqslant C\|f\|^q_{\dot{B}^\beta_{q,q}} \int_0^\infty \lambda^{p-q-1} \Big(\sum_{j\geqslant j_\lambda} 2^{-j\beta} c_j\Big)^q d\lambda. \tag{2.101}$$

由带权 $2^{-j\beta}$ 的 Hölder 不等式及 j_λ 的选取方法 (2.97), 就可以推出

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{j\geqslant j_\lambda}2^{-j\beta}c_j\Big)^q&\leqslant\Big(\sum_{j\geqslant j_\lambda}2^{-j\beta}\Big)^{q-1}\sum_{j\geqslant j_\lambda}2^{-j\beta}c_j^q\\&\leqslant C2^{-j_\lambda\beta(q-1)}\sum_{j\geqslant j_\lambda}2^{-j\beta}c_j^q\\&\leqslant C\lambda^{-(q-1)\frac{\beta}{\alpha}}\sum_{j\geqslant j_\lambda}2^{-j\beta}c_j^q,\end{aligned}\tag{2.102}$$

代入 (2.101), 就得

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p&\leqslant C\|f\|_{\dot B^\beta_{q,q}}^q\int_0^\infty\sum_j 2^{-j\beta}I_{j\geqslant j_\lambda}c_j^q\lambda^{p-q-(q-1)\frac{\beta}{\alpha}-1}d\lambda\\&\leqslant C\|f\|_{\dot B^\beta_{q,q}}^q\sum_j 2^{-j\beta}c_j^q\int_0^{4C2^{(j+1)\alpha}}\lambda^{p-q-(q-1)\frac{\beta}{\alpha}-1}d\lambda\\&\leqslant C\|f\|_{\dot B^\beta_{q,q}}^q\sum_j 2^{-j\beta}c_j^q2^{j\alpha(p-q-(q-1)\frac{\beta}{\alpha})}\\&\leqslant C\|f\|_{\dot B^\beta_{q,q}}^q,\end{aligned}\tag{2.103}$$

这里用到 $\beta=\alpha\left(\dfrac{p}{q}-1\right)$ 及 $\|\{c_j\}\|_{\ell^q}=1$, 定理 2.14 得证. □

5. 应用 2-Besov 框架下的 log-型 Sobolev 不等式

下面给出所谓的 log-型 Sobolev 不等式, 它在研究非线性发展方程的适定性及光滑解的 Blow-up 机制中有重要的应用. 它的功能相当于常微分方程中的 Osgood 定理. 下面利用分频方法给出一种 log-型 Sobolev 不等式的详细证明, 其余可以作为练习.

定理 2.16 (i) 设 $p,\rho,\sigma\in[1,\infty]$, $q\in[1,\infty)$, $s>\dfrac{d}{q}$, 则

$$\|f\|_\infty\leqslant C\bigg(1+\|f\|_{\dot B^{\frac{d}{p}}_{p,\rho}}\big(\log(e+\|f\|_{B^s_{q,\sigma}})\big)^{1-\frac{1}{\rho}}\bigg),\quad\forall f\in\dot B^{\frac{d}{p}}_{p,\rho}\cap B^s_{q,\sigma}.\tag{2.104}$$

(ii) 设 $p,q,\rho,\sigma,\nu\in[1,\infty]$, $\nu\leqslant\min(\rho,\sigma)$, $\dfrac1q=\dfrac1p-\dfrac sd$, $1\leqslant r\leqslant q$ 满足

$$\frac1r-\frac{s_1}{d}>\frac1q>\frac1r-\frac{s_2}{d}.$$

则对于 $\forall f\in\dot B^{s_1}_{r,\sigma}\cap\dot B^{s_2}_{r,\sigma}$, 成立

$$\|f\|_{\dot B^0_{q,\nu}}\leqslant C\bigg(1+\|f\|_{\dot B^s_{p,\rho}}\big(\log(e+\|f\|_{\dot B^{s_1}_{r,\sigma}}+\|f\|_{\dot B^{s_2}_{r,\sigma}}\big)^{\frac1\nu-\frac1\rho}\bigg).\tag{2.105}$$

证明 利用 Littlewood-Paley 分解

$$f(x)=\dot{S}_{-N}f+\sum_{j=-N}^{N}\dot{\Delta}_j f+\sum_{j>N}\dot{\Delta}_j f\triangleq I_1+I_2+I_3, \tag{2.106}$$

这里 N 是待定的正整数.

I_1 的估计. 利用广义的 Young 不等式, 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^d$, 有

$$|I_1|\leqslant\|\chi_{-N}*f\|_\infty\leqslant\|\chi_{-N}\|_{q'}\|f\|_q\leqslant 2^{-Nd+\frac{Nd}{q'}}\|f\|_q\leqslant C2^{-\frac{Nd}{q}}\|f\|_q,$$

这里 C 不依赖于 N 与 q.

I_2 的估计. 利用 Hölder 不等式, 对于任意的 $p,\rho\in[1,\infty]$, 有

$$\begin{aligned}|I_2|\leqslant&\sum_{|j|\leqslant N}\|\varphi_j*f\|_\infty\leqslant\Big(\sum_{|j|\leqslant N}1\Big)^{\frac{1}{\rho'}}\Big(\sum_{|j|\leqslant N}\|\varphi_j*f\|_\infty^\rho\Big)^{\frac{1}{\rho}}\\ \leqslant& CN^{\frac{1}{\rho'}}\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\rho}}\leqslant CN^{\frac{1}{\rho'}}\|f\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\rho}},\end{aligned}$$

这里 C 不依赖于 N, q 及 ρ.

I_3 的估计. 类似地, 对于任意的 $q\in[1,\infty)$ 及 $s>\dfrac{d}{q}$, 有

$$\begin{aligned}|I_3|\leqslant&\sum_{j>N}\|\varphi_j*f\|_\infty\leqslant\sum_{j>N}\left(\|\widetilde{\varphi}_j\|_{q'}\cdot\|\varphi_j*f\|_q\right)\leqslant C\sum_{j>N}2^{\frac{jd}{q}}\|\varphi_j*f\|_q\\ \leqslant&\Big(\sum_{j>N}2^{-j(s-\frac{d}{q})\sigma'}\Big)^{\frac{1}{\sigma'}}\Big(\sum_{j>N}2^{sj\sigma}\|\varphi_j*f\|_q^\sigma\Big)^{\frac{1}{\sigma}}\leqslant C2^{-(s-\frac{d}{q})N}\|f\|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}},\end{aligned}$$

这里 C 不依赖于 N, q, s 及 σ.

记 $\kappa=\min\left\{\dfrac{d}{q},s-\dfrac{d}{q}\right\}$, 则

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_\infty\leqslant& C\Big\{2^{-\kappa N}\Big(\|f\|_q+\|f\|_{\dot{B}^s_{q,\sigma}}\Big)+N^{\frac{1}{\rho'}}\|f\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\rho}}\Big\}\\ \leqslant& C\Big\{2^{-\kappa N}\|f\|_{B^s_{q,\sigma}}+N^{\frac{1}{\rho'}}\|f\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\rho}}\Big\},\end{aligned}$$

这里 $C=C(d,p,q,s)$ 是不依赖于 N, ρ, σ 及 f 的常数. 选取

$$N=\left[\frac{1}{\kappa}\log_2(\|f\|_{B^s_{q,\sigma}}+e)\right].$$

代入上式就得到 log-型 Sobolev 不等式 (2.104). 同样的道理可以证明 (2.105), 读者可作为习题. □

注记 2.4 (i) 作为定理 2.16 的特例, 我们可以得到 Lebesgue 空间、BMO 空间及 Besov 空间 $B^{-1}_{\infty,\infty}$ 中的 log-型 Sobolev 不等式.

$$\|f\|_{\infty} \leqslant C\Big\{1+\|f\|_{\dot{W}^{\frac{d}{r},r}}\big(\log(e+\|f\|_{W^{s,p}})\big)^{1-\frac{1}{r}}\Big\}, \quad f \in W^{s,p} \cap \dot{W}^{\frac{d}{r},r}, \quad s > \frac{d}{p}, \tag{2.107}$$

这里 $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$;

$$\|f\|_{\infty} \leqslant C\Big\{1+\|f\|_{\mathrm{BMO}}\big(\log(e+\|f\|_{W^{s,p}})\big)\Big\}, \quad f \in W^{s,p}, \quad s > \frac{d}{p}, \tag{2.108}$$

这里 $1 \leqslant p < \infty$;

$$\|f\|_{\infty} \leqslant C\Big(1+\|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \log\big(e+\|f\|_{B^s_{p,q}}\big)\Big), \quad \forall f \in B^s_{p,q}, \quad s > \frac{d}{p}, \tag{2.109}$$

这里 $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$.

(ii) 利用分频技术, 还可以建立混合时空空间框架下的 log-型 Sobolev 不等式. 具体地说, 设 $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ 及 $s > \frac{d}{p}+1$. 若 $f \in \mathcal{L}^1_T(\dot{B}^0_{\infty,\infty}) \cap L^\infty_T(B^{s-1}_{p,q})$. 则有如下的 log- 型 Sobolev 不等式成立:

$$\int_0^T \|f(t)\|_\infty dt \leqslant C\left(1+\sup_j \int_0^T \|\dot{\Delta}_j f\|_\infty dt(1+\log^+(T\|f\|_{L^\infty_T(B^{s-1}_{p,q})}))\right), \tag{2.110}$$

这里 C 是不依赖 f, T 的常数,

$$\log^+ y = \log y, \qquad y > 1,$$
$$\log^+ y = 0, \qquad y \leqslant 1.$$

事实上, 对于 $f(x,t)$ (视 t 为参数), 利用 Littlewood-Paley 分解 (2.106), 分别估计 I_j, $j=1,2,3$:

$$\int_0^T \|I_1\|_\infty dt \leqslant \int_0^T 2^{-N\frac{d}{p}}\|\dot{S}_{-N}f\|_p dt \leqslant CT2^{-N\frac{d}{p}}\|f\|_p,$$
$$\int_0^T \|I_2\|_\infty dt \leqslant (2N+1)\sup_j \int_0^T \|\dot{\Delta}_j f\|_\infty dt,$$
$$\int_0^T \|I_3\|_\infty dt \leqslant \int_0^T \sum_{j>N} 2^{j(\frac{d}{p}-s+1)}2^{j(s-1)}\|\dot{\Delta}_j f\|_p dt \leqslant CT2^{-N(s-\frac{d}{p}-1)}\|f\|_{L^\infty_T(B^{s-1}_{p,q})},$$

令 $\alpha = \min\left(\frac{d}{p}, s-\frac{d}{p}-1\right)$, 并且选取

$$N \sim \frac{\log^+(T\|f\|_{L^\infty_T(B^{s-1}_{p,q})})}{\alpha \log 2},$$

就得到 log-型 Sobolev 不等式.

6. 应用 3-线性热传导方程的混合时空估计

定义 2.3 设 $p,q,\sigma \in [1,\infty)$, $s \in \mathbb{R}$, 定义混合型的齐次时空 Besov 空间

$\mathcal{L}^q(I;\dot{B}^s_{p,\sigma})$ 如下:

$$\mathcal{L}^q(I;\dot{B}^s_{p,\sigma}(\mathbb{R}^d)) = \Big\{ u(x,t) \in \mathscr{D}'(I;\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)), \text{ 满足 } \\ \|u\|_{\mathcal{L}^q(I;\dot{B}^s_{p,\sigma})} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{js\sigma}\|\dot{\Delta}_j u\|^\sigma_{L^q(I,L^p(\mathbb{R}^d))}\Big)^{\frac{1}{\sigma}} < \infty \Big\}.$$

定理 2.17　设 $v(x,t)$ 是线性热传导方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = f(x,t), \\ v(0) = v_0(x) \end{cases} \tag{2.111}$$

的解. 设 $q,\sigma \in [1,\infty]$, $2 \leqslant p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $I = [0,T]$, $0 < T \leqslant \infty$. 则

$$\|v\|_{\mathcal{L}^q(I;\dot{B}^{s+\frac{2}{q}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\Big[\|v_0(x)\|_{\dot{B}^s_{p,\sigma}} + \|f\|_{\mathcal{L}^\ell(I;\dot{B}^{s+\frac{2}{\ell}-2}_{p,\sigma})}\Big], \quad 1 \leqslant \ell \leqslant q. \tag{2.112}$$

特别地, 当 $q \geqslant \sigma$ 时, 作为 Minkowski 不等式与 (2.112) 的直接结论, 有

$$\|v\|_{L^q(I;\dot{B}^{s+\frac{2}{q}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\Big[\|v_0(x)\|_{\dot{B}^s_{p,\sigma}} + \|f\|_{\mathcal{L}^\ell(I;\dot{B}^{s+\frac{2}{\ell}-2}_{p,\sigma})}\Big], \quad 1 \leqslant \ell \leqslant q. \tag{2.113}$$

证明　用 $\dot{\Delta}_j$ 作用于 (2.111) 两边, 两边同乘以 $|\dot{\Delta}_j v|^{p-2}\dot{\Delta}_j v$, 就得

$$\frac{d}{dt}\dot{\Delta}_j v \cdot |\dot{\Delta}_j v|^{p-2}\dot{\Delta}_j v - \Delta\dot{\Delta}_j v \cdot |\dot{\Delta}_j v|^{p-2}\dot{\Delta}_j v = \dot{\Delta}_j f \cdot |\dot{\Delta}_j v|^{p-2}\dot{\Delta}_j v. \tag{2.114}$$

积分 (2.114) 两边, 并利用散度定理可见

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j v\|_p^p + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\dot{\Delta}_j v \cdot \nabla(|\dot{\Delta}_j v|^{p-2}\dot{\Delta}_j v)dx \leqslant \|\dot{\Delta}_j f\|_p \|\dot{\Delta}_j v\|_p^{p-1}. \tag{2.115}$$

注意到 Bernstein 不等式, 就可以推出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\dot{\Delta}_j v \cdot \nabla(|\dot{\Delta}_j v|^{p-2}\dot{\Delta}_j v)dx &= (p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |\dot{\Delta}_j v|^{p-2}|\nabla\dot{\Delta}_j v|^2 dx \\ &= \frac{4(p-1)}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(|\dot{\Delta}_j v|^{\frac{p}{2}})|^2 dx \\ &\geqslant c_p 2^{2j}\|\dot{\Delta}_j v\|_p^p. \end{aligned} \tag{2.116}$$

因此

$$\frac{d}{dt}\|\dot{\Delta}_j v\|_p + 2^{2j}c_p\|\dot{\Delta}_j v\|_p \leqslant \|\dot{\Delta}_j f\|_p. \tag{2.117}$$

两边关于 t 积分

$$\|\dot{\Delta}_j v\|_p \leqslant e^{-2^{2j}c_p t}\|\dot{\Delta}_j v_0(x)\|_p + \Big[e^{-2^{2j}c_p\tau} * \|\dot{\Delta}_j f\|_p \chi(\tau)\Big](t), \tag{2.118}$$

$$\chi(\tau)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\tau\leqslant t,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

两边对 t 积分, 利用 Young 不等式可得

$$\|\dot{\Delta}_j v\|_{L^q(I;L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant 2^{-\frac{2j}{q}}c_p^{-\frac{1}{q}}\|\dot{\Delta}_j v_0(x)\|_p+2^{-2j(\frac{1}{q}-\frac{1}{\ell}+1)}\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^\ell(I;L^p(\mathbb{R}^d))},$$

进而推出

$$2^{js+\frac{2j}{q}}\|\dot{\Delta}_j v\|_{L^q(I;L^p(\mathbb{R}^d))}\leqslant C\Big[2^{js}\|\dot{\Delta}_j v_0(x)\|_p+2^{j(s+\frac{2}{\ell}-2)}\|\dot{\Delta}_j f\|_{L^\ell(I;L^p(\mathbb{R}^d))}\Big].\tag{2.119}$$

两边再取 ℓ^σ-范数, 就得估计 (2.112). 特别地, 利用 Minkowski 不等式, 当 $q\geqslant\sigma$ 时, 就得 (2.113). □

注记 2.5 当 $\ell\leqslant\sigma$, $1\leqslant\ell\leqslant q$, (2.113) 亦可以改成

$$\|v\|_{L^q(I;\dot{B}^{s+\frac{2}{q}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^d))}\leqslant C\Big[\|v_0(x)\|_{\dot{B}^s_{p,\sigma}}+\|f\|_{L^\ell(I;\dot{B}^{s+\frac{2}{\ell}-2}_{p,\sigma})}\Big].\tag{2.120}$$

1.3 非齐次 Besov 空间

定义 3.1 设 $s\in\mathbb{R}$, $p,r\geqslant 1$, 非齐次 Besov 空间$B^s_{p,r}$ 定义为

$$B^s_{p,r}=\Big\{u(x)\Big|\ u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\ \text{满足}\ \|u\|_{B^s_{p,r}}\triangleq\big\|(2^{js}\|\Delta_j u\|_p)_{j\in\mathbb{Z}}\big\|_{\ell^r(\mathbb{Z})}<\infty\Big\},$$

这里 Δ_j 与定义齐次空间所用的 $\dot{\Delta}_j$ 是有区别的, 请查看前面的定义.

命题 3.1 (i) 设 $s<0$, 则 $\dot{B}^s_{p,r}\hookrightarrow B^s_{p,r}$ 并且存在不依赖于 s 的常数 C, 使得

$$\|u\|_{B^s_{p,r}}\leqslant\frac{C}{1-2^s}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.\tag{3.1}$$

当 $s=0$ 时, 仅当 $r=1$, 有关系式 $\dot{B}^0_{p,1}\hookrightarrow B^0_{p,1}$.

(ii) 设 $s>0$, 则

$$\begin{cases}B^s_{p,r}\hookrightarrow\dot{B}^s_{p,r}, & p<\infty,\\ B^s_{\infty,r}\cap\mathcal{S}'_h\hookrightarrow\dot{B}^s_{\infty,r},\end{cases}\tag{3.2}$$

并且存在常数 C, 使得

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\leqslant\frac{C}{s}\|u\|_{B^s_{p,r}}.\tag{3.3}$$

当 $s=0$, 仅当 $r=\infty$, 有关系式 $B^0_{p,\infty}\hookrightarrow\dot{B}^0_{p,\infty}$.

注记 3.1 命题 3.1 充分反映了利用局部化定义的空间的特点与个性, 特别是

负指数的齐次空间与非齐次空间之间的嵌入关系. 它的证明主要基于如下 Littlewood-Paley 分解

$$u=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\dot{\Delta}_j u \quad (\text{齐次分解}),$$

$$u=\Delta_{-1}u+\sum_{j=0}^{\infty}\Delta_j u \quad (\text{非齐次分解}).$$

命题 3.1 的证明　$s<0$ 的情形. 注意到 $\ell^1\hookrightarrow\ell^p$, $1<p\leqslant\infty$, 则

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^s_{p,r}}\leqslant&\|\Delta_{-1}u\|_p+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\Delta_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\leqslant&\sum_{j\leqslant 0}\|\Delta_{-1}\dot{\Delta}_j u\|_p+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\leqslant&\sum_{j\leqslant 0}2^{-js}2^{js}\|\dot{\Delta}_j u\|_p+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\leqslant&\Big(\frac{1}{1-2^{sr'}}\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big(\sum_{j\leqslant 0}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\leqslant&\Big(\frac{1}{1-2^{s}}\Big)\Big(\sum_{j\leqslant 0}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\leqslant&\frac{C}{1-2^s}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.
\end{aligned}$$

$s=0$ 的情形.

$$\begin{aligned}
\|u\|_{B^0_{p,1}}\leqslant&\|\Delta_{-1}u\|_p+\sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j u\|_p\leqslant\sum_{j\leqslant 0}\|\Delta_{-1}\dot{\Delta}_j u\|_p+\sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j u\|_p\\
\leqslant&\sum_{j\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_j u\|_p+\sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j u\|_p\lesssim\|u\|_{\dot{B}^0_{p,1}}.
\end{aligned}$$

$s>0$ 的情形. 注意到 $\ell^1\hookrightarrow\ell^p$, $1<p\leqslant\infty$, 则

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}=&\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\lesssim\Big(\sum_{j=-\infty}^{-1}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\lesssim&\Big(\sum_{j=-\infty}^{-1}2^{jsr}\|\Delta_{-1}u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\dot{\Delta}_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\
\lesssim&\frac{1}{s}\|\Delta_{-1}u\|_p+\Big(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jsr}\|\Delta_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}\lesssim\frac{C}{s}\|u\|_{B^s_{p,r}}.
\end{aligned}$$

当 $p=\infty$, 为排除常数而增加了约束条件 (3.2).

$s=0$ 的情形.

$$\|u\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant \sup_{j\geqslant -1} \|\Delta_j u\|_p \leqslant \|u\|_{B^0_{p,\infty}}. \qquad \square$$

命题 3.2 如果 $r<\infty$, 则对任意 $u\in B^s_{p,r}$, 有

$$\lim_{j\to\infty} \|S_j u - u\|_{B^s_{p,r}} = 0. \tag{3.4}$$

证明 注意到 $u-S_j u=\sum_{k\geqslant j}\Delta_k u$, 考虑

$$\|\Delta_\ell(u-S_j u)\|_p \leqslant \sum_{k\geqslant j} \|\Delta_\ell \Delta_k u\|_p \leqslant \sum_{\substack{|k-\ell|\leqslant 1,\\ k\geqslant j}} \|\Delta_k u\|_p.$$

根据 Besov 空间的定义, 直接验证

$$\begin{aligned}2^{s\ell}\|\Delta_l(u-S_j u)\|_p &\leqslant \sum_{\substack{|k-\ell|\leqslant 1,\\ k\geqslant j}} 2^{\ell s}\|\Delta_k u\|_p \lesssim \sum_{|k-\ell|\leqslant 1} 2^{ks}\|\Delta_k u\|_p I_{k\geqslant j}(k)\\ &\leqslant \sum_k \chi_{[-1,1]}(\ell-k)\cdot\{2^{ks}\|\Delta_k u\|_p I_{k\geqslant j}(k)\},\end{aligned}$$

因此

$$\|S_j u-u\|^r_{B^s_{p,r}} \leqslant \sum_{k\geqslant j} 2^{rks}\|\Delta_k u\|^r_p \longrightarrow 0, \quad j\longrightarrow\infty. \qquad \square$$

命题 3.3 H^s 与 $B^s_{2,2}$ 等价, 且

$$C^{-(|s|+1)}\|u\|_{B^s_{2,2}} \leqslant \|u\|_{H^s} \leqslant C^{|s|+1}\|u\|_{B^s_{2,2}}. \tag{3.5}$$

提示: 仅需用

$$\frac{1}{3} \leqslant \chi^2(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\varphi}_j^2(\xi) \leqslant 1, \quad \hat{\varphi}_j(\xi)=\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)$$

代替

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_j^2(\xi) \leqslant 1, \quad \hat{\varphi}_j(\xi)=\hat{\varphi}(2^{-j}\xi),$$

完全类同齐次空间 $\dot{H}^s\sim\dot{B}^s_{2,2}$ 的证明, 就可获得 (3.5).

命题 3.4 $B^0_{p,1}\hookrightarrow L^p\hookrightarrow B^0_{p,\infty}$.

证明 事实上, 容易看出

$$u=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j u \Longrightarrow \|u\|_p \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\Delta_j u\|_p = \|u\|_{B^0_{p,1}},$$

$$\|\Delta_j u\|_p \leqslant \|u\|_p \Longrightarrow \|u\|_{B^0_{p,\infty}} \lesssim \|u\|_p. \qquad \square$$

下面建立一个非齐次 Besov 范数的控制引理, 借此就可以证明非齐次 Besov 空间范数定义的良定性.

命题 3.5 设 $s\in\mathbb{R}$, $p,r\geqslant 1$, 记

$$\mathscr{B}'=B_{R_2}(0),\quad \mathscr{C}'=B_{R_2}(0)-B_{R_1}(0)\triangleq C_{R_1,R_2}(0).$$

设 $\{u_j\}_{j\geqslant -1}$ 是光滑函数序列, 满足

$$\operatorname{supp}\hat{u}_{-1}\subset\mathscr{B}',\quad \operatorname{supp}\hat{u}_j\subset 2^j\mathscr{C}', j\geqslant 0\quad 且\quad \|(2^{js}\|u_j\|_p)_{j\geqslant -1}\|_{\ell^r}<\infty.$$

则 $u=\sum\limits_{j\geqslant -1}u_j\in B^s_{p,r}$, 并且

$$\|u\|_{B^s_{p,r}}\leqslant C_s\big\|(2^{js}\|u_j\|_p)_{j\geqslant -1}\big\|_{\ell^r}. \tag{3.6}$$

证明 完全类似于齐次空间的情形. 事实上, 用 Bernstein 估计与命题 1.4 就得

$$\|u_j\|_\infty\leqslant C2^{j(\frac{d}{p}-s)}\|u_j\|_p\Longrightarrow\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j\ 在\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\ 拓扑中收敛.$$

记 $\mathscr{B}$ 及 $\mathscr{C}$ 是 Littlewood-Paley 分解中定义的固定的球与环, 易见 $\exists N_0$ 使得

$$\mathscr{B}\cap 2^m\mathscr{C}'=\varnothing,\quad 2^k\mathscr{C}\cap 2^j\mathscr{C}'=\varnothing,\quad |m-(-1)|\geqslant N_0,\quad |k-j|\geqslant N_0. \tag{3.7}$$

因此

$$\mathcal{F}(\Delta_k u_j)=0\Longrightarrow\Delta_k u_j=0,\quad |k-j|\geqslant N_0. \tag{3.8}$$

利用上面的正交性, 就得

$$\|\Delta_k u\|_p=\Big\|\sum_{|j-k|\leqslant N_0}\Delta_k u_j\Big\|_p\leqslant\sum_{|j-k|\leqslant N_0}\|u_j\|_p,$$

即

$$2^{ks}\|\Delta_k u\|_p\leqslant\sum_{|j-k|\leqslant N_0}2^{(k-j)s}2^{js}\|u_j\|_p. \tag{3.9}$$

注意到

$$2^{ks}\|\Delta_k u\|_p\leqslant\{c_m\}_{m\in\mathbb{Z}}*\{d_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}},\quad c_m=I_{[-N_0,N_0]}(m)2^{ms},\quad d_\ell=2^{s\ell}\|u_\ell\|_p,$$

其中当 $\ell<-1$ 时, 令 $d_\ell=0$. 由离散的 Young 不等式, 得

$$\|u\|_{B^s_{p,r}}\leqslant C\Big(\sum_{j\geqslant -1}2^{srj}\|u_j\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.10}$$

□

推论 3.6 Besov 空间 $B^s_{p,r}$ 不依赖于函数 $\chi(\xi)$, $\hat{\varphi}(\xi)$ 的选取. 这里对 $s \in \mathbb{R}$ 没有任何限制得益于非齐次 Besov 空间总是 Banach 空间.

注记 3.2 命题 3.5 的表述方式是专门为建立非齐次 Besov 范数的良定性而设计的, 事实上, 也有如下类似的范数控制性结果: 设 $\mathscr{C}'$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的环, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一串光滑函数序列满足

$$\operatorname{supp} \hat{u}_j \subset 2^j\mathscr{C}', \quad \big\|\{2^{js}\|u_j\|_p\}_{j\in\mathbb{N}}\big\|_{l^r} < \infty.$$

则

$$u \triangleq \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in B^s_{p,r},$$

并且

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C_s\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{rsj}\|u_j\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

命题 3.7 设 $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$,$1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \infty$, 则 $\forall s \in \mathbb{R}$, 有

$$B^s_{p_1,r_1} \hookrightarrow B^{s-d(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}_{p_2,r_2}. \tag{3.11}$$

证明 注意到 Bernstein 估计

$$\|S_0u\|_{p_2} \lesssim \|S_0u\|_{p_1} \quad 或 \quad \|\Delta_{-1}u\|_{p_2} \lesssim \|\Delta_{-1}u\|_{p_1},$$

$$\|\Delta_ju\|_{p_2} \lesssim 2^{jd(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2})}\|\Delta_ju\|_{p_1}, \quad j \geqslant 0.$$

采用 $l^{r_1}(\mathbb{Z}) \hookrightarrow l^{r_2}(\mathbb{Z})$ 就得嵌入关系 (3.11). □

命题 3.8 对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, $B^s_{p,r} \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

证明 注意到集合之间的包含关系 $B^s_{p,r} \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 仅需证明单位映射是连续的, 即 $\exists C$ 与整数 $M > 0$, 成立

$$\big|\langle u, \phi\rangle\big| \leqslant C\|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{3.12}$$

对任意的 $j \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\widehat{\Delta_ju} \subset 2^j\mathscr{C}$. 因此

$$\Delta_ju = 2^{-j(N+1)} \sum_{|\alpha|=N+1} 2^{jd}g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha\Delta_ju, \quad j \geqslant 0, \tag{3.13}$$

这里

$$g_\alpha(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{(-i\xi)^\alpha}{|\xi|^{2(N+1)}}\hat{\varphi}(\xi)\Big).$$

于是, 只要取自然数 N 满足 $s - \dfrac{d}{p} > -N$, 就得

$$\big|\langle\Delta_ju, \phi\rangle\big| \leqslant 2^{-j(N+1)} \sum_{|\alpha|=N+1} \big|\langle\Delta_ju, 2^{jd}g_\alpha(2^j\cdot) * \partial^\alpha\phi\rangle\big|$$

$$\leqslant 2^{-j}\|u\|_{B^{-N}_{\infty,\infty}} \sup_{|\alpha|=N+1} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^1} \quad (\text{嵌入定理})$$

$$\lesssim 2^{-j}\|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.14}$$

$$\big|\langle \Delta_{-1}u, \phi\rangle\big| \leqslant \|\Delta_{-1}u\|_\infty\|\phi\|_1 \leqslant \|\Delta_{-1}u\|_p\|\phi\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}.$$

注意到 $\Delta_j u = 0,\ j \leqslant -2$ 及

$$u = \lim_{j\to\infty} S_j u, \qquad \forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

就 (3.14) 的两边关于 j 求和, 容易看出

$$\big|\langle u, \phi\rangle\big| \lesssim \|u\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.15}$$

□

命题 3.9 $(B^s_{p,r},\ \|\cdot\|_{B^s_{p,r}})$ 是一个 Banach 空间.

证明 根据范数的定义, $\|u\|_{B^s_{p,r}} = 0$ 等价于

$$\|\Delta_j u\|_p = 0,\ -1 \leqslant j \leqslant \infty \Longleftrightarrow \hat{\varphi}_j(\xi)\hat{u}(\xi) = 0, -1 \leqslant j \leqslant \infty.$$

由此可以看出

$$\hat{u}(\xi) = 0, \xi \in \mathbb{R}^d \Longrightarrow u \equiv 0.$$

说明 $\|\cdot\|_{B^s_{p,r}}$ 是一个范数.

设 $\{u^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $B^s_{p,r}$ 中的 Cauchy 列, 不等式 (3.15) 意味着 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\big|\langle u^{(k)} - u^{(\ell)}, \phi\rangle\big| \lesssim \|u^{(k)} - u^{(\ell)}\|_{B^s_{p,r}}\|\phi\|_{M,\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

说明序列 $\langle u^{(k)}, \phi\rangle$ 是 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy 列. 因此

$$\langle u, \phi\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u^{(k)}, \phi\rangle. \tag{3.16}$$

这就定义了一个缓增分布 u. 由 $B^s_{p,r}$ 范数的定义, 对固定 j, $\{\Delta_j u^{(k)}\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 列. 因此, 存在 $u_j \in L^p$ 使得 $\lim_{k\to\infty}\|\Delta_j u^{(k)} - u_j\|_p = 0$. 另一方面, 由于 $u^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{S}'} u$, 从而 $\Delta_j u = u_j$.

对于任意的 $\varepsilon > 0$ 及固定 J, 注意到如下事实:

$$\forall j \geqslant -1, \quad \Delta_j u^{(k)} \xrightarrow{L^p} \Delta_j u, \quad k \longrightarrow \infty.$$

因此, 对于所有 k, 估计

$$\Big(\sum_{j\leqslant J} 2^{jrs}\|\Delta_j(u^{(k)} - u)\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}} = \lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{j\leqslant J} 2^{jrs}\|\Delta_j(u^{(k)} - u^{(m)})\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.17}$$

由于右边是 Cauchy 列, 因此总存在 k_0, 当 $k \geqslant k_0$ 时, 有

$$\left(\sum_{j\leqslant J} 2^{jrs}\|\Delta_j(u^{(k)}-u)\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \varepsilon. \tag{3.18}$$

令 $J \longrightarrow +\infty$, 就可以保证 $u^{(k)} \longrightarrow u$ 在 $B^s_{p,r}$ 中. □

命题 3.10 设 $s<0$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. $u\in B^s_{p,r} \iff \{2^{js}\|S_ju\|_p\}_{j\in\mathbb{N}}\in \ell^r$, 并且满足

$$\frac{1}{2}\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \left\|(2^{js}\|S_ju\|_p)_j\right\|_{\ell^r} \leqslant C\left(1+\frac{1}{|s|}\right)\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{3.19}$$

证明概要 从关系式

$$\begin{aligned}2^{js}\|\Delta_j u\|_p &\leqslant 2^{js}(\|S_{j+1}u\|_p+\|S_ju\|_p)\\ &\leqslant 2^{-s}2^{(j+1)s}\|S_{j+1}u\|_p+2^{js}\|S_ju\|_p\end{aligned}$$

推出 (3.19) 的左边估计. 另一方面,

$$\begin{aligned}2^{js}\|S_ju\|_p &\leqslant 2^{js}\sum_{k\leqslant j-1}\|\Delta_k u\|_p \leqslant \sum_{k\leqslant j-1}2^{(j-k)s}2^{ks}\|\Delta_k u\|_p\\ &\leqslant \sum_{k\leqslant j-1}2^{(j-k)s}c_k\|u\|_{B^s_{p,r}}, \qquad \|c_k\|_{\ell^r}=1.\end{aligned}$$

利用离散的 Young 不等式就得 (3.19) 的右边估计. □

命题 3.11 存在常数 $C>0$, 设 $s_1<s_2$ 是两个实数, $\theta\in(0,1)$, $1\leqslant r\leqslant\infty$, 则

$$\|u\|_{B^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,r}} \leqslant \|u\|^{\theta}_{B^{s_1}_{p,r}}\|u\|^{1-\theta}_{B^{s_2}_{p,r}}, \tag{3.20}$$

$$\|u\|_{B^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}} \leqslant \frac{C}{(s_2-s_1)\theta(1-\theta)}\|u\|^{\theta}_{B^{s_1}_{p,\infty}}\|u\|^{1-\theta}_{B^{s_2}_{p,\infty}}. \tag{3.21}$$

这里 (3.21) 称为最优型的插值公式.

证明概要

$$\begin{aligned}\|u\|_{B^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,r}} &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{j\theta s_1+(1-\theta)s_2 j}\|\Delta_j u\|_p\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}\\ &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{j\theta s_1 r}\|\Delta_j u\|_p^{\theta r}\right)\left(2^{j(1-\theta)s_2 r}\|\Delta_j u\|_p^{(1-\theta)r}\right)\right)^{\frac{1}{r}}\\ &\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(2^{js_1 r}\|\Delta_j u\|_p^r\right)\right)^{\frac{\theta}{r}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{js_2 r}\|\Delta_j u\|_p^r\right)^{\frac{1-\theta}{r}}\\ &\leqslant \|u\|^{\theta}_{B^{s_1}_{p,r}}\|u\|^{1-\theta}_{B^{s_2}_{p,r}}.\end{aligned}$$

现在证明估计 (3.21). 仍然采用分频技术,

$$\|u\|_{B^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}} = \sum_{j<N} 2^{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)j}\|\Delta_j u\|_p + \sum_{j\geqslant N} 2^{(\theta s_1+(1-\theta)s_2)j}\|\Delta_j u\|_p$$
$$\leqslant \|u\|_{B^{s_1}_{p,\infty}} \sum_{j<N} 2^{j(1-\theta)(s_2-s_1)} + \|u\|_{B^{s_2}_{p,\infty}} \sum_{j\geqslant N} 2^{-j\theta(s_2-s_1)},$$

因此

$$\|u\|_{B^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_{p,1}} \leqslant \|u\|_{B^{s_1}_{p,\infty}} \frac{2^{N(1-\theta)(s_2-s_1)}}{2^{(1-\theta)(s_2-s_1)}-1} + \|u\|_{B^{s_2}_{p,\infty}} \frac{2^{-N\theta(s_2-s_1)}}{1-2^{-\theta(s_2-s_1)}}.$$

选取

$$\frac{\|u\|_{B^{s_2}_{p,\infty}}}{\|u\|_{B^{s_1}_{p,\infty}}} \leqslant 2^{N(s_2-s_1)} \leqslant 2^{s_2-s_1}\frac{\|u\|_{B^{s_2}_{p,\infty}}}{\|u\|_{B^{s_1}_{p,\infty}}},$$

就可推出估计 (3.21) 成立. □

下面罗列非齐次 Besov 空间的几个性质, 读者可作为练习.

命题 3.12 设 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, 则

(1) 稠密性: $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 稠于 $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \Longleftrightarrow p, r < \infty$.

(2) 对偶性: 对于 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r < \infty$, $B^{-s}_{p',r'} = (B^s_{p,r})'$.

(3) 可分性: $1 \leqslant p, r < \infty$, 则 $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 可分. 记 $\tilde{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 $\|\cdot\|_{B^s_{p,\infty}}$ 下的完备化空间, 则 $\tilde{B}^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^d)$ 亦可分.

(4) 常用的嵌入不等式:

$$B^s_{p,r} \hookrightarrow B^{s_1}_{p,r_1}, \quad s_1 < s \text{ 或 } s_1 = s,\ r_1 \geqslant r,$$
$$B^s_{p,r} \hookrightarrow B^{s-d(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})}_{p_1,r}, \quad p_1 \geqslant p,$$
$$B^0_{\infty,1} \hookrightarrow C_b = C \cap L^\infty,$$
$$B^{\frac{d}{p}}_{p,1} \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^d) = \big\{u \in C(\mathbb{R}^d),\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0\big\}, \quad p < \infty.$$

(5) Fatou 型定理: 设 $\{u^{(k)}\}$ 是 $B^s_{p,r}$ 中的有界序列, 且

$$u^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{S}'} u, \qquad k \longrightarrow \infty.$$

则 $u \in B^s_{p,r}$, 并且

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u^{(k)}\|_{B^s_{p,r}}. \tag{3.22}$$

(6) 刻画 $B^s_{p,1}$ 与 $B^s_{p,\infty}$ 差别程度的 log-型不等式: 对 $\forall s\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ 有

$$\|u\|_{B^s_{p,1}} \leqslant C\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\|u\|_{B^s_{p,\infty}}\left(1+\log\frac{\|u\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}}}{\|u\|_{B^s_{p,\infty}}}\right). \tag{3.23}$$

注记 3.3 (i) 常用的嵌入不等式中的第四嵌入需要 $p < \infty$ 时, $C_c(\mathbb{R}^d)$ 稠于 $B^{\frac{d}{p}}_{p,1}$.

(ii) (5) 所表述的 Fatou 型定理极其重要, 证明思路如下: 注意到 $B^s_{p,r}$ 中的有界序列 $\{u^{(k)}\}$ 满足

$$u^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{S}'} u, \qquad k \longrightarrow \infty,$$

就可以推出

$$\Delta_j u^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \Delta_j u, \qquad k \longrightarrow \infty, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

注意到 $\{\Delta_j u^{(k)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 在 $L^p \cap C_b^\infty$ 中有界, 故

$$\{\Delta_j u\}_{k\in\mathbb{Z}} \in L^p \cap C_b^\infty, \quad 且\ \|u\|_p \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u^{(k)}\|_p.$$

因此, 对于任意的 $J_0 \in \mathbb{N}$, 总有

$$\Big(\sum_{j=-1}^{J_0} 2^{jsr}\|\Delta_j u\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \Big(\sum_{j=-1}^{J_0} 2^{jsr}\liminf_{k\to\infty}\|u^{(k)}\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \liminf_{k\to\infty}\Big(\sum_{j=-1}^{J_0} 2^{jsr}\|u^{(k)}\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

令 $J_0 \longrightarrow \infty$, 就得 Fatou 定理的证明.

(iii) 众所周知, $B^s_{p,1} \hookrightarrow B^s_{p,r} \hookrightarrow B^s_{p,\infty}$. 那么对于这三个同度的函数空间, 究竟差别有多大? 换句话说, 在插值不等式

$$\|u\|_{B^{\theta s+(1-\theta)\tilde{s}}_{p,1}} \leqslant \frac{C}{\theta(1-\theta)(\tilde{s}-s)}\|u\|^{\theta}_{B^s_{p,\infty}}\|u\|^{1-\theta}_{B^{\tilde{s}}_{p,\infty}}, \quad \tilde{s} > s, \quad \theta \in (0,1)$$

中, 令 $\theta \longrightarrow 1$, 将会出现什么情形? (3.23) 给出这一问题的精确刻画, 它就是所谓的 log-型 Sobolev 不等式, 它在研究非线性发展方程的适定性及光滑解的 Blow-up 机制中有重要的应用. (3.23) 的证明思路如下:

记 J 是一个待定正整数, 利用分频技术可见

$$\|u\|_{B^s_{p,1}} \leqslant \sum_{j<J} 2^{js}\|\Delta_j u\|_p + \sum_{j\geqslant J} 2^{js}\|\Delta_j u\|_p,$$

因此

$$\begin{aligned}\|u\|_{B^s_{p,1}} &\leqslant (J+1)\|u\|_{B^s_{p,\infty}} + \sum_{j\geqslant J} 2^{-\varepsilon j}2^{(s+\varepsilon)j}\|\Delta_j u\|_p \\ &\leqslant (J+1)\|u\|_{B^s_{p,\infty}} + \frac{2^{-J\varepsilon}}{1-2^{-\varepsilon}}\|u\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}}.\end{aligned}$$

注意到

$$1-2^{-\varepsilon} \sim \begin{cases} 1(\text{相差一个常数}), & \varepsilon \geqslant 1, \\ \varepsilon\log 2, & \varepsilon < 1. \end{cases}$$

令

$$2^{-J\varepsilon}\|u\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}} \cong \|u\|_{B^s_{p,\infty}},$$

即

$$J = \left[\frac{1}{\varepsilon} \log_2 \left(\frac{\|u\|_{B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}}}{\|u\|_{B^s_{p,\infty}}} \right) \right] + 1,$$

就可以确保 (3.23) 成立.

定义 3.2　光滑函数 $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 称为 S^m 乘子, 如果对任意多重指标 α, 存在常数 C_α, 使得

$$|\partial^\alpha f(\xi)| \leqslant C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.24}$$

命题 3.13　设 $m \in \mathbb{R}$,$\sigma(\xi)$ 是一个 S^m 乘子, 则对任意 $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $\sigma(D)$: 是 $B^s_{p,r} \mapsto B^{s-m}_{p,r}$ 的连续映射.

证明　取

$$\hat{\tilde{\varphi}}(\xi) = \hat{\varphi}(2\xi) + \hat{\varphi}(\xi) + \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Longrightarrow \hat{\tilde{\varphi}}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi).$$

因此

$$\Delta_j \sigma(D) u = \tilde{\varphi}(2^{-j}D)\sigma(D)\Delta_j u, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

记

$$\begin{aligned} \tilde{k}_j(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{ix\cdot\xi} \sigma(\xi) \hat{\tilde{\varphi}}(2^{-j}\xi) d\xi \\ &= 2^{jd} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{i2^j x\cdot\eta} \sigma(2^j\eta) \hat{\tilde{\varphi}}(\eta) d\eta \\ &= 2^{jd} k_j(2^j x), \end{aligned} \tag{3.26}$$

这里

$$k_j(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int e^{i\eta y} \sigma(2^j\eta) \hat{\tilde{\varphi}}(\eta) d\eta. \tag{3.27}$$

则

$$\|\Delta_j \sigma(D) u\|_p \leqslant \|\tilde{k}_j(\cdot)\|_1 \|\Delta_j u\|_p \leqslant \|k_j(\cdot)\|_1 \|\Delta_j u\|_p. \tag{3.28}$$

因此, 对任意 $M \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned} (1+|y|^2)^M k_j(y) &= \int (I-\Delta_\eta)^M (e^{i\eta y}) \hat{\tilde{\varphi}}(\eta) \sigma(2^j\eta) d\eta \\ &= \int e^{i\eta y} (I-\Delta_\eta)^M (\hat{\tilde{\varphi}}(\eta)\sigma(2^j\eta)) d\eta \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta| \leqslant 2M} C_{\alpha\beta} 2^{j|\beta|} \int e^{i\eta y} \partial^\alpha \hat{\tilde{\varphi}}(\eta) (\partial^\beta \sigma)(2^j\eta) d\eta. \end{aligned} \tag{3.29}$$

注意到积分本质上是在 supp $\hat{\varphi}$ 上进行, 并利用 Hörmander 乘子条件 (3.24), 可见

$$|(\partial^\beta\sigma)(2^j\eta)| \leqslant C_\beta(1+2^j|\eta|)^{m-|\beta|} \leqslant C_\beta 2^{j(m-|\beta|)}(1+|\eta|)^{m-|\beta|}, \quad j \geqslant 0,$$

因此

$$(1+|y|^2)^M|k_j(y)| \leqslant C_M 2^{mj}. \tag{3.30}$$

选取 $M > \frac{d}{2}$, 就可以推出

$$\|\tilde{k}_j\|_1 = \|k_j\|_1 \leqslant C2^{jm}. \tag{3.31}$$

利用 (3.27) 即得

$$2^{j(s-m)}\|\sigma(D)\Delta_j u\|_p \leqslant C2^{js}\|\Delta_j u\|_p. \tag{3.32}$$

同理, 当 $j=-1$ 时, 亦有类似上面的估计. 综上所述, 就得到估计

$$\|\sigma(D)u\|_{B^{s-m}_{p,r}} \lesssim \|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{3.33}$$

□

应用 1. Hölder-Lipschitz 型空间 $C^{k,\rho}(\mathbb{R}^d)$.

定义 3.3 设 $k\in\mathbb{N}$, $\rho\in(0,1]$. 定义 $C^{k,\rho}(\mathbb{R}^d)$ 空间如下:

$$C^{k,\rho}(\mathbb{R}^d) = \left\{f(x)\in C_b^k \;\middle|\; \|f\|_{C^{k,\rho}} < \infty\right\},$$

$$\|f\|_{C^{k,\rho}} = \|f\|_{C^k} + \sup_{x\neq y}\sup_{|\alpha|=k}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\rho} \triangleq \|f\|_{C^k} + \|f\|_{\dot{C}^{k,\rho}}.$$

$\rho<1$ 时, 称为 Hölder 型空间, 当 $\rho=1$ 时, 称为 Lipschitz 型空间.

命题 3.14 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在 $C_k>0$ 使得对 $\forall\rho\in(0,1]$ 和 $u\in C^{k,\rho}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\sup_j 2^{j(k+\rho)}\|\Delta_j u\|_\infty \leqslant C_k\|u\|_{C^{k,\rho}}. \tag{3.34}$$

换言之

$$C^{k,\rho}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^{k+\rho}_{\infty,\infty}, \quad k\in\mathbb{N},\ \rho\in(0,1].$$

证明 当 $j=-1$ 时, 易见

$$\|S_0 u\|_\infty \leqslant C\|u\|_\infty. \tag{3.35}$$

当 $j\geqslant 0$, 由表达式

$$\Delta_j u(x) = 2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-y))u(y)dy. \tag{3.36}$$

注意到消失性条件

$$\int x^\alpha \varphi(x)dx = 0, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d. \tag{3.37}$$

容易看出

$$\Delta_j u(x) = 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(2^j(x-y))\Big[(u(y)-u(x) - \sum_{0<|\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha\Big]dy. \tag{3.38}$$

采用 $k-1$ 阶的 Taylor 公式, 就得

$$\begin{aligned}
&u(y)-u(x) - \sum_{0<|\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha \\
&= \int_0^1 k(1-t)^{k-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}(\partial^\alpha u(x+t(y-x)) - \partial^\alpha u(x))dt \\
&\leqslant \int_0^1 k(1-t)^{k-1} t^\rho \sum_{|\alpha|=k} \frac{|y-x|^{|\alpha|+\rho}}{\alpha!} \frac{|\partial^\alpha u(x+t(y-x)) - \partial^\alpha u(x)|}{(t|x-y|)^\rho} dt.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

由于 $\partial^\alpha u \in C^\rho$, 容易看出

$$\Big|u(y)-u(x) - \sum_{0<|\alpha|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha u(x)(y-x)^\alpha\Big| \leqslant C_k|y-x|^{k+\rho}\|u\|_{\dot{C}^{k,\rho}}, \tag{3.40}$$

代入 (3.38), 就可以推出

$$|\Delta_j u(x)| \leqslant C_k \|u\|_{\dot{C}^{k,\rho}} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{k+\rho} |\varphi(2^j(x-y))|dy,$$

等价于

$$2^{(k+\rho)j}|\Delta_j u(x)| \leqslant C_k \|u\|_{\dot{C}^{k,\rho}} 2^{jd} \int_{\mathbb{R}^d} |2^j(x-y)|^{k+\rho} |\varphi(2^j(x-y))|dy. \tag{3.41}$$

结合 (3.35) 与 (3.41) 就得估计 (3.34). □

命题 3.14 的相反形式在一般情形下是不成立的. 然而, 当 $\rho \neq 1$ 时, 结果是正确的.

命题 3.15 设 $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, 则 $B^r_{\infty,\infty} \hookrightarrow C^{[r],\rho}(\mathbb{R}^d)$, 这里 $\rho = r - [r] > 0$, 进而

$$\|u\|_{C^{[r],\rho}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_r \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}, \quad C_r = C_{[r]}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{1-\rho}\Big). \tag{3.42}$$

证明 由 Bernstein 不等式, 可见

$$\|\Delta_j \partial^\alpha u\|_\infty \leqslant C^{[r]+1} 2^{-j(r-|\alpha|)} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}, \quad \forall |\alpha| \leqslant [r]. \tag{3.43}$$

因此

$$\|\partial^\alpha u\|_\infty \leqslant \sum_{j=-1}^{\infty} C^{[r]+1} 2^{-j(r-|\alpha|)} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}} \leqslant \frac{C^{[r]+1}}{\rho} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}, \quad \forall |\alpha| \leqslant [r]. \tag{3.44}$$

下面研究 $[r]$ 阶导数的差分项估计. 对于待定整数 $N>0$ 及任意的 $|\alpha|=[r]$, 考察

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leqslant \sum_{j=-1}^{N} |\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| + \sum_{j>N} |\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)|. \tag{3.45}$$

对于低频部分, 采用 Taylor 公式及 Beinstein 不等式, 有

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| &\leqslant C|x-y| \sup_{|\beta|=[r]+1} \|\partial^\beta \Delta_j u\|_\infty \\ &\leqslant C_{[r]} |x-y|\, 2^{j(1-\rho)} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}, \quad j \geqslant -1, \end{aligned} \tag{3.46}$$

这里用到了估计原则 " 低频用光滑性条件".

对于高频部分, 采用的估计原则是: "高频要使用尺寸条件". 事实上, 可以直接将高频部分粗糙地写成两项之和, 就得

$$|\partial^\alpha \Delta_j u(x) - \partial^\alpha \Delta_j u(y)| \leqslant C_{[r]} 2^{-j\rho} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}. \tag{3.47}$$

因此

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| &\leqslant C_{[r]} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}} \left(\sum_{j=0}^{N} 2^{j(1-\rho)} |x-y| + \sum_{j \geqslant N+1} 2^{-j\rho} \right) \\ &\leqslant C_{[r]} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}} \left(\frac{1-2^{(N+1)(1-\rho)}}{1-2^{1-\rho}} |x-y| + \frac{2^{-(N+1)\rho}}{1-2^{\rho}} \right). \end{aligned} \tag{3.48}$$

取 $N = [-\log_2 |x-y|] + 1$, 则

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leqslant C_{[r]} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}} \left(\frac{|x-y|^\rho}{1-\rho} + \frac{|x-y|^\rho}{\rho} \right).$$

从而

$$\sup_{|\alpha|=[r]} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\rho} \leqslant C_{[r]} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}} \left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} \right). \tag{3.49}$$

□

综合命题 3.14 与命题 3.15, 可得

定理 3.16 $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, 则 $B^r_{\infty,\infty} = C^{[r], r-[r]}$, 并且

$$C_{[r]}^{-1} \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}} \leqslant \|u\|_{C^{[r],r-[r]}} \leqslant C_{[r]} \left(\frac{1}{r-[r]} + \frac{1}{1-(r-[r])} \right) \|u\|_{B^r_{\infty,\infty}}. \tag{3.50}$$

当 $r \in \mathbb{N}$ 时, 命题 3.16 是不成立的, 即

定理 3.17　$B^1_{\infty,\infty} \not\subseteq C^{0,1}$ (Lipschitz 连续函数空间).

事实上, 选取 $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n} e^{i2^n x}$, 容易看出

$$\Delta_q f \approx 2^{-q} \Longrightarrow \|f\|_{B^1_{\infty,\infty}} < \infty.$$

然而, $f'(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} i e^{i2^n x}$, 此意味着

$$\|f'\|_\infty \geqslant |f'(0)| = \infty.$$

说明 $B^1_{\infty,\infty} \not\subseteq C^{0,1}$.

应用 2. Zygmund 空间 $\mathscr{C}^1_*$.

问题: $B^1_{\infty,\infty}$ 对应什么样的空间? 它恰好就是著名的 Zygmund 空间 $\mathscr{C}^1_*$ (相应地, $\dot{B}^1_{\infty,\infty} = \dot{\mathscr{C}}^1_*$).

在给出 Zygmund 空间 $\mathscr{C}^1_*$ 内蕴定义之前, 先讨论源于流体力学涡块中的一个著名问题, 从中体会 Zygmund 空间 $\mathscr{C}^1_* = B^1_{\infty,\infty}$ 引入的必要性.

在 $\mathbb{R}^2$ 第一象限的单位方体 Ω 中考虑不可压 Euler 方程的涡度形式

$$\begin{cases} \partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \\ \omega(0) = \omega_0(x). \end{cases}$$

选取不可压流体的涡度 $\omega_0(x) = I_\Omega(x)$. 用 H 表示 Heavyside 函数, 则 $w_0(x)$ 可写成

$$\omega_0(x) := \omega = I_\Omega(x) = H(x_1)H(1-x_1)H(x_2)H(1-x_2).$$

因此, 利用 Biot-Savart 定理, 可见

$$v(t,x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega(t,y) dy, \quad (z_1,z_2)^\perp := (-z_2, z_1).$$

则 v 满足 $\operatorname{div} v = 0$, $\omega = \operatorname{curl} v$ 且 $v \in B^1_{\infty,\infty}$. 事实上,

$$\|\Delta_j v\|_\infty \leqslant \|\Delta_j \Delta^{-1} \nabla^\perp \omega\|_\infty \leqslant 2^{-j} \|\Delta_j \omega\|_\infty, \qquad j \geqslant 0,$$

及

$$v \leqslant \frac{1}{|\cdot|} * \omega \Longrightarrow \|v\|_\infty \leqslant \|\omega\|_{L^{2,1}} \leqslant \|\omega\|_{L^p \cap L^q}, \quad 1 < p < 2 < q < \infty.$$

由此推出

$$\|v\|_{B^1_{\infty,\infty}} \leqslant \|\omega\|_\infty + \|\omega\|_p < \infty, \quad 1 < p < 2.$$

故 $v \in B^1_{\infty,\infty}$. 然而, $v \bar{\in} C^{0,1}$. 事实上, 存在原点的一个邻域 V 及正常数 $\alpha > 0$, 使得

$$|\nabla v(t,x)| \geqslant \alpha(1 - \log|x|), \qquad \forall x \in V.$$

由此就推出 $v \bar{\in} C^{0,1}(\Omega)$. 但是, $v \in C^{0,1}(\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^{4}\{C_j\})$, C_j 表示单位方体 Ω 的四个顶点.

进而, 如果 $\partial\Omega \in C^{1+\varepsilon}$, 则 $\omega_0(x) := \omega = I_\Omega(x)$ 对应的速度场 $v \in \mathrm{Lip}$. 与此有关的著名结果可以参见 Delort 关于涡片的著名定理, 上面讨论的详细证明可见 Chemin 的理想不可压缩流体力学的专著.

定义 3.4 设 $u \in C(\mathbb{R}^d)$, 定义 Zygmund 空间$\mathscr{C}_*^1$ 或 $\dot{\mathscr{C}}_*^1$ 如下:

$$\mathscr{C}_*^1 = \{u \in C(\mathbb{R}^d) \mid \|u\|_{\mathscr{C}_*^1} = \|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{\dot{\mathscr{C}}_*^1} < \infty\},$$

$$\dot{\mathscr{C}}_*^1 = \{u \in C(\mathbb{R}^d) \mid \|u\|_{\dot{\mathscr{C}}_*^1} < \infty\},$$

这里

$$\|u\|_{\dot{\mathscr{C}}_*^1} := \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d} \\ y\neq 0}} \frac{|u(x+y)-2u(x)+u(x-y)|}{|y|} < \infty. \tag{3.51}$$

命题 3.18 $\|\cdot\|_{\dot{\mathscr{C}}_*^1} \cong \|\cdot\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}}$, 进而也有 $\|\cdot\|_{\mathscr{C}_*^1} \cong \|\cdot\|_{B^1_{\infty,\infty}}$.

证明 取 $u \in \dot{B}^1_{\infty,\infty}$, $y \in \mathbb{R}^d$, 对任意 j, 直接计算

$$\begin{aligned}
&|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| \\
\leqslant&|\dot{S}_j u(x+y)+\dot{S}_j u(x-y)-2\dot{S}_j u(x)| + 4\sum_{k\geqslant j}\|\dot{\Delta}_k u\|_\infty \\
\leqslant&|\dot{S}_j u(x+y)+\dot{S}_j u(x-y)-2\dot{S}_j u(x)| + 4\sum_{k\geqslant j}2^{-k}(2^k\|\dot{\Delta}_k u\|_\infty) \\
\leqslant&|\dot{S}_j u(x+y)+\dot{S}_j u(x-y)-2\dot{S}_j u(x)| + 2^{3-j}\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

采用 Taylor 公式, 可见

$$|\dot{S}_j u(x+y)+\dot{S}_j u(x-y)-2\dot{S}_j u(x)| \leqslant |y|^2\|D^2\dot{S}_j u\|_\infty. \tag{3.53}$$

采用的经典的 Bernstein 型估计

$$\begin{aligned}
\|D^2\dot{S}_j u\|_\infty &\leqslant \sum_{k\leqslant j-1}\|D^2\dot{\Delta}_k u\|_\infty \leqslant \sum_{k\leqslant j-1}2^k(2^k\|\dot{\Delta}_k u\|_\infty) \\
&\leqslant \sum_{k\leqslant j-1}2^k\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}} \leqslant 2^j\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

综合利用 (3.52) 与 (3.54), 就可以推出

$$|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| \leqslant (2^j|y|^2+2^{3-j})\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}}. \tag{3.55}$$

令取 $j = [-\log_2|y|\,]+1$, 容易推出

$$|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)| \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}}|y|,$$

于是

$$\sup_{x,y}\sup_{y\neq 0}\frac{|u(x+y)+u(x-y)-2u(x)|}{|y|}\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}}. \tag{3.56}$$

另一方面, $u\in\dot{\mathscr{C}}^1_*$, 仍用 $\hat{\varphi}(\xi)$ 表示 Besov 空间定义中引入的径向光滑函数, 于是

$$\Delta_j u=2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^jy)u(x-y)dy=2^{jd}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^jy)u(x+y)dy, \tag{3.57}$$

因此

$$\Delta_j u=2^{jd-1}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^jy)(u(x+y)+u(x-y))dy. \tag{3.58}$$

注意到 $\varphi(x)$ 满足消失性条件 $\int_{\mathbb{R}^d}x^\alpha\varphi(x)dx=0$, 容易看出

$$\Delta_j u=2^{jd-1}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^jy)[u(x-y)+u(x+y)-2u(x)]dy. \tag{3.59}$$

注意到 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, 就得

$$\|\dot{\Delta}_j u\|_\infty=2^{-j-1}\int_{\mathbb{R}^d}2^j|y|\varphi(2^jy)d(2^jy)\sup_{y\neq 0}\frac{|u(x-y)+u(x+y)-2u(x)|}{|y|},$$

即

$$\|u\|_{\dot{B}^1_{\infty,\infty}}\leqslant C\|u\|_{\dot{\mathscr{C}}^1_*}.$$

□

注记 3.4 类似于 $B^s_{p,q}(\dot{B}^s_{p,q})$, 可以定义与研究另一类重要的函数空间 —— Triebel-Lizorkin 空间:

$$F^s_{p,q}:=\left\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\mid\|f\|_{F^s_{p,q}}:=\Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsq}|\Delta_j f|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_p<\infty\right\},$$

$$\dot{F}^s_{p,q}:=\left\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\mid\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}}:=\Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jsq}|\dot{\Delta}_j f|^q\Big)^{\frac{1}{q}}\Big\|_p<\infty\right\}.$$

它包含了重要的 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)=\dot{F}^0_{\infty,2}$, Hardy 空间 $\mathscr{H}^1=\dot{F}^0_{1,2}$ 及位势 Banach 空间 $\mathcal{L}^s_p=(I-\Delta)^{-s/2}L^p=F^s_{p,2}$, $\dot{\mathcal{L}}^s_p=(-\Delta)^{-s/2}L^p=\dot{F}^s_{p,2}$ 等有用的函数空间, 详细讨论可参考 Triebel 的书或苗长兴的《调和分析及其在偏微分方程的应用》一书.

1.4 Bony 的仿积分解与仿线性化技术

本节主要借助于所谓的 Bony 的仿积分解技术研究 Besov 空间上缓增分布函数的乘积运算、光滑函数在 Besov 空间上的作用. 具体地讲, 对于满足 $f(0)=0$ 的光滑函数, 若 $u\in B^s_{p,r}$, 那么 $f(u)\in B^s_{p,r}$ 是否成立? 研究的基础是 Littlewood-Paley 的二进制分解及 Besov 空间的控制刻画定理.

1. Bony 分解

记 $u,v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 形式演算就有

$$u=\sum_{j'}\Delta_{j'}u,\quad v=\sum_{j}\Delta_j v,\quad uv=\sum_{j',j}\Delta_{j'}u\Delta_j v\quad (\text{非齐次分解}).$$

对于 $u,v\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d)$, 相应地, Littlewood-Paley 的二进制分解就是

$$u=\sum_{j'}\dot{\Delta}_{j'}u,\quad v=\sum_{j}\dot{\Delta}_j v,\quad uv=\sum_{j',j}\dot{\Delta}_{j'}u\dot{\Delta}_j v\quad (\text{齐次分解}).$$

需要指出的是, 对于 $u\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d)$, 总使用如下记号:

$$\dot{S}_j u=\sum_{j'\leqslant j-1}\dot{\Delta}_{j'}u,\quad j\in\mathbb{Z},\quad u\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d).$$

定义 4.1 定义 u 与 v 仿积如下:

$$\begin{cases}T_u v:=\sum_j S_{j-1}u\Delta_j v, & \dot{T}_u v:=\sum_j \dot{S}_{j-1}u\dot{\Delta}_j v,\\ T_v u:=\sum_j S_{j-1}v\Delta_j u, & \dot{T}_v u:=\sum_j \dot{S}_{j-1}v\dot{\Delta}_j u;\end{cases}\tag{4.1}$$

仿积的余项 $R(u,v)$ 定义如下:

$$R(u,v):=\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\Delta_{j'}u\Delta_j v,\qquad \dot{R}(u,v):=\sum_{|j-j'|\leqslant 1}\dot{\Delta}_{j'}u\dot{\Delta}_j v.\tag{4.2}$$

于是, uv 的 Bony 分解可以形式地表示成

$$\begin{cases}uv=T_u v+T_v u+R(u,v), & u,v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\\ uv=\dot{T}_u v+\dot{T}_v u+\dot{R}(u,v), & u,v\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d).\end{cases}\tag{4.3}$$

注记 4.1 缓增分布函数的仿积分解是 Bony 在研究双曲方程解的奇性传播时首次引入的, 经过 Meyer 等数学家发展后广泛地应用到偏微分方程的研究. Bony 仿积分解的特点就是将缓增分布函数的乘积分解成两种不同类型的相互作用, 其一是 “平衡” 型相互作用 $-R(u,v)$, 其二就是 “高 - 低” 或 “低 - 高” 相互作用 $-T_u v$ 或 $T_v u$. 这两种相互作用具有如下的特点:

- “平衡” 型相互作用项 $R(u,v)$ 的优势在于微分运算可以平均作用到每一个因子上, 这样可以避免导数损失.
- “高–低” 型相互作用的仿积部分 $T_u v$ 对应着高–低频相互作用, 可以视为 v 的 “线性算子”, 线性算子的系数依赖于低频. 例如

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}}\leqslant C\|u\|_\infty\|v\|_{B^s_{p,r}},\quad s\in\mathbb{R}.$$

这也说明 Bony 仿积 $T_u v$ 的正则性由 v 的正则性所决定, 因此, 它不可能比 v 的正则性好.

• Bony 仿积分解可以视为将缓增分布函数的乘积分解成无限阶矩阵形状元素的求和, $R(u,v)$ 对应着"准对角"位置的求和, $T_u v$ 对应着"下对角位置"的元素求和, $T_v u$ 正好对应着"上对角位置"的元素求和.

一般来讲, 虽然 uv 的 Bony 型仿积分解中每一个求和项是光滑函数的和, 但是 uv 的 Bony 型仿积分解可能不是良定的 (在所要求的拓扑意义下)! 由于仿积的通项总是局部化在环上, 因此任意两个缓增分布的 Bony 仿积总是良定的. 然而, Bony 分解的余项 $R(u,v)$ 也许不是良定的! 特别, 当 u,v 所属的 Besov 空间的正则指标的和是正数时 (非负的端点情形需要第二可积指标满足适当的可和条件), Bony 分解的余项 $R(u,v)$ 是良定的. 此时, 余项 $R(u,v)$ 的光滑尺度就是 u 与 v 的光滑尺度之和, 即

$$s-\frac{d}{p}=\Big(s_1-\frac{d}{p_1}\Big)+\Big(s_2-\frac{d}{p_2}\Big).$$

定理 4.1 存在常数 $C>0$, 使得对于任意 $s\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$ 及 $1\leqslant p,r_1,r_2\leqslant\infty$, 有

$$\|T_u v\|_{B^s_{p,r}}\leqslant C^{|s|+1}\|u\|_\infty\|v\|_{B^s_{p,r}}, \tag{4.4}$$

$$\|\dot T_u v\|_{\dot B^s_{p,r}}\leqslant C^{|s|+1}\|u\|_\infty\|v\|_{\dot B^s_{p,r}}, \tag{4.5}$$

$$\|T_u v\|_{B^{s-\sigma}_{p,r_{1,2}}}\leqslant \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma}\|u\|_{B^{-\sigma}_{\infty,r_1}}\|v\|_{B^s_{p,r_2}}, \tag{4.6}$$

$$\|\dot T_u v\|_{\dot B^{s-\sigma}_{p,r_{1,2}}}\leqslant \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma}\|u\|_{\dot B^{-\sigma}_{\infty,r_1}}\|v\|_{\dot B^s_{p,r_2}}, \tag{4.7}$$

这里

$$\frac{1}{r_{1,2}}=\min\Big(1,\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\Big). \tag{4.8}$$

需要指出的是, 对于齐次的情形 (4.5) 与 (4.7), 还分别要求如下条件:

$$s<\frac{d}{p},\quad 或\quad s=\frac{d}{p},\ r=1,$$

$$s-\sigma<\frac{d}{p},\quad 或\quad s-\sigma=\frac{d}{p},\ r=1.$$

证明 注意到

$$\operatorname{supp}\widehat{S_{j-1}u}\sim\Big\{\xi\ \Big|\ |\xi|\leqslant\frac{4}{3}2^{j-1}\Big\},$$

$$\operatorname{supp}\widehat{\Delta_j u}\sim\Big\{\xi\ \Big|\ \frac{3}{4}2^j\leqslant|\xi|\leqslant\frac{8}{3}2^j\Big\},$$

容易看出

$$\operatorname{supp}\widehat{S_{j-1}u\Delta_j v}\sim\Big\{\xi\ \Big|\ \frac{1}{12}2^j\leqslant|\xi|\leqslant\frac{10}{3}2^j\Big\}=2^j\tilde{\mathscr{C}}.$$

因此

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\ \widehat{S_{j-1}u\Delta_j v} \subset 2^j\tilde{\mathscr{C}}, \\ \operatorname{supp}\ \widehat{\dot{S}_{j-1}u\dot{\Delta}_j v} \subset 2^j\tilde{\mathscr{C}}, \end{cases} \qquad \tilde{\mathscr{C}} = B_{\frac{2}{3}}(0) + \mathscr{C}. \tag{4.9}$$

由于

$$T_u v = \sum_j S_{j-1}u\Delta_j v, \qquad \dot{T}_u v = \sum_j \dot{S}_{j-1}u\dot{\Delta}_j v,$$

及 (4.9) 式, 由范数的控制范数刻画命题 3.5 或引理 2.8, 可知

$$\begin{aligned} \|T_u v\|_{B^s_{p,r}} &\leqslant C^{|s|}\Big(\sum_j 2^{jsr}\|S_{j-1}u\Delta_j v\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant C^{|s|+1}\|u\|_\infty \Big(\sum_j 2^{jsr}\|\Delta_j v\|_p^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant C^{|s|+1}\|u\|_\infty\|v\|_{B^s_{p,r}}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

同理亦有

$$\|\dot{T}_u v\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant C^{|s|+1}\|u\|_\infty\|v\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.11}$$

另一方面, 当 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}<1$ 时, 采用范数的等价刻画、Hölder 不等式及离散的 Young 不等式, 可见

$$\begin{aligned} \|T_u v\|_{B^{s-\sigma}_{p,r_{1,2}}} &\leqslant C^{|s-\sigma|}\big\|\{2^{(s-\sigma)j}\|S_{j-1}u\Delta_j v\|_p\}\big\|_{\ell^{r_{1,2}}} \\ &\leqslant C^{|s-\sigma|}\Big\|\Big\{\Big(2^{sj}\|\Delta_j v\|_p\Big)\Big(\sum_{k\leqslant j-2} 2^{\sigma(k-j)}2^{-\sigma k}\|\Delta_k u\|_\infty\Big)\Big\}\Big\|_{\ell^{r_{1,2}}} \\ &\leqslant C^{|s-\sigma|}\|v\|_{B^s_{p,r_2}}\Big\|\Big\{\sum_{k\leqslant j-2} 2^{\sigma(k-j)}2^{-\sigma k}\|\Delta_k u\|_\infty\Big\}\Big\|_{\ell^{r_1}} \\ &\leqslant C^{|s-\sigma|}\frac{2^{-2\sigma}}{1-2^{-\sigma}}\|u\|_{B^{-\sigma}_{\infty,r_1}}\|v\|_{B^s_{p,r_2}} \\ &\leqslant \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma}\|u\|_{B^{-\sigma}_{\infty,r_1}}\|v\|_{B^s_{p,r_2}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

同理

$$\|\dot{T}_u v\|_{\dot{B}^{s-\sigma}_{p,r_{1,2}}} \leqslant \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma}\|u\|_{\dot{B}^{-\sigma}_{\infty,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^s_{p,r_2}}. \tag{4.13}$$

当 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}\geqslant 1$ 时, 取

$$\frac{1}{\tilde{r}_1}+\frac{1}{\tilde{r}_2}=1, \quad 并且\ \tilde{r}_1\geqslant r_1,\ \tilde{r}_2\geqslant r_2,$$

此时利用 $\ell^{r_j}\hookrightarrow\ell^{\tilde{r}_j}$ $(j=1,2)$, 就有

$$\|T_u v\|_{B^{s-\sigma}_{p,1}} \leqslant \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma}\|u\|_{B^{-\sigma}_{\infty,\tilde r_1}}\|v\|_{B^s_{p,\tilde r_2}} \leqslant \frac{C^{|s-\sigma|+1}}{\sigma}\|u\|_{B^{-\sigma}_{\infty,r_1}}\|v\|_{B^s_{p,r_2}}. \tag{4.14}$$

下面研究余项 $R(u,v)$ 的估计. 注意到

$$\text{supp }(\widehat{\Delta_j u\widetilde{\Delta}_j v}) \sim \left\{\xi \mid |\xi| \leqslant \frac{24}{3}2^j\right\} = 2^j B_8(0). \tag{4.15}$$

故我们建立谱支撑在球上时的控制模刻画 (支撑在环上的等价范数刻画已证明, 见命题 3.5 与推论 3.6, 对 s 没有条件限制). □

命题 4.2 设 B 是 $\mathbb{R}^d$ 上的球, $s>0$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $\{u_j\}$ 是光滑函数序列, 满足

$$\text{supp } \hat{u}_j \subset 2^j B \quad 且 \ \left\|\{2^{js}\|u_j\|_p\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^r} < \infty. \tag{4.16}$$

则

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in B^s_{p,r} \quad 且 \ \|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \frac{C}{s}\left\|\{2^{js}\|u_j\|_p\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell^r}. \tag{4.17}$$

此结果对于齐次的情形仍然成立, 不同之处在于还要求如下条件:

$$s < \frac{d}{p}, \quad 或\ s = \frac{d}{p}, \ r = 1.$$

证明 对 $\forall j$, (4.16) 意味着

$$\|u_j\|_p \leqslant C2^{-js}, \tag{4.18}$$

此意味着 $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} u_j$ 在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中是收敛的级数, 并记 $u = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} u_j$. 记 $\mathscr{C}$ 是 Littlewood-Paley 分解中定义的环, 则存在 N_1 使得

$$2^{j'}\mathscr{C} \cap 2^j B = \varnothing, \quad j' > j + N_1. \tag{4.19}$$

于是

$$j' \geqslant j + N_1 \implies \mathcal{F}(\Delta_{j'} u_j) = 0 \implies \Delta_{j'} u_j = 0. \tag{4.20}$$

因此

$$\|\Delta_{j'} u\|_p = \Big\|\sum_{j\geqslant j'-N_1} \Delta_{j'} u_j\Big\|_p \leqslant \sum_{j\geqslant j'-N_1} \|\Delta_{j'} u_j\|_p \leqslant \sum_{j\geqslant j'-N_1} \|u_j\|_p.$$

从而

$$2^{j's}\|\Delta_{j'} u\|_p \leqslant \sum_{j\geqslant j'-N_1} 2^{j's}\|u_j\|_p \leqslant \sum_{j\geqslant j'-N_1} 2^{(j'-j)s}2^{js}\|u_j\|_p. \tag{4.21}$$

采用离散的 Young 不等式, 有

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \big\|\{c_k\}\big\|_{\ell^1}\big\|\{d_m\}\big\|_{\ell^r} \leqslant C_s\|\{2^{js}\|u_j\|_p\}_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell^r},$$

这里

$$c_k = I_{[-N_1,\infty)}(k)2^{-ks}, \qquad d_m = 2^{ms}\|u_m\|_p. \qquad \square$$

注记 4.2 (4.21) 可以改写成

$$2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_p \leqslant \sum_{j\geqslant j'-N_1} 2^{(j'-j)s}2^{js}\|u_j\|_p \leqslant 2^{sN_1}\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-|j'-j|s}2^{js}\|u_j\|_p. \tag{4.22}$$

直接利用离散的 Young 不等式就可以推出相同的结果.

定理 4.3 存在常数 $C>0$, 使得

(1) 对于任意 $1\leqslant p, r_1, r_2, p_1, p_2 \leqslant \infty$ 及 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, 如果

$$s_1+s_2>0, \quad \frac{1}{p}\leqslant \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1, \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=:\frac{1}{r}\leqslant 1. \tag{4.23}$$

则成立如下估计:

$$\|R(u,v)\|_{B^{\sigma_{12}}_{p,r}} \leqslant \frac{C^{|s_1+s_2|+1}}{s_1+s_2}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}, \tag{4.24}$$

$$\|\dot{R}(u,v)\|_{\dot{B}^{\sigma_{12}}_{p,r}} \leqslant \frac{C^{|s_1+s_2|+1}}{s_1+s_2}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}, \tag{4.25}$$

这里

$$\sigma_{12}-\frac{d}{p} = \Big(s_1-\frac{d}{p_1}\Big)+\Big(s_2-\frac{d}{p_2}\Big). \tag{4.26}$$

对于齐次的情形 (4.25), 还要求如下条件:

$$\sigma_{12}<\frac{d}{p}, \quad 或 \quad \sigma_{12}=\frac{d}{p}, \ \ r=1.$$

(2) 对于任意 $s_1, s_2\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p, r_1, r_2, p_1, p_2\leqslant\infty$, 如果

$$s_1+s_2=0, \quad \frac{1}{p}\leqslant \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1, \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=1, \tag{4.27}$$

则成立如下估计:

$$\|R(u,v)\|_{B^{\sigma_{12}}_{p,\infty}} \leqslant C^{|s_1+s_2|+1}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}, \tag{4.28}$$

$$\|\dot{R}(u,v)\|_{\dot{B}^{\sigma_{12}}_{p,\infty}} \leqslant C^{|s_1+s_2|+1}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}, \tag{4.29}$$

这里 σ_{12} 同 (4.26) 所定义的一样. 对于齐次的情形 (4.29), 还要求 $\sigma_{12}<\dfrac{d}{p}$.

证明 仅就齐次情形来证明 (非齐次情形同理可处理). 记

$$\dot{R}(u,v)=\sum_j \dot{R}_j,\quad \dot{R}_j:=\dot{\tilde{\Delta}}_j u\dot{\Delta}_j v=\sum_{k=-1}^{1}\dot{\Delta}_{j-k}u\dot{\Delta}_j v, \tag{4.30}$$

$$\text{supp}\ \widehat{\dot{R}_j}:=\widehat{\dot{\tilde{\Delta}}_j u\dot{\Delta}_j v}\subset 2^j B_8(0). \tag{4.31}$$

因此, 存在 $N_0>0$ 使得

$$\dot{\Delta}_{j'}\dot{R}_j=0,\quad j'>j+N_0,$$

因此

$$\dot{\Delta}_{j'}\dot{R}(u,v)=\sum_{j'\leqslant j+N_0}\dot{\Delta}_{j'}\dot{R}_j. \tag{4.32}$$

定义

$$\frac{1}{p_{12}}:=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\qquad p_{12}\in[1,\infty],\qquad p_{12}\leqslant p. \tag{4.33}$$

由范数的定义与 Bernstein 估计可见

$$\begin{aligned}
2^{j'\sigma_{12}}\|\dot{\Delta}_{j'}\dot{R}(u,v)\|_p &\leqslant 2^{j'\sigma_{12}}\sum_{j'\leqslant j+N_0}\|\dot{\Delta}_{j'}\dot{R}_j\|_p\\
&\leqslant 2^{j'\sigma_{12}}\sum_{j'\leqslant j+N_0}2^{j'd(\frac{1}{p_{12}}-\frac{1}{p})}\|\dot{\Delta}_{j'}\dot{R}_j\|_{p_{12}}\\
&\leqslant 2^{j'(s_1+s_2)}\sum_{j'\leqslant j+N_0}\|\dot{\tilde{\Delta}}_j u\dot{\Delta}_j v\|_{p_{12}}\\
&\leqslant 2^{j'(s_1+s_2)}\sum_{j'\leqslant j+N_0}2^{-js_1}2^{js_1}\|\dot{\tilde{\Delta}}_j u\|_{p_1}2^{-js_2}2^{js_2}\|\dot{\Delta}_j v\|_{p_2}\\
&\leqslant \sum_{j'\leqslant j+N_0}2^{(j'-j)(s_1+s_2)}2^{js_1}\|\dot{\tilde{\Delta}}_j u\|_{p_1}2^{js_2}\|\dot{\Delta}_j v\|_{p_2}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

如果 $s_1+s_2>0$, 则

$$\begin{aligned}
\|\dot{R}(u,v)\|_{\dot{B}^{\sigma_{12}}_{p,r}} &\leqslant \sum_{k\leqslant N_0}2^{k(s_1+s_2)}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}\\
&\leqslant \frac{C^{s_1+s_2}}{s_1+s_2}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

如果 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}=1$, $s_1+s_2\geqslant 0$, 则由 (4.34) 可见

$$\begin{aligned}
\|\dot{R}(u,v)\|_{\dot{B}^{\sigma_{12}}_{p,\infty}} &\leqslant \sup_{k\leqslant N_0}\left\{2^{k(s_1+s_2)}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}\right\}\\
&\leqslant C^{|s_1+s_2|+1}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

□

推论 4.4 对于下面的齐次空间的估计, 总假设

$$s < \frac{d}{p}, \quad 或 \quad s = \frac{d}{p}, \quad r = 1.$$

(i) 存在 $C > 0$, 对任意的实数 $s > 0$, 有如下估计:

$$\|uv\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \frac{C^{s+1}}{s}(\|u\|_\infty \|v\|_{B^s_{p,r}} + \|v\|_\infty \|u\|_{B^s_{p,r}}), \tag{4.37}$$

$$\|uv\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant \frac{C^{s+1}}{s}(\|u\|_\infty \|v\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \|v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}). \tag{4.38}$$

(ii) 设 $1 \leqslant p_1, p_2, r \leqslant \infty$, 对任意 (s_1, s_2) 满足 $s_1 + s_2 > 0$, $s_1 < \dfrac{d}{p_1}$. 则

$$\|uv\|_{B^s_{p_2,r}} \leqslant C\Big(s_1 + s_2, \frac{d}{p_1} - s_1\Big)(\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}} + \|v\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}} \|u\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}), \tag{4.39}$$

$$\|uv\|_{\dot{B}^s_{p_2,r}} \leqslant C\Big(s_1 + s_2, \frac{d}{p_1} - s_1\Big)(\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,\infty}} \|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r}} + \|v\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,\infty}} \|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r}}), \tag{4.40}$$

这里

$$s = s_1 + s_2 - \frac{d}{p_1} \text{ (度的关系式)}, \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leqslant 1. \tag{4.41}$$

(iii) 对于任意 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, r_1, r_2, p_1, p_2 \leqslant \infty$, 满足

$$s_1 + s_2 \geqslant 0, \quad s_1 < \frac{d}{p_1}, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1, \quad s - \frac{d}{p} = \Big(s_1 - \frac{d}{p_1}\Big) + \Big(s_2 - \frac{d}{p_2}\Big), \tag{4.42}$$

则

$$\|uv\|_{B^s_{p,\infty}} \leqslant C\Big(s_1 + s_2, \frac{d}{p_1} - s_1\Big)(\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}} + \|u\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}} \|v\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}), \tag{4.43}$$

$$\|uv\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} \leqslant C\Big(s_1 + s_2, \frac{d}{p_1} - s_1\Big)(\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}} + \|u\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}} \|v\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}}). \tag{4.44}$$

(iv) 对任意 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, p_1, p_2, r_1, r_2 \leqslant \infty$ 满足

$$s_1 + s_2 > 0, \qquad s_j < \frac{d}{p_j}, \ j = 1, 2, \qquad p \geqslant \max(p_1, p_2). \tag{4.45}$$

则

$$\begin{cases} \|uv\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C\Big(s_1 + s_2, \dfrac{d}{p_1} - s_1, \dfrac{d}{p_2} - s_2\Big)\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}, \\ \|uv\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant C\Big(s_1 + s_2, \dfrac{d}{p_1} - s_1, \dfrac{d}{p_2} - s_2\Big)\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}, \end{cases} \tag{4.46}$$

这里

$$s - \frac{d}{p} = \Big(s_1 - \frac{d}{p_1}\Big) + \Big(s_2 - \frac{d}{p_2}\Big), \quad \frac{1}{r} = \min\Big\{1, \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big\}. \tag{4.47}$$

特别, 有我们熟悉的双线性估计

$$\begin{cases} \|uv\|_{B^{s_1+s_2-\frac{d}{p}}_{p,r}} \lesssim \|u\|_{B^{s_1}_{p,r}} \|v\|_{B^{s_2}_{p,\infty}}, \\ \|uv\|_{\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{d}{p}}_{p,r}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,r}} \|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p,\infty}}, \end{cases} \quad s_1, s_2 < \frac{d}{p}, \quad s_1 + s_2 + d\min\left(0, 1 - \frac{d}{p}\right) > 0. \tag{4.48}$$

(v) 对任意 $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, p_1, p_2, r_1, r_2 \leqslant \infty$ 满足

$$s_1 + s_2 \geqslant 0, \quad s_j < \frac{d}{p_j}, \quad j = 1, 2, \quad p \geqslant \max(p_1, p_2), \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \leqslant 1. \tag{4.49}$$

则有

$$\begin{cases} \|uv\|_{B^s_{p,\infty}} \leqslant C\left(s_1 + s_2, \dfrac{d}{p_1} - s_1, \dfrac{d}{p_2} - s_2\right) \|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}, \\ \|uv\|_{\dot{B}^s_{p,\infty}} \leqslant C\left(s_1 + s_2, \dfrac{d}{p_1} - s_1, \dfrac{d}{p_2} - s_2\right) \|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}} \|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}, \end{cases} \tag{4.50}$$

这里

$$s - \frac{d}{p} = \left(s_1 - \frac{d}{p_1}\right) + \left(s_2 - \frac{d}{p_2}\right).$$

上面的估计通常称为 Moser-型估计. 进而还有我们经常使用 (4.50) 的端点形式

$$\begin{cases} \|uv\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \|u\|_{B^s_{p,r}} \|v\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty}, \\ \|uv\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty}, \end{cases} \quad |s| < \frac{d}{p}, \tag{4.51}$$

及 (4.48) 的端点形式

$$\begin{cases} \|uv\|_{B^{-\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \lesssim \|u\|_{B^s_{p,1}} \|v\|_{B^{-\frac{d}{p}}_{p,\infty}}, \\ \|uv\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^s_{p,1}} \|v\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{p}}_{p,\infty}}, \end{cases} \quad s \in \left(-\frac{d}{p}, \frac{d}{p}\right], \quad p \geqslant 2. \tag{4.52}$$

证明概要　本质上其实完全是定理 4.1 与定理 4.3 的直接结果.

(i) (4.37),(4.38) 的仿积部分估计源于估计 (4.4) 与 (4.5). 余项部分 $R(u, v)$ 的估计直接由 (4.24) 与 (4.25) 确定, 此时, 取 $s_1 = 0$, $p_1 = r_1 = \infty$, $s = s_2$, $p_2 = p$, $r_2 = r$ 并且应用了 Sobolev 嵌入定理

$$L^\infty \hookrightarrow B^0_{\infty,\infty}, \quad L^\infty \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,\infty}.$$

(ii) 估计 (4.39) 或 (4.40) 的仿积部分, 仅需在 (4.6) 与 (4.7) 中取 $\sigma = -\left(s_1 - \dfrac{d}{p_1}\right)$, 直接看出

$$\|T_u v\|_{B^{s_1+s_2-\frac{d}{p_1}}_{p_2,r}} \leqslant \frac{C^{|s_1+s_2-\frac{d}{p_1}|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1} - s_1\right|} \|u\|_{B^{s_1-\frac{d}{p_1}}_{\infty,\infty}} \|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}$$

$$\leqslant \frac{C^{|s_1+s_2-\frac{d}{p_1}|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1}-s_1\right|}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}. \tag{4.53}$$

同理

$$\|T_v u\|_{B^{s_1+s_2-\frac{d}{p_1}}_{p_2,r}} \leqslant \frac{C^{|s_1+s_2-\frac{d}{p_1}|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1}-s_1\right|}\|v\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}}\|u\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}. \tag{4.54}$$

余项部分 $R(u,v)$ 的估计可以从 (4.24) 与 (4.25) 来确定 $\left(\text{取 } p=p_2,\ \sigma_{12}=s_1+s_2-\dfrac{d}{p_1}\right)$, 从而

$$\|R(u,v)\|_{B^{s_1+s_2-\frac{d}{p_1}}_{p_2,r}} \leqslant \frac{C^{|s_1+s_2|+1}}{s_1+s_2}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r}}. \tag{4.55}$$

同理

$$\|\dot{R}(u,v)\|_{\dot{B}^{s_1+s_2-\frac{d}{p_1}}_{p_2,r}} \leqslant \frac{C^{|s_1+s_2|+1}}{s_1+s_2}\|u\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,\infty}}\|v\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r}}. \tag{4.56}$$

(iii) 从定理 4.1 中的估计(4.6)~(4.7) 就可以导出估计 (4.43) 与 (4.44) 中仿积部分的估计. 注意到 $s_1<\dfrac{d}{p_1}$, 有

$$\begin{aligned}
\|T_u v\|_{B^{(s_1-\frac{d}{p_1})+(s_2-\frac{d}{p_2})+\frac{d}{p}}_{p,\infty}} &\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\dfrac{d}{p_1}-s_1}\|u\|_{B^{s_1-\frac{d}{p_1}}_{\infty,\infty}}\|v\|_{B^{s_2+(\frac{d}{p}-\frac{d}{p_2})}_{p,\infty}}\\
&\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\dfrac{d}{p_1}-s_1}\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,\infty}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,\infty}}\\
&\leqslant C\left(\frac{d}{p_1}-s_1,s\right)\|u\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}\|v\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

同理

$$\|T_v u\|_{B^s_{p,\infty}} \leqslant C\left(\frac{d}{p_1}-s_1,s\right)\|u\|_{B^{s_2}_{p_2,r_2}}\|v\|_{B^{s_1}_{p_1,r_1}}. \tag{4.58}$$

另一方面, 余项 $R(u,v)$ 的估计可由 (4.28),(4.29) 直接推出.

(iv) 仅就 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$ 来证明. 如果 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}>1$, 则可找到 $\tilde{r}_2\geqslant r_2$, $\tilde{r}_1\geqslant r_1$, 并且满足 $1=\dfrac{1}{\tilde{r}_1}+\dfrac{1}{\tilde{r}_2}$ 采用 $l^{r_1}\hookrightarrow l^{\tilde{r}_1}$, $l^{r_2}\hookrightarrow l^{\tilde{r}_2}$, 就可以证明相同的结果. 由 (4.6),(4.7) 可见

$$
\begin{aligned}
\|T_u v\|_{B_{p,r}^{(s_1-\frac{d}{p_1})+(s_2-\frac{d}{p_2})+\frac{d}{p}}} &\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1}-s_1\right|}\|u\|_{B_{\infty,r_1}^{s_1-\frac{d}{p_1}}}\|v\|_{B_{p,r_2}^{s_2+(\frac{d}{p}-\frac{d}{p_2})}} \\
&\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1}-s_1\right|}\|u\|_{B_{p_1,r_1}^{s_1}}\|v\|_{B_{p_2,r_2}^{s_2}}.
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

同理

$$
\|T_v u\|_{B_{p,r}^{s}} \leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_2}-s_2\right|}\|u\|_{B_{p_1,r_1}^{s_1}}\|v\|_{B_{p_2,r_2}^{s_2}}. \tag{4.60}
$$

另一方面, 余项 $R(u,v)$ 的估计可由 (4.24) 与 (4.25) 直接推出.

(v) 先考虑 (4.50) 中仿积部分的估计, 由 (4.6),(4.7),

$$
\begin{aligned}
\|T_u v\|_{B_{p,\infty}^{(s_1-\frac{d}{p_1})+(s_2-\frac{d}{p_2})+\frac{d}{p}}} &\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1}-s_1\right|}\|u\|_{B_{\infty,r_1}^{s_1-\frac{d}{p_1}}}\|v\|_{B_{p,r_2}^{s_2+(\frac{d}{p}-\frac{d}{p_2})}}, \\
&\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|\dfrac{d}{p_1}-s_1\right|}\|u\|_{B_{p_1,r_1}^{s_1}}\|v\|_{B_{p_2,r_2}^{s_2}},
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

$$
\begin{aligned}
\|T_v u\|_{B_{p,\infty}^{(s_1-\frac{d}{p_1})+(s_2-\frac{d}{p_2})+\frac{d}{p}}} &\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|s_2-\dfrac{d}{p_2}\right|}\|v\|_{B_{\infty,r_2}^{s_2-\frac{d}{p_2}}}\|u\|_{B_{p,r_1}^{s_1+(\frac{d}{p}-\frac{d}{p_1})}} \\
&\leqslant \frac{C^{|s|+1}}{\left|s_2-\dfrac{d}{p_2}\right|}\|v\|_{B_{p_2,r_2}^{s_2}}\|u\|_{B_{p_1,r_1}^{s_1}}.
\end{aligned} \tag{4.62}
$$

另一方面, 余项部分 $R(u,v)$ 的估计则由估计 (4.28) 或 (4.29) 直接给出. □

2. 应用 1: 最优的 Hardy 不等式 I

定理 4.5　设 $s\in\left[0,\dfrac{d}{2}\right)$, 则存在常数 $C>0$ 使得

$$
\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}}dx \leqslant C\|f\|_{\dot{H}^s}^2,\quad f\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^d). \tag{4.63}
$$

证明　由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 稠于 $\dot{H}^s$, 仅需对 $f(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 来证明 (4.63). 定义

$$
I_s(f)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|f(x)|^2}{|x|^{2s}}dx \leqslant \langle|\cdot|^{-2s},|f|^2\rangle. \tag{4.64}
$$

选取

$$s_1 = s_2 = s < \frac{d}{2}, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}, \quad r = 1, \quad r_1 = r_2 = 2,$$
$$s_1 + s_2 - d\Big(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}\Big) = 2s - \frac{d}{2}, \quad p = p_1 = p_2 = 2,$$

利用推论 4.4, 直接推出

$$\|f^2\|_{\dot{B}^{2s-\frac{d}{2}}_{2,1}} \leqslant \|f\|_{\dot{B}^s_{2,2}} \|f\|_{\dot{B}^s_{2,2}} \leqslant C\|f\|^2_{\dot{H}^s}.$$

由 Bony 的仿积分解技术, 可见 $f^2 \in \dot{B}^{2s-\frac{d}{2}}_{2,1} \hookrightarrow \mathcal{S}'_h$. 则由 Littlewood-Paley 分解定理可见

$$\begin{aligned}
I_s(f) &= \sum_{|j-j'|\leqslant 2} \big\langle \dot{\Delta}_j |\cdot|^{-2s}, \dot{\Delta}_{j'} f^2 \big\rangle \\
&\cong \sum_{|j-j'|\leqslant 2} \big\langle 2^{j(\frac{d}{2}-2s)} \dot{\Delta}_j |\cdot|^{-2s}, 2^{-j(\frac{d}{2}-2s)} \dot{\Delta}_{j'} f^2 \big\rangle \\
&\leqslant \|\,|x|^{-2s}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2s}_{2,\infty}} \|f^2\|_{\dot{B}^{2s-\frac{d}{2}}_{2,1}} \\
&\leqslant \|\,|x|^{-2s}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2s}_{2,\infty}} \|f\|^2_{\dot{H}^s}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\|\,|x|^{-2s}\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}-2s}_{2,\infty}} &= \sup_j \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{-2d+4s} \Big|\hat{\varphi}\Big(\frac{\xi}{2^j}\Big)\Big|^2 2^{j(d-4s)} d\xi \\
&= \sup_j \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\xi}{2^j}\Big|^{-2d+4s} \Big|\hat{\varphi}\Big(\frac{\xi}{2^j}\Big)\Big|^2 d\Big(\frac{\xi}{2^j}\Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \eta^{-2d+4s} \big|\hat{\varphi}(\eta)\big|^2 d\eta < \infty.
\end{aligned}$$

从而推出最优的 Hardy 不等式 (4.63) 成立. □

3. 应用 2: 最优的 Hardy 不等式 II

V.Mazyaz 与 T.Shaposhnikova 在文献 [MS] 证明了在非 Hilbert 型空间中的最优 Hardy 不等式.

定理 4.6 设 $d > 1, p \geqslant 1, 0 < s < 1$, $sp < d$. 则对于 $\forall u \in \dot{W}^{s,p}_0(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \leqslant C(d,p) \frac{s(1-s)}{(d-sp)^p} \|u\|^p_{W^{s,p}_0(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.66}$$

这里 $c(d,p)$ 是依赖于 d 及 p 的常数.

苑佳与张军勇独立地给出了这一不等式的推广形式的另一种证明. 即

定理 4.7 设 $p > 1, 0 \leqslant s < \dfrac{d}{p}$, 则存在常数 C 满足: 对 $\forall u \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^p}{|x|^{sp}} dx \leqslant C\|u\|^p_{\dot{W}^{s,p}}. \tag{4.67}$$

证明　令 $I_{-s}u = f$, 则 $u = I_s f$. 由 Sobolev 空间的定义, (4.67) 可以归结为证明

$$\left\| \frac{I_s f}{|x|^s} \right\|_p \leqslant C\|f\|_p. \tag{4.68}$$

令

$$\begin{aligned}
Af = \frac{I_s f}{|x|^s} &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}|x|^s} dy \\
&= \int_{|x-y|\leqslant 100|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}|x|^s} dy + \int_{|x-y|\geqslant 100|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}|x|^s} dy \\
&= A_1 f + A_2 f.
\end{aligned}$$

于是, (4.68) 的证明本质上可以归结为证明：A_1 与 A_2 是强 (p,p) 型算子. 先来考虑 $A_1 f$ 的估计. 注意到 $s>0$, 就有

$$\begin{aligned}
|A_1 f| &\leqslant \sum_{j\leqslant 0} \int_{2^{j-1}100|x|\leqslant|x-y|\leqslant 2^j 100|x|} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-s}|x|^s} dy \\
&= \sum_{j\leqslant 0} \int_{|x-y|\sim 2^j 100|x|} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{d-s}|x|^s} dy \\
&\leqslant \sum_{j\leqslant 0} \int_{|x-y|\sim 2^j 100|x|} \frac{|f(y)|}{(2^j 100|x|)^{d-s}|x|^s} dy \\
&\leqslant \sum_{j\leqslant 0} \int_{|x-y|\leqslant 2^j 100|x|} \frac{|f(y)|}{2^{jd}100^d|x|^d} dy \cdot 2^{js}100^s \\
&\leqslant 100^s \sum_{j\leqslant 0} 2^{js} \mathcal{M} f \\
&\leqslant C\mathcal{M} f.
\end{aligned}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 由 Hardy-Littlewood 定理推得 $\|A_1 f\|_p \leqslant C\|f\|_p$.

下面来考虑 $A_2 f$ 的估计. 容易看出

$$A_2 f(x) = \int_{|x-y|\geqslant 100|x|} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-s}|x|^s} dy \leqslant \int_{|y|\geqslant 99|x|} \frac{f(y)}{|y|^{d-s}|x|^s} dy \triangleq B_2 f(x).$$

对 $\forall g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\begin{aligned}
(B_2 f(x), g(x)) &= \left(\int_{|y|\geqslant 99|x|} \frac{f(y)}{|y|^{d-s}|x|^s} dy, g(x) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{|y|\geqslant 99|x|} \frac{f(y)}{|y|^{d-s}|x|^s} dy \cdot g(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|y|^{d-s}} \int_{|x|\leqslant \frac{|y|}{99}} \frac{g(x)}{|x|^s} dx \cdot f(y) dy \\
&= (Tg(y), f(y)),
\end{aligned}$$

这里

$$Tg(y) = \frac{1}{|y|^{d-s}} \int_{|x| \leqslant \frac{|y|}{99}} \frac{g(x)}{|x|^s} dx.$$

欲证 B_2 是强 (p,p) 型算子, 仅需证明

$$\|Tg(y)\|_{p'} \leqslant C\|g\|_{p'}. \tag{4.69}$$

事实上, 考虑

$$(B_2 f(x), g(x)) = (Tg(y), f(y)) \leqslant \|Tg(y)\|_{p'}\|f(y)\|_p \leqslant C\|g\|_{p'}\|f(y)\|_p,$$

由此推出 B_2 是强 (p,p) 型算子, 自然 A_2 也是强 (p,p) 型算子. 现在回头来证明 (4.69). 对 $s > 0$, 条件 $sq' < d$ 就意味着 $q > \dfrac{d}{d-s}$. 利用 Hölder 不等式就得

$$\begin{aligned}
|Tg(y)| &\leqslant \frac{1}{|y|^{d-s}} \left(\int_{|x| \leqslant \frac{|y|}{99}} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{|x| \leqslant \frac{|y|}{99}} \frac{1}{|x|^{sq'}} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leqslant C \frac{1}{|y|^{d-s}} \cdot \left(\int_{|x| \leqslant \frac{|y|}{99}} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot |y|^{(d-sq')\frac{1}{q'}} \\
&\leqslant C \frac{1}{|y|^{\frac{d}{q}}} \cdot \left(\int_{|x| \leqslant \frac{|y|}{99}} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant C(\mathcal{M}(|g|^q))^{\frac{1}{q}}(x).
\end{aligned}$$

对于 $\forall p' > q > \dfrac{d}{d-s}$ $\left(\text{即 } 1 < p < \dfrac{d}{s},\right)$, 利用推广的 Hardy-Littlewood 极大函数的不等式, 就得 T 是强 (p',p') 型算子. □

4. **应用 3**

设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $u \in B^s_{p,r}$, 则 $\varphi u \in B^s_{p,r}$.

证明 事实上, 由定理 4.1 可见

$$\|T_\varphi u\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \|\varphi\|_\infty \|u\|_{B^s_{p,r}},$$

$$\|T_u \varphi\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \begin{cases} \|\varphi\|_{B^s_{p,r}} \|u\|_\infty \lesssim \|\varphi\|_{B^s_{p,r}} \|u\|_{B^s_{p,r}}, & s > \dfrac{d}{p}, \\ \|\varphi\|_{B^{\frac{d}{p}+1}_{p,r}} \|u\|_{B^{s-\frac{d}{p}-1}_{\infty,\infty}} \lesssim \|\varphi\|_{B^{\frac{d}{p}+1}_{p,r}} \|u\|_{B^s_{p,r}}, & s \leqslant \dfrac{d}{p}. \end{cases}$$

在 $s \leqslant \dfrac{d}{p}$ 的情形, 用到了分解式

$$s = \frac{d}{p} + 1 - \left(\frac{d}{p} + 1 - s \right).$$

由定理 4.3 可见

$$\|R(u,\varphi)\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \begin{cases} \|\varphi\|_{B^0_{\infty,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \|\varphi\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}, & s>0,\\ \|R(u,\varphi)\|_{B^1_{p,r}} \leqslant \|\varphi\|_{B^{1-s}_{\infty,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}}, & s\leqslant 0. \end{cases}$$

从而推出 $\varphi u \in B^s_{p,r}$. 这里在 $s\leqslant 0$ 情形, 利用 Sobolev 嵌入定理与余项的估计

$$\|R(u,\varphi)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|R(u,\varphi)\|_{B^1_{p,r}} \leqslant \|\varphi\|_{B^{1-s}_{\infty,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}},$$

这里要求

$$\sigma_{12} := 1 = \left(s_1 - \frac{d}{p_1}\right) + \left(s_2 - \frac{d}{p_2}\right) + \frac{d}{p},$$

取 $s_2 = s,\ \ p_2 = p,\ \ p_1 = \infty \Longrightarrow s_1 = 1 - s.$ □

5. 仿线性化定理

假设非线性光滑函数 f 满足 $f(0)=0$, 那么它作用到 $B^s_{p,r}$ 上是否能有 $f(u) \in B^s_{p,r}$?

定理 4.8 设 f 光滑, $f(0)=0$, $s>0$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $u\in B^s_{p,r}\cap L^\infty$, 则 $f(u)\in B^s_{p,r}$ 且

$$\|f(u)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C(s,f,\|u\|_\infty)\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{4.70}$$

注记 4.3 (1) $s>\dfrac{d}{p}$ 或 $s=\dfrac{d}{p}$, $r=1$ 时, $B^s_{p,r}\hookrightarrow L^\infty$, 则

$$\|f(u)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C(s,f,\|u\|_{B^s_{p,r}})\|u\|_{B^s_{p,r}}.$$

此意味着, 对于 Banach 代数, 可以定义乘法, 并且在光滑函数 f 作用下, 仍然属于 $B^s_{p,r}$.

(2) 由于

$$S_j u \longrightarrow u, \quad 在\ L^p(\mathbb{R}^d)\ 意义下,$$

并且 $f(0)=0$, 则

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_j f_j := \sum_j f(S_{j+1}u) - f(S_j u) \\ &= \sum_j \int_0^1 f'(S_j u + \theta\Delta_j u)d\theta\ \Delta_j u \\ &\triangleq \sum_j m_j \Delta_j u. \end{aligned} \tag{4.71}$$

由于对一般的函数 f, $\operatorname{supp}\widehat{m_j\Delta_j u}$ 无紧支集, 无法利用 Besov 空间中范数控制的刻画定理. 因此, 就需要建立如下的范数控制的刻画定理.

引理 4.9 设 $s>0$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, 存在常数 C_s 满足: 如果 $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\left\{\sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1} 2^{j(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_j\|_p\right\}_j \in \ell^r, \tag{4.72}$$

则 $u = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} u_j \in B^s_{p,r}$ 且

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C_s \left\| \left\{ \sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1} 2^{j(s-|\alpha|)} \left\|\partial^\alpha u_j\right\|_p \right\}_j \right\|_{\ell^r}. \tag{4.73}$$

证明 由于 $s > 0$, 利用 (4.72) 可见

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} \|u_j\|_p &= \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js}2^{js}\|u_j\|_p \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js} \sup_j 2^{js}\|u_j\|_p \\ &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js} \cdot \left\|\{2^{sk}\|u_k\|_p\}\right\|_{\ell^r} < \infty.\end{aligned}$$

故

$$u = \sum_{j\in\mathbb{N}} u_j \in L^p(\mathbb{R}^d). \tag{4.74}$$

因此, 仅需证明

$$\left(\sum_{j\geqslant 0} 2^{jsr}\|\Delta_j u\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C_s \left\| \left\{ \sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1} 2^{j(s-|\alpha|)} \left\|\partial^\alpha u_j\right\|_p \right\}_j \right\|_{\ell^r}.$$

对于 $\Delta_j u$ 再次进行频率分解

$$\Delta_j u = \sum_{j'\leqslant j} \Delta_j u_{j'} + \sum_{j'>j} \Delta_j u_{j'}. \tag{4.75}$$

先估计高频部分, 事实上

$$2^{js}\left\|\sum_{j'>j} \Delta_j u_{j'}\right\|_p \leqslant 2^{js}\sum_{j'>j} \|u_{j'}\|_p \leqslant \sum_{j'>j} 2^{-(j'-j)s}2^{j's}\|u_{j'}\|_p. \tag{4.76}$$

另一方面, 由 Bernstein 估计, 可见 $\|\Delta_{-1}u_{j'}\|_p \leqslant \|u_{j'}\|_p$ 及

$$\|\Delta_j u_{j'}\|_p \leqslant C2^{-j([s]+1)} \sup_{|\alpha|=[s]+1} \|\partial^\alpha u_{j'}\|_p, \quad j \geqslant 0 \quad (\text{增加导数的思想}),$$

因此

$$2^{js}\left\|\sum_{j'\leqslant j} \Delta_j u_{j'}\right\|_p \leqslant \sum_{j'\leqslant j} 2^{(j'-j)([s]+1-s)} \sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1} 2^{j'(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_{j'}\|_p. \tag{4.77}$$

从而, 由定义与离散的 Young 不等式就得

$$\begin{aligned}\|u\|_{B^s_{p,r}} &= \left\|\left\{2^{js}\|\sum_{j'} \Delta_j u_{j'}\|_p\right\}\right\|_{\ell^r} \\ &\leqslant \left(\sum_{k\geqslant 0} 2^{-ks}\right)\|\{2^{j's}\|u_{j'}\|_p\}\|_{\ell^r}\end{aligned}$$

$$+\Big(\sum_{k\leqslant 0}2^{k([s]+1-s)}\Big)\Big\{\sup_{|\alpha|=[s]+1}2^{j'(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_{j'}\|_p\Big\}_{\ell^r}$$

$$\leqslant C_s\Big\|\Big(\sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1}2^{j(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha u_j\|_p\Big)_j\Big\|_{\ell^r}, \tag{4.78}$$

这里用到了求和变量的变换. □

定理 4.8 的证明 断言:

$$\|\partial^\alpha m_j\|_\infty\leqslant C_\alpha(f,\|u\|_\infty)2^{j|\alpha|},\quad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d. \tag{4.79}$$

注意到 $f_j=m_j\Delta_j u$, 利用 Newton-Leibniz 公式、Bernstein 估计及上面断言就得

$$\begin{aligned}\|\partial^\alpha f_j\|_p&\leqslant\sum_{\beta\leqslant\alpha}C_\beta^\alpha 2^{j|\beta|}C_\beta(f,\|u\|_\infty)2^{j(|\alpha|-|\beta|)}\|\Delta_j u\|_p\\&\leqslant C_\alpha(f,\|u\|_\infty)2^{j|\alpha|}\|\Delta_j u\|_p\\&\leqslant c_jC_\alpha(f,\|u\|_\infty)2^{-j(s-|\alpha|)}\|u\|_{B^s_{p,r}},\quad \|\{c_j\}\|_{\ell^r}=1.\end{aligned} \tag{4.80}$$

因此

$$\sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1}2^{j(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha f_j\|_p\leqslant c_j\|u\|_{B^s_{p,r}}\sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1}C_\alpha(f,\|u\|_\infty).$$

利用范数的刻画引理 4.9, 就可以推出

$$\|f(u)\|_{B^s_{p,r}}\leqslant C_s\Big\|\Big\{\sup_{|\alpha|\leqslant[s]+1}2^{j(s-|\alpha|)}\|\partial^\alpha f_j\|_p\Big\}\Big\|_{\ell^r}\leqslant C_s\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{4.81}$$

下面仅需证明断言 (4.79). 利用 Faá-di-Bruno 公式

$$\partial^\alpha g(a)\cong\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=\alpha\\|\alpha_j|\geqslant1}}\Big(\prod_{k=1}^p\partial^{\alpha_k}a\Big)g^{(p)}(a). \tag{4.82}$$

由此公式可见

$$\partial^\alpha m_j=\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=\alpha\\|\alpha_j|\geqslant1}}\int_0^1\prod_{k=1}^p\partial^{\alpha_k}(S_ju+t\Delta_ju)f^{(p+1)}(S_ju+t\Delta_ju)dt.$$

采用 Bernstein 估计, 并注意到 $\|u\|_\infty<\infty$, 就可以推出

$$\|\partial^\alpha m_j\|_\infty=C_\alpha(f)\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=\alpha\\|\alpha_j|\geqslant1}}\int_0^1\prod_{k=1}^p2^{j|\alpha_k|}\|u\|_\infty dt\leqslant C_\alpha(f,\|u\|_\infty)2^{j|\alpha|}, \tag{4.83}$$

其中 $C_\alpha(f)$ 表示连续函数 $f^{(p+1)}$ 在闭球 $\{y;|y|\leqslant\|u\|_\infty\}$ 上的上界. □

我们发现, 估计 (4.79) 在上面定理的证明中起关键作用, 是否可以改进? 对于 $|\alpha_k|\geqslant1$, 注意到 $S_{-1}=0$, 及 $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 根据 Bernstein 估计就得

$$
\begin{aligned}
\|\partial^{\alpha_k}(S_ju+t\Delta_ju)\|_\infty \leqslant&\|\partial^{\alpha_k}S_ju\|_\infty+\|\partial^{\alpha_k}\Delta_ju\|_\infty\\
\leqslant&C2^{j(|\alpha_k|-1)}\|S_j\nabla u\|_\infty+2^{j|\alpha_k|}\|\Delta_ju\|_\infty\\
\leqslant&C2^{j(|\alpha_k|-1)}\sum_{j'\leqslant j-1}2^{j'}2^{-j'}\|\Delta_{j'}\nabla u\|_\infty+2^{j|\alpha_k|}2^{-j}\|\Delta_j\nabla u\|_\infty\\
\leqslant&C2^{j(|\alpha_k|-1)}\sum_{j'\leqslant j-1}2^{j'}\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}+2^{j|\alpha_k|}\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\\
\leqslant&C2^{j|\alpha_k|}\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}.
\end{aligned}\tag{4.84}
$$

(4.79) 可以用形如下面的估计来替代:

$$
\|\partial^\alpha m_j\|_\infty\leqslant C_\alpha(f,\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}})2^{j|\alpha|},\quad \forall\alpha\in\mathbb{N}^d.\tag{4.85}
$$

注意到

$$
\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\leqslant\|u\|_{B^0_{\infty,\infty}}\lesssim\|u\|_\infty,
$$

我们有如下推广的结果:

定理 4.10 设 $f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f(0)=0$, $s>0$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $u\in B^s_{p,r}$, $\nabla u\in B^{-1}_{\infty,\infty}$, 则 $f(u)\in B^s_{p,r}$, 并且满足

$$
\|f(u)\|_{B^s_{p,r}}\leqslant C(s,f,\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}})\|u\|_{B^s_{p,r}}.\tag{4.86}
$$

注记 4.4 注意到

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\leqslant&\|S_0u\|_\infty+\sup_{j\in\mathbb{N}}2^{-j}\|\Delta_j\nabla u\|_\infty\\
\leqslant&\|S_0u\|_\infty+\sup_{j\in\mathbb{N}}2^{j\frac{d}{p}}\|\Delta_ju\|_p\\
\lesssim&\|u\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,\infty}}\lesssim\|u\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,r}}.
\end{aligned}
$$

由此推出

$$
\begin{aligned}
\|f(u)\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,r}}=&\|f\circ u\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,r}}\leqslant C\big(s,f,\|\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\big)\|u\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,r}}\\
\leqslant&C\Big(s,f,\|u\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,r}}\Big)\|u\|_{B^{\frac{d}{p}}_{p,r}}.
\end{aligned}
$$

此意味着 $B^{\frac{d}{p}}_{p,r}$ 在 $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ 函数作用下是稳定的, 这里之所以增加 $C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$ 条件是对 $B^{\frac{d}{p}}_{p,r}\not\hookrightarrow L^\infty$ 的补偿. 特别, 这一估计对于 $H^{\frac{d}{2}}=B^{\frac{d}{2}}_{2,2}$ 是有效的.

上面的复合函数是在理想状态下给出的, 现在回到实用的层次上, 它可以表达为

定理 4.11 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是含原点的开区间. $s>0$, σ 是满足条件 $\sigma>s$ 的最小整数. $f:I\mapsto\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=0$ 且 $f'\in W^{\sigma,\infty}(I,\mathbb{R})$. 设 $u\in B^s_{p,r}\cap L^\infty$ 取值在区间 $J\subset\subset I$, 则 $f(u)\in B^s_{p,r}$ 并且

$$\|f(u)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C(1+\|u\|_\infty)^\sigma \|f'\|_{W^{\sigma,\infty}(I)}\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{4.87}$$

证明 思路类似于定理 4.8 的证明. 这里将给出 $C(s,f,\|u\|_\infty)$ 的具体依赖关系. 利用延拓定理, 可以把 f 延拓成 $\tilde{f}\in W^{\sigma+1,\infty}(\mathbb{R})$, supp $\tilde{f}\subset I$ 并且在 J 上.

$$\tilde{f}=f$$

因此, 可以无妨假设 $f\in W^{\sigma+1,\infty}(\mathbb{R})$, 且 supp $f\subset I$.

第一步. 注意到 $S_{-1}\equiv 0$, 由中值定理容易看出

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{j'\geqslant -1}(f(S_{j'+1}u)-f(S_{j'}u)) \\ &= \sum_{j'\geqslant -1} m_{j'}\Delta_{j'}u, \quad m_{j'} := \int_0^1 f'(S_{j'}u+\tau\Delta_{j'}u)d\tau. \end{aligned} \tag{4.88}$$

利用 Faá-di-Bruno 公式, 容易看出 m_p 是一个 Meyer 型乘子, 即满足

$$\|D^k m_{j'}\|_\infty \leqslant C_k 2^{j'k}(1+\|u\|_\infty)^k\|f'\|_{W^{k,\infty}}, \quad \forall k=\{0,1,2,\cdots,\sigma\}. \tag{4.89}$$

特别, 当 $k=0$ 时, 上式就意味着

$$\|f(S_{j'+1}u)-f(S_{j'}u)\|_p \leqslant C2^{-j's}\sup_{j'} 2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_p. \tag{4.90}$$

由于 $s>0$, 从而推知分解 (4.88) 在 L^p 意义下成立, $f(u)\in L^p$.

第二步. 证明 $f(u)\in B^s_{p,r}$. 注意到 $f(0)=0$, 对所有 $j\geqslant -1$, 分频就得

$$\Delta_j f(u) = \sum_{-1\leqslant j'\leqslant j-1}\Delta_j(m_{j'}\Delta_{j'}u)+\sum_{j'\geqslant j}\Delta_j(m_{j'}\Delta_{j'}u) \triangleq \Delta_j^l+\Delta_j^h. \tag{4.91}$$

先来考虑低频部分 Δ_j^l. 利用 Bernstein 估计、Leibniz 公式可见

$$\begin{aligned} 2^{js}\|\Delta_j(m_{j'}\Delta_{j'}u)\|_p &\lesssim 2^{(s-\sigma)j}\|\partial^\sigma\Delta_j(m_{j'}\Delta_{j'}u)\|_p \\ &\leqslant \|f'\|_{W^{\sigma,\infty}(I)}(1+\|u\|_\infty)^\sigma 2^{\sigma j'}2^{(s-\sigma)j}\|\Delta_{j'}u\|_p \\ &\lesssim (1+\|u\|_\infty)^\sigma\|f'\|_{W^{\sigma,\infty}}2^{(\sigma-s)(j'-j)}2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_p. \end{aligned}$$

注意到 $\sigma>s$, 并利用离散的 Young 不等式可见

$$\left(\sum_j 2^{rjs}\|\Delta_j^l\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \|f'\|_{W^{\sigma,\infty}}(1+\|u\|_\infty)^\sigma\|u\|_{B^s_{p,r}}, \tag{4.92}$$

由等价模的定义就得 $\sum\Delta_j^l\in B^s_{p,r}$.

下面估计高频部分. 事实上, 由 Meyer 乘子估计可见

$$2^{js}\|\Delta_j(m_{j'}\Delta_{j'}u)\|_p \lesssim \|f'\|_{L^\infty(I)}2^{(j-j')s}(2^{j's}\|\Delta_{j'}u\|_p). \tag{4.93}$$

由 $s>0$, 就可以推出

$$\left(\sum_j 2^{jrs}\|\Delta_j^h\|_p^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \|f'\|_{L^\infty(I)}\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{4.94}$$

综合 (4.92) 与 (4.94) 就证明定理 4.11. □

利用中值定理

$$f(u)-f(v)=(u-v)\int_0^1 f'(v+\tau(u-v))d\tau \tag{4.95}$$

就可以证明如下结果:

命题 4.12 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是含原点的开区间, $f:I\mapsto\mathbb{R}$, $s>0$, σ 是满足 $\sigma>s$ 的最小整数. $f'(0)=0$ 并且 $f''\in W^{\sigma,\infty}(I,\mathbb{R})$. 设 $u,v\in B^s_{p,r}$, 对于 $J\subset I$, 存在常数 $C=C(s,I,J,d)$, 有估计

$$\begin{aligned}\|f(u)-f(v)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant & C(1+\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)^\sigma\|f''\|_{W^{\sigma,\infty}(I)}\\ &\cdot[\|u-v\|_{B^s_{p,r}}(\|u\|_\infty+\|v\|_\infty)+\|u-v\|_\infty(\|u\|_{B^s_{p,r}}+\|v\|_{B^s_{p,r}})].\end{aligned} \tag{4.96}$$

有关齐次空间的情形, 有

定理 4.13 设 $I\subset\mathbb{R}$ 含原点的开区间, $s>0$, σ 是满足 $\sigma>s$ 的最小整数. $f:I\mapsto\mathbb{R}$ 满足 $f(0)=0$, $f'\in W^{\sigma,\infty}(I;\mathbb{R})$. 设 $u\in\dot{B}^s_{p,r}$ 取值在 $J\subset\subset I$ 中. 设 $s<\dfrac{d}{p}$ 或 $s=\dfrac{d}{p}$, $r=1$ 则 $f(u)\in\dot{B}^s_{p,r}$ 并且存在常数 $C=C(s,I,J,d)$ 满足

$$\|f(u)\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \leqslant C(1+\|u\|_\infty)^\sigma\|f'\|_{W^{\sigma,\infty}(I)}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.97}$$

证明概要 利用 Bernstein 估计, 对于 $\forall j\in\mathbb{Z}$, 有

$$\|f(\dot{S}_{j+1}u)-f(\dot{S}_ju)\|_p \leqslant C2^{-js}(2^{js}\|\dot{\Delta}_ju\|_p), \tag{4.98}$$

$$\|f(\dot{S}_{j+1}u)-f(\dot{S}_ju)\|_\infty \leqslant C2^{j(\frac{d}{p}-s)}(2^{js}\|\dot{\Delta}_ju\|_p). \tag{4.99}$$

由于 $s>0$, $f(0)=0$, 由于 $\dot{B}^s_{p,r}$ 是 Banach 空间, 从而推出

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}[f(\dot{S}_{j+1}u)-f(\dot{S}_ju)] \tag{4.100}$$

在 L^p+L^∞ 拓扑下收敛于 $f(u)$, 自然在 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 拓扑下亦收敛.

其次, 对于所有 $j\in\mathbb{Z}$, 分解 $\dot{\Delta}_jf(u)$ 如下:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_jf(u)&=\sum_{j'\leqslant j}\dot{\Delta}_j(m_{j'}\dot{\Delta}_{j'}u)+\sum_{j'\geqslant j}\dot{\Delta}_j(m_{j'}\dot{\Delta}_{j'}u)\\ &=:\Delta_j^l+\Delta_j^h.\end{aligned}$$

然后按定理 4.11 的方法就可以证明结果 (特别注意要求 $\dot{B}^s_{p,r}$ 是 Banach 空间的条件, 即保证分解 (4.100) 的正确性). □

6. 应用 4

Sobolev 嵌入定理的仿积证明方法.

$$\dot{B}^0_{p,2} \hookrightarrow L^p, \qquad L^{p'} \hookrightarrow \dot{B}^0_{p',2}, \qquad p \in [2,\infty). \tag{4.101}$$

证明 令 $f_p(x) = |x|^p$, 当 $p \geqslant 2$ 时, $f_p(x) \in C^2(\mathbb{R})$. 则根据 Meyer 的仿线性化技术, 可以改写成

$$f_p(u) = \sum_j f_p(\dot{S}_{j+1}u) - f_p(\dot{S}_j u) = \sum_j m_j \dot{\Delta}_j u, \quad m_j = \int_0^1 f_p'(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u)dt.$$

于是

$$\|u\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} f_p(u)dx = \sum_j \langle \dot{\Delta}_j u, m_j\rangle. \tag{4.102}$$

记 $\dot{\tilde{\Delta}}_j := \dot{\Delta}_{j-1} + \dot{\Delta}_j + \dot{\Delta}_{j+1}$, 易见

$$\langle \dot{\Delta}_j u, m_j\rangle = \langle \dot{\Delta}_j u, \dot{\tilde{\Delta}}_j m_j\rangle. \tag{4.103}$$

利用 Berntein 估计, 就得

$$\|\dot{\tilde{\Delta}}_j m_j\|_{p'} \leqslant C2^{-j} \sup_{1\leqslant \ell \leqslant d} \|\partial_\ell m_j\|_{p'}. \tag{4.104}$$

考察

$$\begin{aligned}
\|\partial_\ell m_j\|_{p'} &\leqslant \int_0^1 \big\|\partial_\ell(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u) f_p''(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u)\big\|_{p'} dt \\
&\leqslant \int_0^1 \|\partial_\ell(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u)\|_p \|f_p''(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u)\|_{\frac{p}{p-2}} dt \\
&\lesssim \int_0^1 \|\partial_\ell(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u)\|_p \|(\dot{S}_j u + t\dot{\Delta}_j u)\|_p^{p-2} dt \qquad (f_p''(x) = p(p-1)x^{p-2}) \\
&\lesssim \int_0^1 \sum_{k\leqslant j} \|\partial_\ell \dot{\Delta}_k u\|_p \cdot \|u\|_p^{p-2} dt \lesssim \int_0^1 \sum_{k\leqslant j} 2^k \|\dot{\Delta}_k u\|_p \cdot \|u\|_p^{p-2} dt \\
&\leqslant \int_0^1 2^j \sum_{k\leqslant j} 2^{k-j} \|\dot{\Delta}_k u\|_p dt \|u\|_p^{p-2} \lesssim 2^j \sum_{k\leqslant j} 2^{k-j} c_k \|u\|_{\dot{B}^0_{p,2}} \|u\|_p^{p-2},
\end{aligned} \tag{4.105}$$

这里 $\{c_k\}_k \in l^2$. 将上式代入 (4.104), 就有

$$\|\dot{\tilde{\Delta}}_j m_j\|_{p'} \lesssim \sum_{k\leqslant j} 2^{k-j} c_k \|u\|_{\dot{B}^0_{p,2}} \|u\|_p^{p-2}.$$

因此

$$\sum_j \langle \dot{\Delta}_j u, m_j \rangle = \sum_j \langle \dot{\Delta}_j u, \dot{\tilde{\Delta}}_j m_j \rangle \leqslant \|u\|_{\dot{B}^0_{p,2}} \Big(\sum_j \|\dot{\tilde{\Delta}}_j m_j\|^2_{p'} \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \|u\|_{\dot{B}^0_{p,2}} \Big\| \Big\{ \sum_{k\leqslant j} 2^{k-j} c_k \Big\}_j \Big\|_{\ell^2} \|u\|_{\dot{B}^0_{p,2}} \|u\|_p^{p-2}.$$

于是

$$\|u\|_p^p \lesssim \|u\|_p^{p-2} \|u\|^2_{\dot{B}^0_{p,2}} \Longrightarrow \|u\|_p \leqslant \|u\|_{\dot{B}^0_{p,2}}. \qquad \square$$

注记 4.5 $L^{p'} \hookrightarrow \dot{B}^0_{p',2}$ $(p>2)$ 是 $\dot{B}^0_{p,2} \hookrightarrow L^p$ 的对偶形式. 利用 Sobolev 嵌入定理, 易见

$$\dot{H}^s = \dot{B}^s_{2,2} \hookrightarrow \dot{B}^0_{p,2} \hookrightarrow L^p, \qquad p = \frac{2d}{d-2s}.$$

这一嵌入关系也可以利用 L^p 范数的分布表示的技术给出证明.

1.5 新型的 Bernstein 不等式

本节研究支撑在频段上的函数的 Bernstein 估计 (亦可成为 Poincaré 型定理), 它在研究输运方程的解在 Besov 空间框架下正则性的保持、扩散方程及输运扩散方程在 Besov 空间的框架下的光滑效应中起着极其重要的作用.

定理 5.1 设 $d \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. 则对任意的 $j \in \mathbb{Z}$, 存在 $c_d = c(d) > 0$ 满足如下 Bernstein 估计:

$$c_d \frac{2^{2j}}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_j f|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \Delta_j f|^2 |\Delta_j f|^{p-2} dx = -\frac{1}{p-1} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\Delta_j f |\Delta_j f|^{p-2} \Delta_j f dx. \tag{5.1}$$

证明 情形 1. $p \geqslant 2$. 由分部积分公式, 直接推出 (5.1) 中的等式. 下面证明 (5.1) 中的不等式. 利用尺度变换技术, 仅需对于 $j=0$ 的情形予以证明. 选取一簇具有紧支集的光滑函数 $\{\theta_k\}_{1\leqslant k\leqslant d}$ 满足:

$$\mathrm{supp}\theta_k \subset \widetilde{\mathcal{C}} = \Big\{ \xi \,\Big|\, \frac{3}{8} < |\xi| < \frac{16}{3} \Big\}, \quad 且 \quad \xi_k \neq 0, \ \forall \xi \in \mathrm{supp}\theta_k,$$

及

$$\sum_{k=1}^d \theta_k(\xi) = 1, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{C} \triangleq \Big\{ \xi \,\Big|\, \frac{3}{4} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{8}{3} \Big\} \text{ 的某个邻域}.$$

自然, $\tilde{\theta}_k(\xi) = i\xi_k^{-1}\theta_k(\xi)$ 是具有紧支集的光滑函数.

利用 Parseval 恒等式及 $\tilde{\theta}(\xi)$ 的定义, 直接看出

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_0 f|^p dx = \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \partial_k (\Delta_0 f |\Delta_0 f|^{p-2}) \overline{\tilde{\theta}_k(D) \Delta_0 f} dx$$
$$= (p-1) \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_0 f|^{p-2} \partial_k \Delta_0 f \overline{\tilde{\theta}_k(D) \Delta_0 f} dx. \tag{5.2}$$

注意到

$$\tilde{\theta}_k(\xi) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\tilde{\theta}_k \in L^1 \Longrightarrow \|\tilde{\theta}_k(D)g\|_p \lesssim \|g\|_p.$$

因此, 利用 Hölder 不等式, 就推出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_0 f|^p dx &\leqslant (p-1)\sum_{k=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\Delta_0 f|^{p-2}|\partial_k \Delta_0 f|\right)^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\Delta_0 f\|_p \\ &= (p-1)\sum_{k=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(|\Delta_0 f|^{p-2}|\partial_k \Delta_0 f|^2\right)^{\frac{p}{2(p-1)}} |\Delta_0 f|^{\frac{p(p-2)}{2(p-1)}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \|\Delta_0 f\|_p \\ &\lesssim (p-1)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \Delta_0 f|^2 |\Delta_0 f|^{p-2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \|\Delta_0 f\|_p^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

由此就可推出 (5.1) 中的不等式.

情形 2. $1 < p < 2$. 令 $T_\varepsilon(x) = \sqrt{x^2+\varepsilon^2}$, 则利用分部积分就推出

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\Delta_0 f\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-1} T_\varepsilon'(\Delta_0 f)dx &= (p-1)\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\Delta_0 f|^2 \big|T_\varepsilon'(\Delta_0 f)\big|^2 \big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-2} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \Delta_0 f|^2 T_\varepsilon''(\Delta_0 f)\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-1} dx. \end{aligned} \tag{5.4}$$

注意到

$$\left|\Delta\Delta_0 f\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-1} T_\varepsilon'(\Delta_0 f)\right| \leqslant \big|\Delta_0 f\big|^{p-1}\big|\Delta\Delta_0 f\big| \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

因此, 利用 Lebesgue 控制收敛定理, 就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta(\Delta_0 f)\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-1} T_\varepsilon'(\Delta_0 f)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_0 f\big|\Delta_0 f\big|^{p-2}\Delta\Delta_0 f dx. \tag{5.5}$$

注意到 $\big|T_\varepsilon'(\Delta_0 f)\big|^2\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-2}$ 是一个非负的单调列. 因此, 根据单调收敛定理就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\Delta_0 f|^2 \big|T_\varepsilon'(\Delta_0 f)\big|^2\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-2} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \big|\nabla\Delta_0 f\big|^2 |\Delta_0 f|^{p-2} dx. \tag{5.6}$$

此意味着

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|\nabla\Delta_0 f\big|^2 |\Delta_0 f|^{p-2} dx \leqslant -\frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d} \Delta(\Delta_0 f)\big|\Delta_0 f\big|^{p-2}\Delta_0 f dx < \infty. \tag{5.7}$$

断言: 上面不等式本质上就是等式. 事实上

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon''(s) T_\varepsilon^{p-1}(s) = 0, \qquad s \neq 0,$$

并且

$$T_\varepsilon''(s) T_\varepsilon^{p-1}(s) = |s|^{p-2}\frac{(\varepsilon/s)^2}{(1+(\varepsilon/s)^2)^{2-p/2}} \leqslant |s|^{p-2}.$$

因此, 注意到 $|\Delta_0 f|^{p-2}|\nabla\Delta_0 f|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 利用 Lebesgue 控制收敛定理, 就有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Delta_0 f\neq 0} |\nabla\Delta_0 f|^2 T_\varepsilon''(\Delta_0 f)\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-1}dx = 0.$$

另一方面, 由于 $\Delta_0 f$ 是解析函数, 则

$$\int_{\Delta_0 f=0} |\nabla\Delta_0 f|^2 T_\varepsilon''(\Delta_0 f)\big(T_\varepsilon(\Delta_0 f)\big)^{p-1}dx = \varepsilon^{p-2}\int_{\Delta_0 f=0}|\nabla\Delta_0 f|^2 dx = 0.$$

从而断言获证.

最后, 证明 (5.1) 中的不等式. 将 (5.2) 变形, 可见

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_0 f|^p dx &= -\sum_{k=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\overline{\partial_k(\Delta_0 f)}\ \widetilde{\theta}_k(D)\big(\Delta_0 f|\Delta_0 f|^{p-2}\big)dx\\ &= -\sum_{j=k}^d\int_{\mathbb{R}^d}\Big(|\Delta_0 f|^{\frac{p}{2}-1}\overline{\partial_k(\Delta_0 f)}\Big)|\Delta_0 f|^{1-\frac{p}{2}}\ \widetilde{\theta}_k(D)\big(\Delta_0 f|\Delta_0 f|^{p-2}\big)dx. \quad (5.8)\end{aligned}$$

将下面 Hölder 不等式

$$\int_{\mathbb{R}^d} ghm dx \leqslant \|g\|_\alpha\|h\|_\beta\|m\|_\gamma,\quad \alpha=2,\ \beta=\frac{2p}{2-p},\ \gamma=\frac{p}{p-1}$$

应用到 (5.8), 取

$$g=|\Delta_0 f|^{\frac{p}{2}-1}\overline{\partial_k(\Delta_0 f)},\quad h=|\Delta_0 f|^{1-\frac{p}{2}},\quad m=\widetilde{\theta}_k(D)\big(\Delta_0 f|\Delta_0 f|^{p-2}\big),$$

就可得到

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_0 f|^p dx \leqslant \Big(\sum_{k=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\big|\partial_k(\Delta_0 f)\big|^2|\Delta_0 f|^{p-2}dx\Big)^{\frac{1}{2}}\|\Delta_0 f\|_p^{p-1}\|\Delta_0 f\|_p^{1-\frac{p}{2}}. \quad (5.9)$$

整理就得 (5.1) 中的不等式. □

推论 5.2 *在定理 5.1 的条件下, 对任意的 $1<p<\infty$, 存在 $0<c_p\leqslant C_p<\infty$ 满足如下常用形式的新的 Bernstein 估计:*

$$c_p 2^{\frac{2j}{p}}\|\Delta_j f\|_p \leqslant \big\|\nabla(|\Delta_j f|^{\frac{p}{2}})\big\|_2^{\frac{2}{p}} \leqslant C_p 2^{\frac{2j}{p}}\|\Delta_j f\|_p. \quad (5.10)$$

证明 注意到 $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\Longrightarrow |f|\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 且 $|\nabla|f||\leqslant|\nabla f|$, 则将证明定理 5.1 的过程用于 $|\Delta_j f|$ 就得

$$\begin{aligned}c_d\frac{2^{2j}}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_j f|^p dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\big|\nabla|\Delta_j f|\big|^2|\Delta_j f|^{p-2}dx = \Big(\frac{2}{p}\Big)^2\int_{\mathbb{R}^d}\big|\nabla\big(|\Delta_j f|^{\frac{p}{2}}\big)\big|^2dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\Delta_j f|^2|\Delta_j f|^{p-2}dx = -\frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d}\Delta\Delta_j f|\Delta_j f|^{p-2}\Delta_j f dx\\ &\leqslant \frac{2^{2j}}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_j f|^p dx.\end{aligned}$$

(5.11)

两边开 p 次方即得 (5.10), 其中, 最后一步用到了 Hölder 不等式与经典的 Bernstein 不等式. □

注记 5.1 (i) 当 $p=2$ 时, 新的 Bernstein 不等式 (5.1) 或 (5.10) 就对应着经典的 Bernstein 不等式.

(ii) 设 $a(x) \geqslant a_0 > 0$ 是有界的连续函数, 在定理 5.1 的条件下, 用完全类似的方法, 就可以证明如下形式的 Bernstein 估计:

$$\begin{aligned} c_d a_0 \frac{2^j(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_j f|^p dx \leqslant & (p-1) \int_{\mathbb{R}^d} a |\nabla \Delta_j f|^2 |\Delta_j f|^{p-2} dx \\ = & - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div}\big(a \nabla (\Delta_j f)\big) |\Delta_j f|^{p-2} \Delta_j f dx. \end{aligned} \tag{5.12}$$

命题 5.3 设 $2 < p < \infty$, 存在 $0 < c_p \leqslant C_p < \infty$, 使得对任意的向量值函数 $\vec{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 满足如下常用形式的 Bernstein 估计:

$$\begin{aligned} c_p 2^{\frac{2j}{p}} \|\Delta_j \vec{f}\|_p \leqslant & \sum_{k=1}^d \Big\| |\Delta_j \vec{f}|^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_j \vec{f} \Big\|_2^{\frac{2}{p}} + \sum_{k=1}^d \Big\| |\Delta_j \vec{f}|^{\frac{p}{2}-2} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_j \vec{f} \cdot \Delta_j \vec{f} \Big\|_2^{\frac{2}{p}} \\ \leqslant & C_p 2^{\frac{2j}{p}} \|\Delta_j \vec{f}\|_p. \end{aligned} \tag{5.13}$$

证明 利用齐次性, 仅需对 $j=0$ 的情形予以证明. 令

$$\vec{g}_k = -R_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \Delta_0 \vec{f} \Longrightarrow |\Delta_0 \vec{f}|^2 = \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{g}_k \cdot \Delta_0 \vec{f},$$

直接验证, 容易推出

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_0 \vec{f}|^p dx = & \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{g}_k \Big) \cdot \Delta_0 \vec{f} |\Delta_0 \vec{f}|^{p-2} dx \\ = & - \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \vec{g}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Big(\Delta_0 \vec{f} |\Delta_0 \vec{f}|^{p-2} \Big) dx \\ \leqslant & \sum_{k=1}^d \|\vec{g}_k\|_p \Big\| |\Delta_0 \vec{f}|^{p-2} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_0 \vec{f} \Big\|_{\frac{p}{p-1}} \\ & + (p-2) \sum_{k=1}^d \|\vec{g}_k\|_p \Big\| |\Delta_0 \vec{f}|^{p-3} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_0 \vec{f} \cdot \Delta_0 \vec{f} \Big\|_{\frac{p}{p-1}} \\ \leqslant & \sum_{k=1}^d \|\vec{g}_k\|_p \Big\| |\Delta_0 \vec{f}|^{\frac{p}{2}-1} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_0 \vec{f} \Big\|_2 \|\Delta_0 \vec{f}\|_p^{\frac{p}{2}-1} \\ & + (p-2) \sum_{k=1}^d \|\vec{g}_k\|_p \Big\| |\Delta_0 \vec{f}|^{\frac{p}{2}-2} \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta_0 \vec{f} \cdot \Delta_0 \vec{f} \Big\|_2 \|\Delta_0 \vec{f}\|_p^{\frac{p}{2}-1} \end{aligned}$$

$$\leqslant C\|\Delta_0\vec{f}\|_p^{\frac{p}{2}}\sum_{k=1}^{d}\left\||\Delta_0\vec{f}|^{\frac{p}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta_0\vec{f}\right\|_2$$

$$+C\|\Delta_0 f\|_p^{\frac{p}{2}}\sum_{k=1}^{d}\left\||\Delta_0\vec{f}|^{\frac{p}{2}-2}\frac{\partial}{\partial x_k}\Delta_0\vec{f}\cdot\Delta_0\vec{f}\right\|_2. \tag{5.14}$$

因此, (5.13) 左边的不等式成立. 右边的不等式可对 (5.14) 的右边直接利用 Hölder 不等式与经典的 Bernstein 不等式得到. □

对于分数阶的耗散算子 $\Lambda^\alpha=(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, 是否成立类似的 Bernstein 不等式? 为了回答这个问题, 需要建立耗散算子 Λ^α 的正定性估计.

命题 5.4 (点态估计) 设 $0\leqslant\alpha\leqslant 2$, $p\geqslant 1$. 则对于任意的 $h(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$|h(x)|^{p-2}h(x)\Lambda^\alpha h(x)\geqslant\frac{1}{p}\Lambda^\alpha|h(x)|^p. \tag{5.15}$$

进而, 取 $\beta=p-2$, (5.15) 可以写成如下等价的形式:

$$|h(x)|^\beta h(x)\Lambda^\alpha h(x)\geqslant\frac{1}{\beta+2}\Lambda^\alpha|h(x)|^{\beta+2},\quad \beta\geqslant -1. \tag{5.16}$$

证明 当 $\alpha=0$ 或 $\alpha=2$ 时, 结果是显然的. 当 $0<\alpha<2$ 时, 利用分数阶导数的 Riesz 位势表示公式:

$$\Lambda^\alpha h(x)=C_\alpha\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{h(x)-h(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}dy. \tag{5.17}$$

因此

$$|h(x)|^{p-2}h(x)\Lambda^\alpha h(x)=C_\alpha\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|h(x)|^p-|h(x)|^{p-2}h(x)h(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}dy. \tag{5.18}$$

注意到

$$|h(x)|^{p-2}h(x)h(y)\leqslant|h(x)|^{p-1}|h(y)|\leqslant\frac{p-1}{p}|h(x)|^p+\frac{1}{p}|h(y)|^p,$$

则

$$|h(x)|^{p-2}h(x)\Lambda^\alpha h(x)\geqslant C_\alpha\frac{1}{p}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|h(x)|^p-|h(y)|^p}{|x-y|^{d+\alpha}}dy=\frac{1}{p}\Lambda^\alpha|h(x)|^p. \tag{5.19}$$

与此同时, 当 $p=1$ 时, 上面的证明仍然成立, 只是在证明的过程中直接利用 $\text{sgn}h(y)\cdot h(y)\leqslant|h(y)|$ 而得到. □

命题 5.5 (改进的正定性估计) 设 $0\leqslant\alpha\leqslant 2$, $p>1$. 则对于任意的 $h(x)$ 满足 $\Lambda^\alpha h\in L^p(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^d}|h(x)|^{p-2}h(x)\Lambda^\alpha h(x)dx\geqslant C(p)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}|h(x)|^{\frac{p}{2}}\right)^2dx, \tag{5.20}$$

这里

$$C(p) = \begin{cases} \dfrac{2}{p}, & p \geqslant 2, \\ \dfrac{2(p-1)}{p}, & 1 < p < 2. \end{cases}$$

证明　当 $\alpha = 0$, $\alpha = 2$ 或 $p = 2$ 等特殊情形下, 容易推出估计 (5.20). 下面总假设 $\alpha \in (0, 2)$.

情形 1. $p > 2$. 利用 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 稠于 $L^p(\mathbb{R}^d)$, 仅需对于 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的函数证明估计 (5.20) 即可.

令 $\ell = \frac{p}{2} - 2$, 当然有 $\ell + 1 > 0$. 因此, 利用上面的正性估计命题 5.4, 就可以推出

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^{p-2} h(x) \Lambda^\alpha h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^{\frac{p}{2}} |h(x)|^\ell h(x) \Lambda^\alpha h(x) dx \\ &\geqslant \frac{2}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^{\frac{p}{2}} \Lambda^\alpha |h(x)|^{\frac{p}{2}} dx \\ &= \frac{2}{p} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\Lambda^{\frac{\alpha}{2}} |h(x)|^{\frac{p}{2}}\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{5.21}$$

情形 2. $1 < p < 2$. 令 $\beta = \dfrac{p}{2(p-1)} - 2$, 当然有 $\beta + 1 > 0$. 因此, 利用 Fourier 变换的性质, 就可以推出

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^{p-2} h(x) \Lambda^\alpha h(x) dx \\ =& \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \Lambda^\alpha [|h(x)|^{p-2} h(x)] dx \\ =& \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^{\frac{p}{2}} |h(x)|^{(p-1)\beta} |h(x)|^{p-2} h(x) \Lambda^\alpha [|h(x)|^{p-2} h(x)] dx \\ \geqslant& \frac{2(p-1)}{p} \int_{\mathbb{R}^d} |h(x)|^{\frac{p}{2}} \Lambda^\alpha |h(x)|^{\frac{p}{2}} dx \\ =& \frac{2(p-1)}{p} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\Lambda^{\frac{\alpha}{2}} |h(x)|^{\frac{p}{2}}\right)^2 dx. \end{aligned} \tag{5.22}$$

□

引理 5.6 (非线性估计)　设 $p \in [1, \infty)$, $s \in [0, p) \cap [0, 2)$. 设 ℓ, r, m 满足

$$1 < \ell \leqslant r < \infty, \quad 1 < m < \infty, \quad \frac{1}{\ell} = \frac{1}{r} + \frac{p-1}{m}.$$

则对于非线性函数 $f(u) = |u|^p$, 成立如下的非线性估计:

$$\|f(u)\|_{\dot{B}^s_{\ell,2}} \leqslant C_p \|u\|^{p-1}_{L^m} \|u\|_{\dot{B}^s_{r,2}}. \tag{5.23}$$

证明　首先回忆一下 Besov 空间的差分型刻画. 对于 $0 \leqslant s < 2$, $1 \leqslant \ell, q \leqslant \infty$, 齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{\ell,q}$ 上的范数可表示为

$$\|v\|_{\dot{B}^s_{\ell,q}} \triangleq \left(\int_0^\infty t^{-sq} \sup_{|y|\leqslant t} \|\tau_{+y}v + \tau_{-y}v - 2v\|_\ell^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

这里 $\tau_{\pm y}v(x) = v(x \pm y)$. 特别, 当 $0 \leqslant s < 1$, 我们可由一阶差分来刻画齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{\ell,q}$ 的范数:

$$\|v\|_{\dot{B}^s_{\ell,q}} \triangleq \left(\int_0^\infty t^{-sq} \sup_{|y|\leqslant t} \|\tau_{+y}v - v\|_\ell^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

容易验证

$$|f^{[s]}(z_1) - f^{[s]}(z_2)| \leqslant C \begin{cases} (|z_1|^{p-[s]-1} + |z_2|^{p-[s]-1})|z_1 - z_2|, & p \geqslant [s]+1, \\ |z_1 - z_2|^{p-[s]}, & p < [s]+1, \end{cases} \tag{5.24}$$

这里 $f^{[s]}(z) = \partial_z^{[s]} f(z)$. 为简单起见, 令 $u_\pm \triangleq \tau_{\pm y}u$. 下面分两种情形证明引理 5.6.

情形 1. $p \geqslant 2$. 直接计算可见

$$\begin{aligned} &\tau_y f(u) + \tau_{-y} f(u) - 2f(u) = f(u_+) + f(u_-) - 2f(u) \\ =&f'(u)(u_+ + u_- - 2u) + \sum_\pm (u_\pm - u) \int_0^1 [f'(\lambda u_\pm + (1-\lambda)u) - f'(u)] d\lambda, \end{aligned} \tag{5.25}$$

利用 (5.24), 上式就意味着

$$\begin{aligned} &|f(u_+) + f(u_-) - 2f(u)| \\ \leqslant&|f'(u)||u_+ + u_- - 2u| + C\sum_\pm |u_\pm - u|^2 \{\max(|u_\pm|, |u|)\}^{p-2}. \end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, 就有

$$\begin{aligned} &\|f(u_+) + f(u_-) - 2f(u)\|_\ell \\ \leqslant&\ \|u\|_m^{p-1} \|u_+ + u_- - 2u\|_r + C\sum_\pm \|u_\pm - u\|_{2\theta}^2 \|u\|_m^{p-2}, \end{aligned}$$

这里 $\theta = \dfrac{mr}{m+r}$. 因此, 利用 Besov 空间范数的等价定义, 有

$$\|f(u)\|_{\dot{B}^s_{\ell,2}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{r,2}} \|u\|_m^{p-1} + \|u\|_m^{p-2} \|u\|^2_{\dot{B}^{\frac{s}{2}}_{2\theta,4}}.$$

利用插值不等式

$$\|u\|^2_{\dot{B}^{\frac{s}{2}}_{2\theta,4}} \leqslant \|u\|_{\dot{B}^s_{r,2}} \|u\|_{\dot{B}^0_{m,\infty}},$$

及嵌入关系 $L^m \hookrightarrow \dot{B}^0_{m,\infty}$, 就得

$$\|f(u)\|_{\dot{B}^s_{\ell,2}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{r,2}} \|u\|_m^{p-1}. \tag{5.26}$$

情形 2. $p \leqslant 2$. 利用 (5.24) 与 (5.25), 有

$$|f(u_+)+f(u_-)-2f(u)|\leqslant f'(u)|u_++u_--2u|+C\sum_{\pm}|u_\pm-u|^p.$$

类似于 (5.26) 的推导过程, 容易看出

$$\begin{aligned}\|f(u)\|_{\dot B^s_{\ell,2}}\leqslant&C(\|u\|_m^{p-1}\|u\|_{\dot B^s_{r,2}}+\|u\|^p_{\dot B^{\frac{s}{p}}_{\ell p,2p}})\\ \leqslant&C(\|u\|_m^{p-1}\|u\|_{\dot B^s_{r,2}}+\|u\|_{\dot B^s_{r,2}}\|u\|^{p-1}_{\dot B^0_{m,\infty}})\\ \leqslant&C\|u\|_m^{p-1}\|u\|_{\dot B^s_{r,2}}.\end{aligned}\tag{5.27}$$

结合 (5.26) 与 (5.27), 就得引理 5.6 的证明. □

注记 5.2 事实上, 上面非线性估计对于所有的 $p\in[1,\infty)$, $s\in[0,p)$ 都成立.

定理 5.7 (新型的 Bernstein 不等式(CMZ1)) 设 $p\in[2,\infty)$, $\alpha\in[0,1]$. 则存在两个不同的常数 c_p 及 C_p 满足如下结论: 对于任意的 $f\in\mathcal{S}'$ 及 $j\in\mathbb{Z}$, 成立

$$c_p2^{\frac{2\alpha j}{p}}\|\Delta_jf\|_p\leqslant\|\Lambda^\alpha(|\Delta_jf|^{\frac{p}{2}})\|_2^{\frac{2}{p}}\leqslant C_p2^{\frac{2\alpha j}{p}}\|\Delta_jf\|_p.\tag{5.28}$$

证明 根据齐次性及尺度变换不变性, 仅需对 $j=0$ 来证明 (5.28) 就行了. 从 Besov 空间的定义, 就可以看出

$$\|\Lambda^\alpha(|\Delta_0f|^{\frac{p}{2}})\|_2\cong\||\Delta_0f|^{\frac{p}{2}}\|_{\dot B^\alpha_{2,2}}.\tag{5.29}$$

对于 (5.29) 的右边进行非线性估计, 见引理 5.6, 就可以看出: 对于任意的 $2\leqslant p<\infty$, $\alpha\in[0,1]$, 成立

$$\||\Delta_0f|^{\frac{p}{2}}\|_{\dot B^\alpha_{2,2}}\leqslant C_p\|\Delta_0f\|_p^{\frac{p}{2}-1}\|\Delta_0f\|_{\dot B^\alpha_{p,2}}.\tag{5.30}$$

由于 $\operatorname{supp}\widehat{\Delta_0f}\subset\mathcal{C}$, 从 Besov 空间的定义就可以看出

$$\|\Delta_0f\|_{\dot B^\alpha_{p,2}}\leqslant C\|\Delta_0f\|_p.\tag{5.31}$$

结合 (5.29)~(5.31), 就得

$$\|\Lambda^\alpha(|\Delta_0f|^{\frac{p}{2}})\|_2^{\frac{2}{p}}\leqslant C_p\|\Delta_0f\|_p.\tag{5.32}$$

为了证明相反的不等式, 首先使用推论 5.2, 就可以推出

$$c_p\|f_0\|_p^{\frac{p}{2}}\leqslant\|\Lambda(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2,\tag{5.33}$$

这里 $f_0\triangleq\Delta_0f$. 为了估计 $\|\Lambda(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2$, 使用高低频分解的技术, 将 $\Lambda(|f_0|^{\frac{p}{2}})$ 写成

$$\Lambda(|f_0|^{\frac{p}{2}})=\sum_{k\geqslant M}\Lambda\Delta_k(|f_0|^{\frac{p}{2}})+\Lambda\sum_{k<M}\Delta_k(|f_0|^{\frac{p}{2}})\triangleq\Lambda P_{\geqslant M}(|f_0|^{\frac{p}{2}})+\Lambda P_{<M}(|f_0|^{\frac{p}{2}}),$$

这里 $M>0$ 是充分大的待定常数.

一方面, 对于满足 $1+\varepsilon<\frac{p}{2}$ 的小常数 $\varepsilon>0$, 有

$$\|\Lambda P_{\geqslant M}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2=\|\Lambda^{-\varepsilon}\Lambda^{1+\varepsilon}(P_{\geqslant M}|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2.$$

利用 Bernstein 估计, 有

$$\|\Lambda^{-\varepsilon}\Lambda^{1+\varepsilon}(P_{\geqslant M}|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\leqslant C_p2^{-M\varepsilon}\|\Lambda^{1+\varepsilon}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\approx C_p2^{-M\varepsilon}\||f_0|^{\frac{p}{2}}\|_{\dot{B}^{1+\varepsilon}_{2,2}}.$$

上式结合非线性估计 (引理 5.6) 就得

$$\|\Lambda P_{\geqslant M}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\leqslant C_p2^{-M\varepsilon}\|f_0\|_p^{\frac{p}{2}}. \tag{5.34}$$

另一方面, 再次利用 Bernstein 不等式, 就推出

$$\|\Lambda P_{<M}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2=\|\Lambda^{1-\alpha}\Lambda^{\alpha}(P_{<M}|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\leqslant C_p2^{M(1-\alpha)}\|\Lambda^{\alpha}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2. \tag{5.35}$$

结合 (5.33)~(5.35) 与引理 5.6, 就得

$$\begin{aligned}c_p\|f_0\|_p^{\frac{p}{2}}&\leqslant\|\Lambda(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\leqslant\|\Lambda P_{\geqslant M}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2+\|\Lambda P_{<M}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\\&\leqslant C_p\Big(2^{-M\varepsilon}\|f_0\|_p^{\frac{p}{2}}+2^{M(1-\alpha)}\|\Lambda^{\alpha}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2\Big).\end{aligned}$$

今选取 $M>0$ 满足 $C_p2^{-M\varepsilon}\leqslant\frac{1}{2}c_p$, 就得

$$c_p\|f_0\|_p^{\frac{p}{2}}\leqslant\|\Lambda^{\alpha}(|f_0|^{\frac{p}{2}})\|_2. \tag{5.36}$$

这样就完成了定理 5.7 的证明. □

注记 5.3 定理 5.7 对于 $1<p<2$ 仍然成立. 利用 Sieckel 最近建立的非线性估计, 即

命题 5.8 设 $0<\mu\leqslant1$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, $0<s<\frac{1}{p}+1$. 则存在常数 C 满足

$$\||f|^{\mu}\|_{B^{s\mu}_{\frac{p}{\mu},\frac{q}{\mu}}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|f\|^{\mu}_{B^s_{p,q}}. \tag{5.37}$$

结合定理 5.7 的证明方法, 就容易推出 $1<p<2$ 的情形. 事实上, 仅需给出 (5.31) 的证明. 注意到

$$\||\Delta_0u|^{\frac{p}{2}}\|_{B^{\alpha}_{2,2}}=\||\Delta_0u|^{\frac{p}{2}}\|_{B^{\frac{2\alpha}{p}\cdot\frac{p}{2}}_{\frac{p}{p/2},\frac{p}{p/2}}}\leqslant\|\Delta_0u\|^{\frac{p}{2}}_{B^{\frac{2\alpha}{p}}_{p,p}}, \tag{5.38}$$

从而推出

$$\||\Delta_0u|^{\frac{p}{2}}\|_{\dot{B}^{\alpha}_{2,2}}\leqslant\||\Delta_0u|^{\frac{p}{2}}\|_{B^{\alpha}_{2,2}}\leqslant\|\Delta_0u\|^{\frac{p}{2}}_{B^{\frac{2\alpha}{p}}_{p,p}}\lesssim\|\Delta_0u\|^{\frac{p}{2}}_{B^{\frac{2\alpha}{p}+1}_{p,2}}\leqslant C\|\Delta_0u\|_p^{\frac{p}{2}}, \tag{5.39}$$

就可以推出相应的结果.

第 2 章　输运扩散方程的时空正则性

本章旨在利用 Fourier 局部化方法建立输运扩散方程在 Besov 型空间中的一致性估计. 与已知的先验估计不同, 对 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,r}$ 或 $B^s_{p,r}$ 中的可积指标 p 没有限制 (因此, 可以适用于 Hölder 型的空间). 与此同时, 输运项中的向量场可以不预设满足不可压性条件. 因此, 它不仅适合于不可压的流体动力学方程, 同时可以应用到可压的流体动力学问题. 另一目的就是借助于输运扩散方程在 Besov 型空间中的一致性估计, 研究流体动力学方程的适定性问题 (特别是临界空间中的整体适定性), 与此同时, 我们期望这些统一的估计可以应用到具有大 Reynolds 数的可压或不可压流体动力学方程, 特别地, 当黏性系数趋向于 0 时的极限问题.

许多物理模型, 特别是流体动力学问题均涉及对流与扩散两种现象, 从 PDEs 的角度, 方程中既含有对流项 $v\cdot\nabla u$, 亦含有扩散项 $\nu\Delta u$(这里 ν 是非负常数, 表示黏性系数).

虽然有许多工作致力于输运方程与热方程的研究, 但是, 处理输运方程的经典方法不能适用于热方程, 反之亦然.

2.1　引　　言

本章着力讲解既含有输运, 又含有扩散效应的输运扩散方程的最优的先验估计, 这些估计特殊情形就给出了既适合输运方程, 又适合扩散方程解的先验估计. 具体地讲, 考虑

$$\begin{cases}\partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u = f,\\ u(0) = u_0(x),\end{cases}\tag{TD$_\nu$}$$

这里 $u_0(x)$ 表示初值函数, $f(x,t)$ 是给定的外力, v 是给定的向量场. 为了研究黏性系数趋向于 0(对应着 Reynolds 数趋向于 ∞ 的情形) 时的极限问题, 特别突出了 ν 的地位. 与此同时, 我们亦不厌其烦地写出 $\nu=1$ 时对应的估计, 为日后使用之便. 用

$$L^q(I;B^s_{p,r})\quad 或\quad L^q(I;\dot{B}^s_{p,r})$$

表示通常的时空 Banach 空间, 而用

$$\mathcal{L}^q(I;B^s_{p,r})\quad 或\quad \mathcal{L}^q(I;\dot{B}^s_{p,r})$$

表示混合型时空空间, 具体定义可见 2.2 节 Littlewood-Paley 理论.

1. 输运方程的先验估计 ($\nu=0$)

定理 1.1　设 $1\leqslant p\leqslant p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant r\leqslant\infty$, $s\in\mathbb{R}$ 满足

$$\begin{cases} s<1+\dfrac{d}{p_1}\ \left(\text{或当 } r=1 \text{ 时},\ \ s=1+\dfrac{d}{p_1}\right), \\ s>-\min\left(\dfrac{d}{p_1},\dfrac{d}{p'}\right)\ \left(\text{或当 } \operatorname{div}v=0 \text{ 时},\ \ s>-1-\min\left(\dfrac{d}{p_1},\dfrac{d}{p'}\right)\right). \end{cases} \tag{1.1}$$

则输运方程的解 u 满足如下先验估计:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(I;\dot{B}^s_{p,r})}\leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1(I;\dot{B}^s_{p,r})}\Big), \tag{1.2}$$

这里 $C=C(d,r,s,p,p_1)$, $I=[0,T]$ 及

$$Z(T)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}\cap L^\infty}dt, & s<1+\dfrac{d}{p_1}, \\ \displaystyle\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}dt, & s=1+\dfrac{d}{p_1},\quad r=1. \end{cases} \tag{1.3}$$

情形 1. $p_1=\infty$. 将 (1.1) 换成: 设 $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $s\in\mathbb{R}$ 满足

$$0<s<1\qquad (\text{或当 } r=1 \text{ 时},\ 0<s\leqslant 1), \tag{1.4}$$

特别, 当 $\operatorname{div}v=0$ 时, 将 (1.4) 换成

$$-1<s<1\qquad (\text{或当 } r=1 \text{ 时},\ -1<s\leqslant 1), \tag{1.5}$$

就推知输运方程的解满足时空估计 (1.2), 这里

$$Z(T)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt, & s<1, \\ \displaystyle\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}dt, & s=1, r=1. \end{cases} \tag{1.6}$$

情形 2. $p_1=\infty, p=r=2$. 在

$$0<s<1\qquad (\text{当 } \operatorname{div}v=0 \text{ 时}, -1<s<1) \tag{1.7}$$

条件下, 输运方程解对应的估计就是

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(I;\dot{H}^s)}\leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{H}^s}+\|f\|_{\mathcal{L}^1(I;\dot{H}^s)}\Big),\quad Z(T)=\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt. \tag{1.8}$$

情形 3. $p_1=p=r=\infty$. 在

$$0<s<1\quad (\text{注意, 当 } s\in\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{N} \text{ 时}, \dot{B}^s_{\infty,\infty}=\dot{\mathcal{C}}^s) \tag{1.9}$$

条件下, 输运方程解对应的估计就是

$$\|u\|_{L^\infty(I;\,\dot{\mathcal{C}}^s)}\leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{\mathcal{C}}^s}+\|f\|_{L^1(I;\dot{\mathcal{C}}^s)}\Big),\quad Z(T)=\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt. \tag{1.10}$$

情形 4. $p_1 = p$. 将 (1.1) 换成

$$\begin{cases} s < 1 + \dfrac{d}{p} \quad \left(\text{或当 } r = 1 \text{ 时}, \ s = 1 + \dfrac{d}{p}\right), \\ s > -\min\left(\dfrac{d}{p}, \dfrac{d}{p'}\right) \quad \left(\text{或当 } \operatorname{div} v = 0 \text{ 时}, \ s > -1 - \min\left(\dfrac{d}{p}, \dfrac{d}{p'}\right)\right). \end{cases} \tag{1.11}$$

就得到输运方程解的时空估计 (1.2), 这里

$$Z(T) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \|\nabla v(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,\infty} \cap L^\infty} dt, & s < 1 + \dfrac{d}{p}, \\ \displaystyle\int_0^T \|\nabla v(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} dt, & s = 1 + \frac{d}{p}, \quad r = 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

2. 热传导方程的情形 ($\nu > 0$, $v \equiv 0$)

定理 1.2　设 $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, 对任意 $s \in \mathbb{R}$, 热方程的解 u 满足如下先验估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}} \|u\|_{\mathcal{L}^\rho(I; \dot{B}^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})} \leqslant C\left(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1} \|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I; \dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})}\right), \tag{1.13}$$

这里 $1 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho \leqslant \infty$, $C = C(\rho_1, \rho)$.

若 $\nu \equiv 1$, 热方程解的先验估计可写成如下简单形式:

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\rho(I; \dot{B}^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})} \leqslant C\left(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I; \dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})}\right). \tag{1.14}$$

注记 1.1　热方程对应的最优的正则性估计 (1.13) 是 Chemin 在 1999 年采用 Fourier 局部化方法获得, 详见文献 [Chem4].

3. 输运扩散方程解的先验估计 ($\nu = 0$)

定理 1.3　设 $1 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant \rho_1, r \leqslant \infty$. 设 $s \in \mathbb{R}$ 满足条件 (1.1), 则存在常数 $C = C(n, r, s, p, p_1)$ 使得对于 (TD_ν) 方程的任意光滑解 u, 满足如下先验估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}} \|u\|_{\mathcal{L}^\rho(I; \dot{B}^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})} \leqslant Ce^{CZ(T)}\left(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1} \|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I; \dot{B}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})}\right), \tag{1.15}$$

这里 $\nu \geqslant 0$, $\rho \in [\rho_1, +\infty]$, $Z(T)$ 由 (1.3) 给出.

注记 1.2　(1) 定理 1.3(输运扩散方程解的先验估计) 的形式是由 Danchin 给出的. 类似于输运方程各种情形的讨论, 也可以获得常用的时空估计, 例如, 取 $p_1 = \infty$, 将 (1.1) 换成: 设 $1 \leqslant p, r, \rho_1 \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ 满足

$$0 < s < 1 \qquad (\text{或 } 0 < s \leqslant 1, \quad \text{若 } r = 1) \tag{1.16}$$

或

$$-1 < s < 1 \qquad (\text{或 } -1 < s \leqslant 1, \quad \text{若 } r = 1, \operatorname{div} v = 0), \tag{1.17}$$

就得到输运扩散方程解的时空估计 (1.15), 其中 $\nu \geqslant 0$, $\rho \in [\rho_1, +\infty]$, $Z(T)$ 是由 (1.6) 给出. 特别, 当 $\rho_1 = 1$, $\rho = \infty$ 时, 就退化成输运方程解的估计 (无光滑效应)

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty(I;\dot{B}^s_{p,r})} \lesssim e^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}^1(I;\dot{B}^s_{p,r})}\Big), \tag{1.18}$$

$Z(T)$ 由 (1.6) 给出.

另一方面, 若 $\operatorname{div} v = 0$, 将 $Z(t)$ 修改成

$$Z(T) = \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} dt.$$

则 (1.18) 对于端点情形 $s = -1$, $r = \infty$ 仍然成立.

(2) 对于不具光滑效应的情形, 定义 $Z(T)$ 如同 (1.6). 则 (1.18) 可以改进成

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^s_{p,r}} \lesssim e^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}} + \int_0^T e^{-CZ(\tau)}\|f(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}} d\tau\Big), \tag{1.19}$$

及新的 log-型估计

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T B^0_{p,r}} \leqslant C\big(\|u_0\|_{B^0_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}^1_T B^0_{p,r}}\big)\Big(1 + \int_0^T \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big). \tag{1.20}$$

在后面的章节里, 我们将利用 Fourier 局部化方法详细讨论包含 (1.19), (1.20) 的各式各样的时空估计.

(3) 在 $(\mathrm{TD})_\nu$ 中, 如果 $u = \operatorname{rot} v$ (或 u 可以表示成一阶齐次微分算子作用于 v), 则估计 (1.15) 对于 $s > -1$ 成立, 这里

$$Z(T) = \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt. \tag{1.21}$$

证明见引理 2.7 后面的注记 2.2.

注记 1.3 (1) 在 Hilbert 型的 Sobolev 空间 $\dot{H}^s$ 或 H^s 的框架下 ($\rho \geqslant 2$), 利用标准的能量积分方法 (不需要 Fourier 局部化), 可以建立如下估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{L^\rho(I;\dot{H}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{H}^s} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|f\|_{L^{\rho_1}(I;\dot{H}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}})}\Big).$$

在证明的过程中, 为了使 $Z(T)$ 的表达式换成形如 (1.21) 的形式, 我们仍然需要付出相同的代价, 即

$$0 < s < 1, \text{或} \ -1 < s < 1, \quad \text{若} \operatorname{div} v = 0.$$

(2) Danchin 率先将 Sobolev 空间框架下的正则性估计推广到 Besov 空间的框架下的正则性估计 (见 [Dan3]). 主要的限制是

$$1 < p < \infty, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

证明方法是基于支撑在频段上的函数的 Bernstein 估计 (亦可称为 Poincaré 定理), 即 $\forall d \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\operatorname{supp}\hat{u} \subset \mathcal{C}(0, R_1, R_2)$. 则存在 $C =$

$C(d, R_2/R_1) > 0$ 满足如下 Bernstein 估计:

$$C\frac{R_1^2}{p^2}\int_{\mathbb{R}^d}|u|^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2|u|^{p-2}udx = -\frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^d}\Delta u|u|^{p-2}udx.$$

注意到它在极限情形 $p=1$ 或 $p=\infty$ 下失效. 如何将输运扩散方程的正则性估计推广到极限情形是一件很有意义的事情. Hmidi([Hmidi1]) 在 $\mathrm{div}v=0$ 的条件下, 将上面的正则性估计推广到极限空间的情形 ($p=1$ 或 $p=\infty$). Hmidi 的思路是充分利用 (TD_ν) 的 Lagrange 形式, 通过变换可以吃掉对流项 $v\cdot\nabla u$. 作为代价, 相应的平坦空间中的 Laplace 算子 Δ 就变成非平坦空间中的 Laplace 算子. 幸运的是在 t 充分小时, 它是几乎平坦的. 因此, 可以使用二次微局部化来处理含交换子型扰动项的热传导方程.

(3) 主要定理 1.3 本质上将 Hmidi 的方法作一个变形, 然后将零散度场 v 推广到一般的向量场. 与此同时, 亦扩充了指标 (p, p_1, r, s) 的适用范围 (Hmidi 的结果对应着 $p=p_1$, 故相应的 s 的范围限制较多, 见条件 (1.1)). 与此同时, 还证明了相应的先验估计对于具有对流项的非稳态 Stokes 方程

$$\begin{cases}\partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \nabla\pi = f,\\ \mathrm{div}u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x)\end{cases} \tag{1.22}$$

仍然成立, 它可以帮助我们研究不可压 Navier-Stokes 方程的黏性极限问题.

2.2 局部化引理及交换子估计

我们沿用第 1 章的记号. 记 $\chi(\xi)$ 是支撑在 $B_{\frac{4}{3}}(0)$ 上的光滑径向函数, 满足

$$\chi(\xi)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \chi(\xi) = \begin{cases}1, & |\xi|\leqslant\dfrac{3}{4},\\ 0, & |\xi|\geqslant\dfrac{4}{3},\end{cases}$$

$\varphi(\xi) = \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$, 则齐次二进制分解对应的 Littlewood-Paley 算子可定义为

$$\dot{\Delta}_q u := \varphi(2^{-q}D)u, \quad \forall q\in\mathbb{Z}.$$

相应的低频截断算子

$$\dot{S}_q u := \chi(2^{-q}D)u, \quad \forall q\in\mathbb{Z}.$$

容易验证如下半群的局部化估计: 设 $q\in\mathbb{Z}$, 存在常数 $c, C>0$, 使得对所有的 $\lambda\geqslant 0$, $p\in[1,\infty]$ 及 $u\in\mathcal{S}_h'(\mathbb{R}^d)$, 成立

$$\|\dot{\Delta}_q e^{\lambda\Delta}u\|_{L^p} \leqslant Ce^{-c\lambda 2^{2q}}\|\dot{\Delta}_q u\|_{L^p}. \tag{2.1}$$

一般地, 有如下局部化引理:

引理 2.1 (局部化引理) 设 $\tilde{\chi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. 存在仅依赖于 $\tilde{\chi}$ 与空间维数 d 的常数 C 满足: 对任意的 C^2 型微分同胚 $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$(其反函数记为 ϕ), 及任意的 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\|\tilde{\chi}(2^{-q'}D)(\dot{\Delta}_q u \circ \psi)\|_p \lesssim \|J_\phi\|_\infty^{\frac{1}{p}} \|\dot{\Delta}_q u\|_p \big(2^{-q}\|DJ_\phi\|_\infty \|J_\psi\|_\infty + 2^{q'-q}\|D\phi\|_\infty\big),$$
$$p \in [1,\infty],\ q, q' \in \mathbb{Z}^2. \tag{2.2}$$

如果 ψ 是保持测度的微分同胚, 则

$$\|\tilde{\chi}(2^{-q'}D)(\dot{\Delta}_q u \circ \psi)\|_p \lesssim 2^{q'-q}\|J_\phi\|_\infty^{\frac{1}{p}} \| \|D\phi\|_\infty \|\dot{\Delta}_q u\|_p, \tag{2.3}$$

这里 $D\phi$ 表示 ϕ 对应的 Jacobi 矩阵, $J_\phi = |D\phi|$ 表示 $D\phi$ 对应的行列式.

证明 作为局部化引理的特例, 我们常选取 $\tilde{\chi}(2^{-q}D) = S_q$ 或 $\tilde{\chi}(2^{-q}D) = \dot{\Delta}_q$. 为书写方便, 用 $\nabla\phi$ 表示 Jacobi 矩阵 $D\phi$ 的转置矩阵. 记

$$\widetilde{\varphi} = \varphi_{-1} + \varphi + \varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

它支撑在环上且满足在 $\mathrm{supp}\varphi$ 的邻域上恒等于 1. 对于 $k = 1, \cdots, d$ 和 $q \in \mathbb{Z}$, 定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的函数如下:

$$\widehat{f}_{k,q}(\xi) = -i\xi_k|\xi|^{-2}\widetilde{\varphi}(2^{-q}\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

显然, $f_{k,q}(x) = -\partial_k(-\triangle)^{-1}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{\varphi}_q$ 满足估计

$$\|f_{k,q}(x)\|_1 \leqslant C2^{-q}, \quad \forall q \in \mathbb{Z},\ k = 1, 2, \cdots, d. \tag{2.5}$$

令

$$I_{q,q'} := \tilde{\chi}(2^{-q'}D)(\dot{\Delta}_q u \circ \psi), \quad \check{h}(x) = \mathcal{F}^{-1}\tilde{\chi}. \tag{2.6}$$

注意到

$$\dot{\Delta}_q u = \sum_{k=1}^d f_{k,q} * \partial_k \dot{\Delta}_q u. \tag{2.7}$$

因此, 对 $\forall x \in \mathbb{R}^d$, 可以将 $I_{q,q'}(x)$ 表示成

$$\begin{aligned}
I_{q,q'}(x) &= 2^{dq'} \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \check{h}(2^{q'}(x-y))(f_{k,q} * \partial_k \dot{\Delta}_q u)(\psi(y))dy \\
&= 2^{dq'} \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \check{h}(2^{q'}(x-\phi(z)))\partial_k(f_{k,q} * \dot{\Delta}_q u)(z)J_\phi(z)dz \\
&= 2^{dq'} \sum_{j,k=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} (f_{k,q} * \dot{\Delta}_q u)(z)\big[2^{q'}\partial_k\phi^j(z)\partial_j\check{h}(2^{q'}(x-\phi(z)))J_\phi(z) \\
&\quad - \check{h}(2^{q'}(x-\phi(z)))\partial_k J_\phi(z)\big]dz
\end{aligned}$$

$$= 2^{dq'} \sum_{j,k=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} (f_{k,q} * \dot{\Delta}_q u)(\psi(y)) \big[2^{q'} \partial_k \phi^j(\psi(y)) \partial_j \check{h}(2^{q'}(x-y))$$
$$- \check{h}(2^{q'}(x-y)) \partial_k J_\phi(\psi(y)) J_\psi(y) \big] dy. \tag{2.8}$$

采用卷积型不等式, 可见

$$\|I_{q,q'}(x)\|_p \leqslant C \|(f_{k,q} * \dot{\Delta}_q u) \circ \psi\|_p (2^{q'} \|D\phi\|_\infty + \|J_\psi\|_\infty \|DJ_\phi\|_\infty).$$

由估计 (2.5) 就可以推出估计 (2.2). □

1. *局部化估计应用*

在局部化空间, 如 Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间框架下处理输运扩散方程中, 必然要处理局部化估计. 与此同时, 通过粒子轨道映射将对流项吃掉, 在 Lagrange 坐标下会出现交换子型的 “外力”, 也会派生一系列与 Littlewood-Paley 投影相联系的局部化估计. 这些估计均可视为引理 2.1 的特例, 为读者熟悉之便, 给出一个直接的证明.

引理 2.2 (局部化引理) *设 $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, ψ 是保持 Lebesgue 测度的微分同胚, 则对任意 $p \in [1,\infty]$ 及 $q, \overline{q} \in \mathbb{Z}$, 有*

$$\|\dot{\Delta}_{\overline{q}}(\dot{\Delta}_q u \circ \psi)\|_p \leqslant C 2^{-|\overline{q}-q|} \|\nabla \psi^{\varepsilon(\overline{q},q)}\|_\infty \|\dot{\Delta}_q u\|_p, \tag{2.9}$$

这里

$$\varepsilon(\overline{q}, q) = \mathrm{sign}(\overline{q} - q), \quad \psi^{-1} \text{表示 } \psi \text{ 的逆映射}.$$

证明 分 $\overline{q} \geqslant q$ 与 $\overline{q} < q$ 两种情形来证明.

情形 1. $\overline{q} \geqslant q$. 直接估计可见

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Delta}_{\overline{q}}(\dot{\Delta}_q u \circ \psi)\|_p &\lesssim 2^{-\overline{q}} \|\nabla \dot{\Delta}_{\overline{q}}(\dot{\Delta}_q u \circ \psi)\|_p \\
&\lesssim 2^{-\overline{q}} \|\nabla \dot{\Delta}_q u\|_p \|\nabla \psi\|_\infty \\
&\lesssim 2^{-(\overline{q}-q)} \|\dot{\Delta}_q u\|_p \|\nabla \psi\|_\infty.
\end{aligned}$$

情形 2. $\overline{q} < q$. 采用泛函对偶确定范数的定义、ψ 是保测的微分同胚的性质, 可见

$$\begin{aligned}
\|\dot{\Delta}_{\overline{q}}(\dot{\Delta}_q u \circ \psi)\|_p &= \sup_{\|v\|_{p'} \leqslant 1} |\langle \dot{\Delta}_{\overline{q}}(\dot{\Delta}_q u \circ \psi), v \rangle| \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right) \\
&= \sup_{\|v\|_{p'} \leqslant 1} |\langle \widetilde{\dot{\Delta}}_q \dot{\Delta}_q u \circ \psi, \dot{\Delta}_{\overline{q}} v \rangle| \\
&= \sup_{\|v\|_{p'} \leqslant 1} |\langle \dot{\Delta}_q u, \widetilde{\dot{\Delta}}_q (\dot{\Delta}_{\overline{q}} v \circ \psi^{-1}) \rangle| \\
&\leqslant \sup_{\|v\|_{p'} \leqslant 1} \|\dot{\Delta}_q u\|_p \|\widetilde{\dot{\Delta}}_q (\dot{\Delta}_{\overline{q}} v \circ \psi^{-1})\|_{p'}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{\|v\|_{p'}\leqslant 1} \|\dot{\Delta}_q u\|_p 2^{-(q-\bar{q})}\|\nabla\psi^{-1}\|_\infty \|v\|_{p'}.$$

综合上述两种情形就得估计 (2.9) 成立. □

2. Fourier 局部化的应用 —— 复合函数在分数阶 Besov 空间中的估计

在处理一些交换子估计时, 往往需要复合函数在分数阶 Besov 空间的非线性估计.

引理 2.3 设 $p\in[1,\infty]$, $\alpha\in(0,1)$. 则

$$\|u\circ\psi\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}} \leqslant C_\alpha \|\nabla\psi\|^\alpha_\infty \|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}}. \tag{2.10}$$

注记 2.1 从引理 2.3 就会发现, 当 $\alpha=0$ 时, 证明是不行的. 然而, 我们有如下的 Vishik 的 log-型不等式: 设 $\psi:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ 是保持 Lebesgue 测度的同胚映射,$u\in B^0_{\infty,1}$, 则 $u\circ\psi^{-1}\in B^0_{\infty,1}$, 并且存在常数 C, 使得

$$\|u\circ\psi^{-1}\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant C(1+\log(\|\psi\|_{Lip}\|\psi^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}))\|u\|_{B^0_{\infty,1}}, \tag{2.11}$$

成立. 证明见 2.3 节.

证明 由 Besov 空间的分析定义与二次微局部分解, 容易验证

$$\begin{aligned}\|u\circ\psi\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}} &\leqslant \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} 2^{j\alpha}\|\dot{\Delta}_j((\dot{\Delta}_k u)\circ\psi)\|_p\\ &= \sum_{j-k<M} 2^{j\alpha}\|\dot{\Delta}_j((\dot{\Delta}_k u)\circ\psi)\|_p\\ &\quad + \sum_{j-k\geqslant M} 2^{j\alpha}\|\dot{\Delta}_j((\dot{\Delta}_k u)\circ\psi)\|_p\\ &:= I+II.\end{aligned} \tag{2.12}$$

利用离散的 Young 不等式, 直接计算就得

$$\begin{aligned}I &\leqslant \sum_{j-k<M} 2^{j\alpha}\|\dot{\Delta}_k u\|_p \lesssim \sum_{j-k<M} 2^{(j-k)\alpha} c_k \|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}}\\ &\lesssim 2^{M\alpha}\|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}}, \qquad c_k = \frac{2^{k\alpha}\|\dot{\Delta}_k u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}}},\\ II &\leqslant \sum_{j-k\geqslant M} 2^{j\alpha}2^{-j}\|\nabla\dot{\Delta}_j((\dot{\Delta}_k u)\circ\psi)\|_p\\ &\leqslant \sum_{j-k\geqslant M} 2^{j\alpha}2^{-j}\|\nabla\dot{\Delta}_k u\|_p\|\nabla\psi\|_\infty\\ &\lesssim \sum_{j-k\geqslant M} 2^{(j-k)\alpha}2^{-j}2^{k(\alpha+1)}\|\dot{\Delta}_k u\|_p\|\nabla\psi\|_\infty\\ &\lesssim \sum_{j-k\geqslant M} 2^{-(j-k)(1-\alpha)} c_k\|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}}\|\nabla\psi\|_\infty\end{aligned}$$

$$\lesssim 2^{-M(1-\alpha)}\|u\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}\|\nabla\psi\|_{\infty}, \qquad c_k=\frac{2^{k\alpha}\|\dot{\Delta}_k u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}}.$$

取 $M=[\log_2\|\nabla\psi\|_{\infty}]+1$, 将 I, II 的估计 (2.12), 就得

$$\|u\circ\psi\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}\leqslant C_{\alpha}\|u\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}(2^{M\alpha}+\|\nabla\psi\|_{\infty}2^{-M(1-\alpha)})\leqslant C_{\alpha}\|\nabla\psi\|^{\alpha}_{\infty}\|u\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}. \qquad \square$$

在正则化向量场的过程中, 立即就会碰到形如

$$R_q:=(\dot{S}_{q-1}v\cdot\nabla)u_q-\dot{\Delta}_q((v\cdot\nabla)u), \quad u_q=\dot{\Delta}_q u,$$

或

$$R_q:=(S_{q+1}v\cdot\nabla)u_q-\Delta_q((v\cdot\nabla)u), \quad u_q=\Delta_q u$$

的估计. 为了充分利用消失性质, 将 R_q 写成一个高频与高频的相互作用项加上交换子估计, 这种想法在调和分析中是自然的、有效的.

引理 2.4 (交换子估计I: 非对称形式的交换子估计) 记

$$R_q:=(\dot{S}_{q-1}v-v)\cdot\nabla u_q-[\dot{\Delta}_q,v\cdot\nabla]u.$$

设 $1\leqslant p\leqslant p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant r\leqslant\infty$, $s\in\mathbb{R}$ 满足 (1.1), 即在

$$\begin{cases} s<1+\dfrac{d}{p_1}\ \left(\text{或 } s=1+\dfrac{d}{p_1}, \text{若 } r=1\right), \\ s>-\min\left(\dfrac{d}{p_1},\dfrac{d}{p'}\right)\ \left(\text{或 } s>-1-\min\left(\dfrac{d}{p_1},\dfrac{d}{p'}\right), \text{若 } \mathrm{div}v=0\right) \end{cases} \tag{2.13}$$

的条件下, 存在序列 $c_q\in\ell^r(\mathbb{Z})$ 满足 $\|c_q\|_{\ell^r}=1$ 及估计

$$2^{qs}\|R_q\|_p\leqslant\begin{cases} Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}\cap L^{\infty}}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, & \forall q\in\mathbb{Z}, \\ Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,1}}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, & \forall q\in\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 $C=C(d,r,s,p,p_1)$.

注记 2.2 (1) 引理 2.4 本质上就是给出如下交换子估计:

$$2^{qs}\|[\dot{\Delta}_q,v\cdot\nabla]u\|_p\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}\cap L^{\infty}}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \quad \forall q\in\mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

特别地, 有如下常用的特殊的情形:

(I) $s\in(-1,1)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\mathrm{div}v=0$, 则

$$2^{qs}\|[\dot{\Delta}_q,v\cdot\nabla]u\|_p\lesssim c_q\|\nabla v\|_{\infty}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \qquad \forall q\in\mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

并且端点情形 $s=1$, $r=1$ 上式仍然成立.

(II) $-\dfrac{d}{2}<s\leqslant\dfrac{d}{2}+1$, 则

$$2^{qs}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_2 \lesssim c_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\dot{B}^s_{2,1}} \lesssim c_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\|u\|_{\dot{B}^s_{2,1}}, \quad \forall q\in\mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

对于 $s=-\dfrac{d}{2}$ 对应的极限情形, 仅需利用第 1 章仿积理论中的余项估计:

$$\|R(f,g)\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{p}}_{p,\infty}} \leqslant \|f\|_{\dot{B}^{-s}_{p,\infty}}\|g\|_{\dot{B}^s_{p,1}}, \quad s\in\Big(-\frac{d}{p}, \frac{d}{p}\Big], \ p\geqslant 2, \tag{2.18}$$

就可以推出更强的交换子估计 (见推论 2.9):

$$2^{-\frac{d}{2}q}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_2 \leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{2}}_{2,\infty}}\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}}_{2,1}}.$$

(III) 频段层次交换子估计. $\mathrm{div}v=0$, $\omega=\mathrm{curl}v$, $q\geqslant -1$, $p\in[1,\infty]$, 则有

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]\omega\|_p \leqslant C\|\nabla v\|_\infty \sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j}\|\Delta_j\omega\|_p,$$

C, N_0 是绝对常数, 见命题 2.10.

(2) 在 $(\mathrm{TD})_\nu$ 中, 如果 $u=\mathrm{curl}v$ (或 u 可以表示成一阶齐次微分算子作用于 v), 则估计 (1.15) 对于 $s>-1$ 成立, 这里

$$Z(T)=\int_0^T \|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt.$$

事实上

$$\begin{aligned}\big\|(\dot{S}_{q-1}v-v)\nabla\Delta_q u\big\| &\leqslant \sum_{k>q-1}\|\Delta_k v\|_\infty\|\nabla\Delta_q u\|_p \leqslant \sum_{k\geqslant q-1} 2^{-k}\|\nabla\Delta_k v\|_\infty\|\nabla\Delta_q u\|_p\\ &\lesssim 2^{-q}\|\nabla u\|_\infty\|\nabla\Delta_q u\|_p \lesssim c_q 2^{-qs}\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.\end{aligned}$$

利用频段层次交换子估计 III, 对于 $s>-1$, 易见

$$\begin{aligned}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_p &\lesssim \|\nabla v\|_\infty \sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j}\|\Delta_j u\|_p \lesssim 2^{-qs}\|\nabla v\|_\infty \sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{(q-j)(s+1)}c_j\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\\ &\lesssim c_q 2^{-qs}\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \qquad \forall q\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

引理 2.4 的证明 令 $\widetilde{v}=v-S_0 v$, 由 Bony 的仿积分解, 将 R_q 分解成

$$\begin{aligned}R_q &= (\dot{S}_{q-1}v-v)\cdot\nabla u_q - [\dot{\Delta}_q, \widetilde{v}\cdot\nabla]u - [\dot{\Delta}_q, \dot{S}_0 v\cdot\nabla]u\\ &= [T_{\widetilde{v}^j}, \dot{\Delta}_q]\partial_j u + T_{\dot{\Delta}_q\partial_j u}\widetilde{v}^j - \dot{\Delta}_q T_{\partial_j u}\widetilde{v}^j + \big\{\partial_j\dot{R}(\widetilde{v}^j, \dot{\Delta}_q u)\\ &\quad - \partial_j\dot{\Delta}_q\dot{R}(\widetilde{v}^j, u)\big\} + \big\{\dot{\Delta}_q\dot{R}(\mathrm{div}\widetilde{v}, u) - \dot{R}(\mathrm{div}\widetilde{v}, \dot{\Delta}_q u)\big\}\\ &\quad + (\dot{S}_{q-1}v-v)\cdot\nabla\dot{\Delta}_q u - [\dot{\Delta}_q, \dot{S}_0 v^j]\partial_j u\\ &\triangleq R_q^1+R_q^2+R_q^3+R_q^4+R_q^5+R_q^6+R_q^7.\end{aligned} \tag{2.19}$$

再逐项估计 (2.19) 右边的每一项.

R_q^1 的估计. 由紧支集的性质与不同频段函数的相互作用, 可见

$$
\begin{aligned}
R_q^1 &= \sum_{|q-q'|\leqslant 4} [\dot{S}_{q'-1}\widetilde{v}^j, \dot{\Delta}_q]\partial_j \dot{\Delta}_{q'} u \quad (\text{记 } h(x) \sim \dot{\Delta}_1) \\
&= \sum_{|q-q'|\leqslant 4} \int h(y)\big[\dot{S}_{q'-1}\widetilde{v}^j(x) - \dot{S}_{q'-1}\widetilde{v}^j(x-2^{-q}y)\big]\partial_j \dot{\Delta}_{q'} u(x-2^{-q}y)dy. \quad (2.20)
\end{aligned}
$$

由中值定理、Young 不等式及 Bernstein 估计, 可以推得

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^1\|_p &\leqslant C\|\nabla v\|_\infty \sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{(q-q')s}2^{q's}\|\dot{\Delta}_{q'}u\|_p \\
&\leqslant C\|\nabla v\|_\infty \sum_{|q-q'|\leqslant 4} \frac{2^{q's}\|\dot{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}} \cdot \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

R_q^2 的估计. 注意到

$$
\|\dot{\Delta}_q \nabla v\|_a \approx 2^q\|\dot{\Delta}_q v\|_a, \quad \forall a \in [1,\infty], \qquad (2.22)
$$

$$
\|\nabla S_0 v\|_a \leqslant \|\nabla v\|_a, \quad \|\dot{\Delta}_j \nabla v\|_a \leqslant \|\nabla v\|_a, \quad \forall a \in [1,\infty]. \qquad (2.23)
$$

则

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^2\|_p &\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3} 2^{qs}\|\dot{S}_{q'-1}\partial_j\dot{\Delta}_q u\|_p\|\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}^j\|_\infty \\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3} 2^{qs}2^{q-q'}\|\dot{\Delta}_q u\|_p\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}^j\|_\infty \\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3} 2^{q-q'}\frac{2^{qs}\|\dot{\Delta}_q u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}} \cdot \|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

R_q^3 的估计. 注意到

$$
R_q^3 = -\sum_{|q-q'|\leqslant 4} \dot{\Delta}_q(\dot{S}_{q'-1}\partial_j u\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}^j) = -\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} \dot{\Delta}_q(\dot{\Delta}_{q''}\partial_j u\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}^j). \qquad (2.25)
$$

记 $\dfrac{1}{p_2} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p_1}$, 则由 (2.22), (2.23) 可见

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} 2^{qs}\|\dot{\Delta}_{q''}\partial_j u\|_{p_2}\|\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}^j\|_{p_1} \\
&\leqslant C\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} 2^{(q-q'')(s-1-\frac{d}{p_1})}2^{q''s}\|\dot{\Delta}_{q''}u\|_p 2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla v\|_{p_1}. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

因此, 若 $s < 1 + \dfrac{d}{p_1}$, 容易看出

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C \sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} 2^{(q-q'')(s-1-\frac{d}{p_1})} \frac{2^{q''s}\|\dot{\Delta}_{q''}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}} \cdot \sup_{q'} 2^{q'\frac{d}{p_1}} \|\dot{\Delta}_{q'}\nabla v\|_{p_1} \cdot \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\\
&\leqslant C \sum_{q''\leqslant q+2} 2^{(q-q'')(s-1-\frac{d}{p_1})} \frac{2^{q''s}\|\dot{\Delta}_{q''}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}} \cdot \|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}} \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\\
&\leqslant Cc_q \|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}} \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

另一方面, 当 $s = 1 + \dfrac{d}{p_1}$, $r = 1$ 时, 从 (2.25) 第一个表达式可以推出

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C \sum_{|q-q'|\leqslant 4} \|\nabla \dot{S}_{q'-1}u\|_{p_2} \|\dot{\Delta}_{q'}\nabla v\|_{p_1} 2^{q'(s-1)}\\
&\leqslant C \sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{q'(s-1)} \|\dot{\Delta}_{q'}\nabla v\|_{p_1} \|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p,1}}\\
&\leqslant Cc_q \|\nabla v\|_{\dot{B}^{s-1}_{p_1,1}} \|u\|_{\dot{B}^s_{p,1}},
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

这里用到

$$
\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p,1} \hookrightarrow L^{p_2} \qquad \left(\frac{d}{p_1} - \frac{d}{p} = -\frac{d}{p_2}\right).
$$

R_q^4 的估计. 注意到

$$
\begin{aligned}
R_q^4 &= \sum_{|q-q'|\leqslant 2} \partial_j (\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}^j \dot{\Delta}_q \widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u) - \sum_{q'\geqslant q-3} \partial_j \dot{\Delta}_q (\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}^j \widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u)\\
&\equiv R_{4,1}^q + R_{4,2}^q.
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

由式 (2.23) 可见

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_{4,1}^q\|_p &\leqslant C\|\nabla \widetilde{v}\|_\infty \sum_{|q-q'|\leqslant 2} 2^{q's} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p\\
&\leqslant Cc_q \|\nabla v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \quad c_q = \sum_{|q-q'|\leqslant 2} \frac{2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}.
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

下面估计 $R_{4,2}^q$. 我们分情形讨论. 若 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_1} \leqslant 1$, 定义 $\dfrac{1}{p_2} \triangleq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_1}$, 则

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_{4,2}^q\|_p &\leqslant C \sum_{q'\geqslant q-3} 2^{q(1+s)} 2^{q(\frac{d}{p_2}-\frac{d}{p})} \|\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_{p_2}\\
&\leqslant C \sum_{q'\geqslant q-3} 2^{q(1+s)} 2^{q\frac{d}{p_1}} \|\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}\|_{p_1} \|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p
\end{aligned}
$$

$$\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(1+\frac{d}{p_1}+s)}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p$$

$$\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(1+\frac{d}{p_1}+s)}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}\cdot\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{2.31}$$

若 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p_1}>1$, 易见 $p_1\leqslant p'$, 完全类似于 (2.31) 的证明过程, 容易看出

$$\begin{aligned}2^{qs}\|R^q_{4,2}\|_p&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{q(1+s)}2^{q(n-\frac{d}{p})}\|\dot{\Delta}_{q'}\widetilde{v}\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_1\\&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(1+\frac{d}{p'}+s)}2^{q'\frac{d}{p'}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p'}2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p\\&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(1+\frac{d}{p'}+s)}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p'}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p'}\cdot\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

由 (2.31) 与 (2.32) 可以统一写成

$$\begin{aligned}2^{qs}\|R^q_{4,2}\|_p\leqslant&C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(s+1+\min(\frac{d}{p_1},\frac{d}{p'}))}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}\cdot\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\\\leqslant&Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}},\end{aligned} \tag{2.33}$$

这里用到 Sobolev 嵌入定理

$$\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p'}}_{p',\infty}}\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}},\quad p_1\leqslant p'.$$

***R^5_q* 的估计**. 注意到

$$R^5_q=-\sum_{|q-q'|\leqslant 2}\dot{\Delta}_{q'}(\mathrm{div}\widetilde{v}\dot{\Delta}_q\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u)+\sum_{q'\geqslant q-3}\dot{\Delta}_q(\dot{\Delta}_{q'}\mathrm{div}\widetilde{v}\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u).$$

因此, 完全类同于 R^4_q 的证明, 可以推出

$$\begin{aligned}2^{qs}\|R^5_q\|_p\leqslant&C\|\mathrm{div}\widetilde{v}\|_\infty\sum_{|q-q'|\leqslant 2}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}\cdot\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\\&+C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(s+1+\min(\frac{d}{p_1},\frac{d}{p'}))}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\dot{\Delta}}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\dot{\Delta}_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}\cdot\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\\\leqslant&Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.\end{aligned} \tag{2.34}$$

R_q^6 的估计. 注意到

$$R_q^6 = -\sum_{q' \geqslant q-1} \dot{\Delta}_{q'} v \cdot \nabla \dot{\Delta}_q u,$$

采用 Bernstein 不等式, 直接估计可见

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^6\|_p &\leqslant \sum_{q' \geqslant q-1} 2^{q-q'} \|\dot{\Delta}_{q'} \nabla v\|_\infty 2^{qs} \|\dot{\Delta}_q u\|_p \\
&\leqslant C \sum_{q' \geqslant q-1} 2^{q-q'} \frac{2^{qs}\|\dot{\Delta}_q u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}} \cdot \|\nabla v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \\
&\leqslant C c_q \|\nabla v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

R_q^7 的估计. 注意到支集关系,R_q^7 可以表示成

$$\begin{aligned}
R_q^7 &= -[\dot{\Delta}_q, \dot{S}_0 v^j]\partial_j u = -\sum_{q'} [\dot{\Delta}_q, \dot{S}_0 v^j]\partial_j \dot{\Delta}_{q'} u \\
&= -\sum_{|q-q'| \leqslant 2} [\dot{\Delta}_q, \dot{S}_0 v^j]\partial_j \dot{\Delta}_{q'} u \\
&= \sum_{|q-q'| \leqslant 2} \int h(y) \big[\dot{S}_0 v^j(x) - \dot{S}_0 v^j(x - 2^{-q}y)\big] \partial_j \dot{\Delta}_{q'} u(y) dy.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^7\|_p &\leqslant C \sum_{|q-q'| \leqslant 2} \|\nabla \dot{S}_0 v\|_\infty 2^{q's} \|\dot{\Delta}_{q'} u\|_p \\
&\leqslant C \sum_{|q-q'| \leqslant 2} \frac{2^{q's}\|\dot{\Delta}_{q'} u\|_p}{\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}} \cdot \|\nabla v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \\
&\leqslant C c_q \|\nabla v\|_\infty \|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

综合 $R_q^1 \sim R_q^7$ 的估计, 就完成了引理 2.4 的证明. □

引理 2.5 (交换子估计 II: 非齐空间中的交换子估计) 设 $1 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $p' = (1 - 1/p)^{-1}$, 假设

$$s > -\min\Big(\frac{d}{p_1}, \frac{d}{p'}\Big) \quad \Big(\text{或 } s > -1 - \min\Big(\frac{d}{p_1}, \frac{d}{p'}\Big), \text{ 若 } \operatorname{div} v = 0\Big). \tag{2.37}$$

则存在常数 $C = C(d, r, s, p, p_1)$, 使得估计

$$2^{qs}\|R_q\|_p \leqslant C c_q \|\nabla v\|_{B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty} \cap L^\infty} \|u\|_{B^s_{p,r}}, \quad \text{若 } s < 1 + \frac{d}{p_1}, \tag{2.38}$$

$$2^{qs}\|R_q\|_p \leqslant C c_q \|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p_1,r}} \|u\|_{B^s_{p,r}}, \quad \text{若 } s > 1 + \frac{d}{p_1}, \quad \text{或 } s = 1 + \frac{d}{p_1}, \quad r = 1. \tag{2.39}$$

特别, 取 $p_1=\infty, u=v$, 则

$$2^{qs}\|R_q\|_p \leqslant Cc_q\|\nabla u\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}, \quad s>0\ (\text{或 } s>-1, \text{若 } \mathrm{div}u=0), \tag{2.40}$$

这里

$$R_q := (S_{q+1}v\cdot\nabla)u_q - \Delta_q((v\cdot\nabla)u), \quad u_q=\Delta_q u.$$

证明概要 令 $\widetilde{v}=v-S_0v$, 注意到存在常数 $R>0$, 满足 $\mathrm{supp}\mathcal{F}\widetilde{v}\cap B_R(0)=\varnothing$, 因此

$$\|\Delta_q\nabla\widetilde{v}\|_p \cong 2^q\|\Delta_q\widetilde{v}\|_p, \qquad \forall q\geqslant -1, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

由 Bony 的仿积分解, 将 R_q 分解成

$$\begin{aligned}R_q &= (S_{q+1}v-v)\cdot\nabla u_q - [\Delta_q,\widetilde{v}\cdot\nabla]u - [\Delta_q, S_0v\cdot\nabla]u\\&= [T_{\widetilde{v}^j},\Delta_q]\partial_j u + T_{\Delta_q\partial_j u}\widetilde{v}^j - \Delta_q T_{\partial_j u}\widetilde{v}^j + \big\{\partial_j R(\widetilde{v}^j,\Delta_q u)\\&\quad - \partial_j\Delta_q R(\widetilde{v}^j,u)\big\} + \big\{\Delta_q R(\mathrm{div}\widetilde{v},u) - R(\mathrm{div}\widetilde{v},\Delta_q u)\big\}\\&\quad + (S_{q+1}v-v)\cdot\nabla\Delta_q u - [\Delta_q, S_0v^j]\partial_j u\\&\triangleq R_q^1+R_q^2+R_q^3+R_q^4+R_q^5+R_q^6+R_q^7.\end{aligned}$$

R_q^1 的估计. 由紧支集的性质与不同频段函数的相互作用, 可见

$$\begin{aligned}R_q^1 &= \sum_{|q-q'|\leqslant 4}[S_{q'-1}\widetilde{v}^j,\Delta_q]\partial_j\Delta_{q'}u \quad (\text{记 } h(x)\sim\Delta_1)\\&= \sum_{|q-q'|\leqslant 4}\int h(y)\big[S_{q'-1}\widetilde{v}^j(x) - S_{q'-1}\widetilde{v}^j(x-2^{-q}y)\big]\partial_j\Delta_{q'}u(x-2^{-q}y)dy.\end{aligned}$$

由中值定理、Young 不等式及 Bernstein 估计, 可以推得

$$\begin{aligned}2^{qs}\|R_q^1\|_p &\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\sum_{|q-q'|\leqslant 4}2^{q's}\|\Delta_{q'}u\|_p\\&\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\frac{2^{q's}\|\Delta_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\|u\|_{B^s_{p,r}}\\&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}.\end{aligned}$$

R_q^2 的估计. 注意到

$$\|\dot{\Delta}_q\nabla\widetilde{v}\|_a \approx 2^q\|\dot{\Delta}_q\widetilde{v}\|_a, \quad \forall a\in[1,\infty],$$

$$\|\nabla S_0v\|_a\leqslant\|\nabla v\|_a, \quad \|\dot{\Delta}_j\nabla v\|_a\leqslant\|\nabla v\|_a, \quad \forall a\in[1,\infty].$$

则

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^2\|_p &\leqslant C\sum_{q'\geqslant q+1} 2^{qs}\|S_{q'-1}\partial_j\Delta_q u\|_p\|\Delta_{q'}\widetilde{v}^j\|_\infty \\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q+1} 2^{qs}2^{q-q'}\|\Delta_q u\|_p\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}^j\|_\infty \\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q+1} 2^{q-q'}\frac{2^{qs}\|\Delta_q u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}} \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}.
\end{aligned}$$

R_q^3 的估计. 注意到

$$R_q^3=-\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\Delta_q(S_{q'-1}\partial_j u\Delta_{q'}\widetilde{v}^j)=-\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}}\Delta_q(\Delta_{q''}\partial_j u\Delta_{q'}\widetilde{v}^j).$$

记 $\dfrac{1}{p_2}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p_1}$, 则由 R_q^2 估计中的两个预备估计, 可见

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} 2^{qs}\|\Delta_{q''}\partial_j u\|_{p_2}\|\Delta_{q'}\widetilde{v}^j\|_{p_1} \\
&\leqslant C\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} 2^{(q-q'')(s-1-\frac{d}{p_1})}2^{q''s}\|\Delta_{q''}u\|_p 2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_{p_1}.
\end{aligned}$$

因此, 若 $s<1+\dfrac{d}{p_1}$, 容易看出

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C\sum_{\substack{|q-q'|\leqslant 4\\ q''\leqslant q'-2}} 2^{(q-q'')(s-1-\frac{d}{p_1})}\frac{2^{q''s}\|\Delta_{q''}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_{p_1}\cdot\|u\|_{B^s_{p,r}} \\
&\leqslant C\sum_{q''\leqslant q+2} 2^{(q-q'')(s-1-\frac{d}{p_1})}\frac{2^{q''s}\|\Delta_{q''}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\|\nabla v\|_{B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}} \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}}.
\end{aligned}$$

另一方面, 当 $s>1+\dfrac{d}{p_1}$ 时, 从 R_q^3 的第一个表达式可以推出

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C\sum_{|q-q'|\leqslant 4}\|\nabla S_{q'-1}u\|_{p_2}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_{p_1}2^{q'(s-1)} \\
&\leqslant C\sum_{|q-q'|\leqslant 4}2^{q'(s-1)}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_{p_1}\|\nabla u\|_{B^{s-1}_{p,r}} \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{B^{s-1}_{p_1,r}}\|u\|_{B^s_{p,1}},
\end{aligned}$$

这里用到

$$B_{p,1}^{s-1} \hookrightarrow L^{p_2} \quad \Big(1 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty,\ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\Big).$$

当 $s = 1 + \dfrac{d}{p_1}$, $r = 1$ 时, 从 R_q^3 的第一个表达式可以推出

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^3\|_p &\leqslant C \sum_{|q-q'|\leqslant 4} \|\nabla S_{q'-1}u\|_{p_2}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_{p_1}2^{q'(s-1)} \\
&\leqslant C \sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{q'(s-1)}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_{p_1}\|\nabla u\|_{B_{p,1}^{\frac{d}{p_1}}} \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{B_{p_1,1}^{s-1}}\|u\|_{B_{p,1}^s},
\end{aligned}$$

这里用到

$$B_{p,1}^{\frac{d}{p_1}} \hookrightarrow L^{p_2} \quad \Big(\frac{d}{p_1} - \frac{d}{p} = -\frac{d}{p_2}\Big).$$

R_q^4 的估计. 注意到

$$R_q^4 = \sum_{|q-q'|\leqslant 2} \partial_j(\Delta_{q'}\widetilde{v}^j\Delta_q\widetilde{t\Delta}_{q'}u) - \sum_{q'\geqslant q-3}\partial_j\Delta_q(\Delta_{q'}\widetilde{v}^j\widetilde{\Delta}_{q'}u) \equiv R_{4,1}^q + R_{4,2}^q.$$

由 R_q^2 估计中的两个预备估计, 可见

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_{4,1}^q\|_p &\leqslant C\|\nabla\widetilde{v}\|_\infty \sum_{|q-q'|\leqslant 2} 2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p \\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B_{p,r}^s}, \quad c_q = \sum_{|q-q'|\leqslant 2}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B_{p,r}^s}}.
\end{aligned}$$

下面估计 $R_{4,2}^q$. 我们分情形讨论. 若 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_1} \leqslant 1$, 定义 $\dfrac{1}{p_2} \triangleq \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_1}$, 则

$$\begin{aligned}
2^{qs}\|R_{4,2}^q\|_p &\leqslant C \sum_{q'\geqslant q-3} 2^{q(1+s)}2^{q(\frac{d}{p_2}-\frac{d}{p})}\|\Delta_{q'}\widetilde{v}\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_{p_2} \\
&\leqslant C \sum_{q'\geqslant q-3} 2^{q(1+s)}2^{q\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\widetilde{v}\|_{p_1}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p \\
&\leqslant C \sum_{q'\geqslant q-3} 2^{(q-q')(1+\frac{d}{p_1}+s)}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p \\
&\leqslant C \sum_{q'\geqslant q-3} 2^{(q-q')(1+\frac{d}{p_1}+s)}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B_{p,r}^s}}\sup_{q'} 2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}\cdot\|u\|_{B_{p,r}^s}.
\end{aligned}$$

若 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_1} > 1$, 易见 $p_1 \leqslant p'$, 完全类似于上式的证明过程, 容易看出

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_{4,2}^q\|_p &\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{q(1+s)}2^{q(n-\frac{d}{p})}\|\Delta_{q'}\widetilde{v}\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_1\\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(1+\frac{d}{p'}+s)}2^{q'\frac{d}{p'}}\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p'}2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p\\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(1+\frac{d}{p'}+s)}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p'}}\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p'}\cdot\|u\|_{B^s_{p,r}}.
\end{aligned}
$$

将上面两式统一写成

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_{4,2}^q\|_p \leqslant& C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(s+1+\min(\frac{d}{p_1},\frac{d}{p'}))}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}\cdot\|u\|_{B^s_{p,r}}\\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}},
\end{aligned}
$$

这里用到 Sobolev 嵌入定理

$$
\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p'}}_{p',\infty}}\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}},\quad p_1\leqslant p'.
$$

R_q^5 的估计. 注意到

$$
R_q^5=-\sum_{|q-q'|\leqslant 2}\Delta_{q'}(\mathrm{div}\widetilde{v}\Delta_q\widetilde{\Delta}_{q'}u)+\sum_{q'\geqslant q-3}\Delta_q(\Delta_{q'}\mathrm{div}\widetilde{v}\widetilde{\Delta}_{q'}u).
$$

因此, 完全类同于 R_q^4 的证明可见

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^5\|_p \leqslant& C\|\mathrm{div}\widetilde{v}\|_\infty\sum_{|q-q'|\leqslant 2}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\|u\|_{B^s_{p,r}}\\
&+C\sum_{q'\geqslant q-3}2^{(q-q')(s+1+\min(\frac{d}{p_1},\frac{d}{p'}))}\frac{2^{q's}\|\widetilde{\Delta}_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\sup_{q'}2^{q'\frac{d}{p_1}}\|\Delta_{q'}\nabla\widetilde{v}\|_{p_1}\cdot\|u\|_{B^s_{p,r}}\\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u\|_{B^s_{p,r}}.
\end{aligned}
$$

R_q^6 的估计. 注意到

$$
R_q^6=-\sum_{q'\geqslant q}\Delta_{q'}v\cdot\nabla\Delta_q u,
$$

采用 Bernstein 不等式, 直接估计可见

$$
\begin{aligned}
2^{qs}\|R_q^6\|_p &\leqslant \sum_{q'\geqslant q}2^{q-q'}\|\Delta_{q'}\nabla v\|_\infty 2^{qs}\|\Delta_q u\|_p\\
&\leqslant C\sum_{q'\geqslant q}2^{q-q'}\frac{2^{qs}\|\Delta_q u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}\\
&\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}.
\end{aligned}
$$

R_q^7 的估计. 注意到支集关系,R_q^7 可以表示成

$$\begin{aligned}R_q^7 &= -[\Delta_q, S_0 v^j]\partial_j u = -\sum_{q'}[\Delta_q, S_0 v^j]\partial_j \Delta_{q'} u\\ &= -\sum_{|q-q'|\leqslant 2}[\Delta_q, S_0 v^j]\partial_j \Delta_{q'} u\\ &= \sum_{|q-q'|\leqslant 2}\int h(y)\left[S_0 v^j(x) - S_0 v^j(x-2^{-q}y)\right]\partial_j \Delta_{q'} u(y)dy.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}2^{qs}\|R_q^7\|_p &\leqslant C\sum_{|q-q'|\leqslant 2}\|\nabla S_0 v\|_\infty 2^{q's}\|\Delta_{q'}u\|_p\\ &\leqslant C\sum_{|q-q'|\leqslant 2}\frac{2^{q's}\|\Delta_{q'}u\|_p}{\|u\|_{B^s_{p,r}}}\cdot\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}\\ &\leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}.\end{aligned}$$

综合 $R_q^1 \sim R_q^7$ 的估计, 就完成了引理 2.5 的证明. □

注记 2.3　证明与齐次空间的估计完全类似, 需要注意非齐次空间对 s 的上界没有任何要求, 原因是: 非齐次空间的 Littlewood-Paley 刻画中, 低频完全放在 Δ_{-1} 上 (齐次空间需要考虑 $\{\Delta_j\}_{j=-1}^{-\infty}$ 所派生的级数的敛散性), 这就保证求和的收敛性.

引理 2.6 (交换子估计 III: 奇异积分算子与低频截断所派生的交换子)　设 $\mathcal{Q} = -(-\triangle)^{-1}\nabla\mathrm{div}$, 则对任意 $q \in \mathbb{Z}$, 有如下交换子估计:

$$\|[\mathcal{Q}, \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u\|_p \leqslant C\|\nabla \dot{S}_{q-1}v\|_\infty \|\dot{\Delta}_q u\|_p. \tag{2.41}$$

证明　由支集的性质可见, $[\mathcal{Q}, \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u$ 的 Fourier 变换支在一个环上, 因此, 可取 $\widetilde{\varphi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 仍是支在环上的函数, 并且满足

$$[\mathcal{Q}, \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u = \widetilde{\varphi}(2^{-q}D)[\mathcal{Q}, \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u. \tag{2.42}$$

记

$$\theta_{ij}(\xi) = |\xi|^{-2}\xi_i\xi_j\widetilde{\varphi}(\xi), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

并用重复指标表示求和, 就得

$$([\mathcal{Q}, \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u)^i = [\theta_{ij}(2^{-q}D), \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u^j, \quad i = 1, 2, \cdots, d.$$

因此, 对于 $\forall x \in \mathbb{R}^d$, 上式可以改写成卷积形式

$$\begin{aligned}([\mathcal{Q}, \dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k \dot{\Delta}_q u)^i(x) = &\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}^{-1}\theta_{ij}(y)(\dot{S}_{q-1}v^k(x-2^{-q}y) - \dot{S}_{q-1}v^k(x))\\ &\cdot\partial_k \dot{\Delta}_q u^j(x-2^{-q}y)dy.\end{aligned} \tag{2.43}$$

由中值定理及 Bernstein 不等式即可推出 (2.41).

在考察平坦空间的 Laplace 算子与非平坦空间的 Laplace 算子的差别时, 就自然出现了下面特殊形式的交换子:

$$[|D|^\alpha, u\circ]\psi = |D|^\alpha(u\circ\psi) - (|D|^\alpha u)\circ\psi.$$

引理 2.7 (交换子估计 IV: 平坦与非平坦空间上的耗散算子所派生的交换子) *设 $u\in\dot{B}^\alpha_{p,1}$, $\alpha\in[0,1)$, $p\in[1,\infty]$. 设 ψ 是一个保持 Lebesgue 测度不变的 Lipschitz 型的同胚映射 ($\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$). 则存在 $C=C(\alpha)$ 满足如下交换子估计:*

$$\begin{aligned}\||D|^\alpha(u\circ\psi)-(|D|^\alpha u)\circ\psi\|_p\leqslant C\max\left(|1-\|\nabla\psi\|_\infty^{-d-\alpha}|,|1-\|\nabla\psi^{-1}\|_\infty^{d+\alpha}|\right)&\\ \cdot\|\nabla\psi\|_\infty^\alpha\|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}}.&\qquad(2.44)\end{aligned}$$

证明 当 $\alpha=0$ 时, (2.44) 显然成立. 由分数阶微分的内蕴刻画, 可见, 对任意 $\alpha\in(0,2)$, 有

$$|D|^\alpha f(x)=C_\alpha\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}dy. \qquad(2.45)$$

根据 Besov 空间的范数等价性

$$C^{-1}\|u\|_{\dot{B}^s_{p,m}}\leqslant\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\|u(\cdot-x)-u(\cdot)\|_p^m}{|x|^{sm}}\frac{dx}{|x|^d}\right)^{\frac{1}{m}}\leqslant C\|u\|_{\dot{B}^s_{p,m}},\quad 0<s<1. \qquad(2.46)$$

可见

$$\begin{aligned}\||D|^\alpha u\|_p&\lesssim C_\alpha\left\|\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|u(\cdot-z)-u(\cdot)|}{|z|^{d+\alpha}}dz\right\|_p\\&\lesssim C_\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\|u(\cdot-z)-u(\cdot)\|_p}{|z|^\alpha}\frac{dz}{|z|^d}\\&\lesssim C_\alpha\|u\|_{\dot{B}^\alpha_{p,1}},\quad 0<\alpha<1.\end{aligned}\qquad(2.47)$$

故当 $0<\alpha<1$ 时, (2.45) 在通常意义下成立, 即

$$|D|^\alpha u(x)=C_\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}dy. \qquad(2.48)$$

进而, 根据 ψ 是保持测度不变的 Lip 型同胚映射, (2.48) 就意味着

$$\begin{aligned}(|D|^\alpha u)\circ\psi&=C_\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\psi(x))-u(y)}{|\psi(x)-y|^{d+\alpha}}dy\\&=C_\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\psi(x))-u(\psi(y))}{|\psi(x)-\psi(y)|^{d+\alpha}}dy,\end{aligned}\qquad(2.49)$$

$$|D|^\alpha(u\circ\psi)=C_\alpha\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\psi(x))-u(\psi(y))}{|x-y|^{d+\alpha}}dy. \qquad(2.50)$$

因此可推出

$$
\begin{aligned}
&|D|^{\alpha}(u\circ\psi)(x)-(|D|^{\alpha}u)\circ\psi(x)\\
=&C_{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{u(\psi(x))-u(\psi(y))}{|x-y|^{d+\alpha}}\times\Big(1-\frac{|x-y|^{d+\alpha}}{|\psi(x)-\psi(y)|^{d+\alpha}}\Big)dy. \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

两边取 L^p 模, 并且利用非线性估计 (2.11), 就有

$$
\begin{aligned}
\||D|^{\alpha}(u\circ\psi)-(|D|^{\alpha}u)\circ\psi\|_p\lesssim&\|u\circ\psi\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}\sup_{x,y}\Big|1-\frac{|x-y|^{d+\alpha}}{|\psi(x)-\psi(y)|^{d+\alpha}}\Big|\\
\leqslant&C\|\nabla\psi\|_{\infty}^{\alpha}\|u\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,1}}\sup_{x,y}\Big|1-\frac{|x-y|^{d+\alpha}}{|\psi(x)-\psi(y)|^{d+\alpha}}\Big|. \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\frac{1}{\|\nabla\psi\|_{\infty}^{d+\alpha}}\leqslant\frac{|x-y|^{d+\alpha}}{|\psi(x)-\psi(y)|^{d+\alpha}}\leqslant\|\nabla\psi^{-1}\|_{\infty}^{d+\alpha}. \qquad (2.53)
$$

从而

$$
\sup_{x,y}\Big|1-\frac{|x-y|^{d+\alpha}}{|\psi(x)-\psi(y)|^{d+\alpha}}\Big|\leqslant\max\big(|1-\|\nabla\psi\|_{\infty}^{-d-\alpha}|,|1-\|\nabla\psi^{-1}\|_{\infty}^{d+\alpha}|\big). \qquad (2.54)
$$

代入式 (2.52) 就得所需要的估计.

注记 2.4 当 $r<\min(p,2)$, 利用 Sobolev 嵌入定理 $\dot{B}^{\alpha}_{p,r}\hookrightarrow\dot{F}^{\alpha}_{p,2}$ 是否可以推出上面结果对于 $u\in\dot{B}^{\alpha}_{p,r}$ 成立?

引理 2.8 (交换子估计 V: 对称形式的交换子估计) 设 $p,r\in[1,\infty]$, $\rho_1,\rho_2<1$, 记 v 是满足 $\mathrm{div}v=0$ 的向量场. 进而假设

$$
\rho_1+\rho_2+d\min\Big(1,\ \frac{2}{p}\Big)>0,\quad \rho_1+\frac{d}{p}>0. \qquad (2.55)
$$

则有估计

$$
\begin{aligned}
2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1)}\|[\dot{\Delta}_q,v\cdot\nabla]u\|_p\leqslant&Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1-1}_{p,r}}\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2-1}_{p,r}}\\
=&Cc_q\|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}}\|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2}_{p,r}}. \qquad (2.56)
\end{aligned}
$$

特别, 在上面的估计中, 作如下替代:

$$
\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,r}}\longrightarrow\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,r}\cap L^{\infty}},\qquad \rho_1=1,
$$

$$
\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,r}}\longrightarrow\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,r}\cap L^{\infty}},\qquad \rho_2=1,
$$

相应的估计式 (2.56) 就变成了 (引理 2.4 对应的非对称交换子估计)

$$\begin{cases} 2^{q(\frac{d}{p}+\rho_2)}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_p \leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,r}\cap L^\infty}\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2-1}_{p,r}}, \\ 2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1)}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_p \leqslant Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1-1}_{p,r}}\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,r}\cap L^\infty}. \end{cases} \tag{2.57}$$

推论 2.9 (交换子估计 VI: 对称形式的交换子估计) 设 $\alpha\in\left(1-\frac{d}{2},1\right]$, $k=1,2,\cdots,d$, 令

$$R_q=[\dot{\Delta}_q, a\partial_k]\omega=\dot{\Delta}_q(a\partial_k\omega)-\partial_k(a\dot{\Delta}_q\omega). \tag{2.58}$$

则有如下交换子估计:

$$2^{qs}\|R_q\|_2\leqslant C\|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+\alpha}_{2,1}}\|\omega\|_{\dot{B}^{s+1-\alpha}_{2,1}}, \tag{2.59}$$

这里 $-\frac{d}{2}<s\leqslant\alpha+\frac{d}{2}$. 进而当 $s=-\frac{d}{2}$ 时, 有估计

$$\sup_q 2^{-q\frac{d}{2}}\|R_q\|_2\leqslant C\|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+\alpha}_{2,1}}\|\omega\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{2}+1-\alpha}_{2,\infty}}. \tag{2.60}$$

注记 2.5 容易看出, 推论 2.9 的证明类似于引理 2.8 的证明. 不同之处在于没有自由向量场的前提, 因此, 从引理 2.8 的证明过程可以发现, 如果选取

$$\rho_1=\alpha,\quad p=2,\quad \rho_2=s+1-\alpha-\frac{d}{2},\quad r=1.$$

需要验证

$$\rho_1+\frac{d}{2}>1\Longleftrightarrow\alpha+\frac{d}{2}>1\Longleftarrow\alpha\in\left(1-\frac{d}{2},1\right),$$

$$\rho_1+\rho_2+d\min\left(1,\frac{2}{2}\right)>1\Longleftarrow\rho_1+\rho_2+n=s+1+\frac{d}{2}>1\Leftarrow s>-\frac{d}{2},$$

$$\rho_2=s+1-\alpha-\frac{d}{2}<1\Longleftrightarrow s<\alpha+\frac{d}{2}.$$

引理 2.8 不涉及极限情形, 因此, 推论 2.9 中的端点情形需要证明. 然而, 由分解

$$R_q=\partial_k[\dot{\Delta}_q, T_a]\omega-\dot{\Delta}_q T_{\partial_j a}\omega+\dot{\Delta}_q T_{\partial_k\omega}a+\dot{\Delta}_q R(\partial_k\omega, a)-\partial_k T'_{\dot{\Delta}_q\omega}a.$$

其他诸项估计均同, 只有第四项不同, 可采用如下估计:

$$\sup_q 2^{-q\frac{d}{2}}\|\dot{\Delta}_q R(\partial_k\omega,a)\|_2=\|R(\partial_k\omega,a)\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{2}}_{2,\infty}}\leqslant\|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+\alpha}_{2,1}}\|\omega\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{2}+1-\alpha}_{2,\infty}}.$$

此对应的情形亦可修改成 (按引理 2.8 的表示方式)

$$\sup_q 2^{-q\frac{d}{2}}\|R_q\|_2\leqslant\|a\|_{\dot{B}^{\frac{d}{2}+\alpha}_{2,1}}\|\omega\|_{\dot{B}^{-\frac{d}{2}+1-\alpha}_{2,1}\cap L^\infty}.$$

引理 2.8 的证明 注意到 $\mathrm{div} v=0$, 利用 Bony 仿积分解可将交换子分解成

$$
\begin{aligned}
[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u &= [\dot{\Delta}_q, T_{v^j}]\partial_j u - T_{\dot{\Delta}_q\partial_j u}v^j - R(\dot{\Delta}_q\partial_j u, v^j)\\
&\quad + \dot{\Delta}_q T_{\partial_j u}v^j + \dot{\Delta}_q R(\partial_j u, v^j)\\
&= [\dot{\Delta}_q, T_{v^j}]\partial_j u - T'_{\dot{\Delta}_q\partial_j u}v^j + \dot{\Delta}_q T_{\partial_j u}v^j + \dot{\Delta}_q R(\partial_j u, v^j)\\
&\triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

根据支集关系, 并记 $h(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\xi))$, 则

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{|q-q'|\leqslant 4}[\dot{\Delta}_q, S_{q'-1}v^j]\Delta_{q'}\partial_j u\\
&= -\sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{-q}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 h(y)(y\cdot\nabla S_{q'-1}v^j(x-2^{-q}\tau y))\Delta_{q'}\partial_j u(x-2^{-q}y)d\tau dy.
\end{aligned}
$$

由于 $\rho_1 < 1$, 从而

$$
\|\nabla S_{q'-1}v^j\|_\infty \lesssim 2^{q'(1-\rho_1)}\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\rho_1-1}_{\infty,\infty}}. \tag{2.62}
$$

由此可见

$$
\begin{aligned}
2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1)}\|I_1\|_p &\leqslant \sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1)}2^{-q}2^{q'(1-\rho_1)}\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\rho_1-1}_{\infty,\infty}}\|\Delta_{q'}\nabla u\|_p\\
&\lesssim \sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{(q-q')(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-2)}2^{q'(\frac{d}{p}+\rho_2-1)}\|\Delta_{q'}\nabla u\|_p\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\rho_1-1}_{\infty,\infty}}\\
&\lesssim Cc_q\|\nabla v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1-1}_{p,r}}\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2-1}_{p,r}}.
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

在 (2.63) 中用到了 Sobolev 嵌入 $\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1-1}_{p,r} \hookrightarrow \dot{B}^{\rho_1-1}_{\infty,\infty}$. 特别地, 当 $\rho_1 = 1$ 时, (2.62) 可以直接用 $\|\nabla v\|_\infty$ 来控制, 即

$$
2^{q(\frac{d}{p}+\rho_2)}\|I_1\|_p \leqslant Cc_q\|\nabla v\|_\infty\|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2-1}_{p,r}}. \tag{2.64}
$$

下面估计 I_2. 利用支集关系, I_2 可以表示成

$$
I_2 = T'_{\dot{\Delta}_q\partial_j u}v^j = \sum_{q'\geqslant q-2} S_{q'+2}\dot{\Delta}_q\partial_j u\dot{\Delta}_{q'}v^j.
$$

因此

$$
\begin{aligned}
2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1)}\|I_2\|_p &\lesssim 2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1)}\sum_{q'\geqslant q-2}\|\dot{\Delta}_{q'}v^j\|_p\|\dot{\Delta}_q\partial_j u\|_\infty\\
&\lesssim \sum_{q'\geqslant q-2} 2^{(q-q')(\frac{d}{p}+\rho_1)}2^{q'(\frac{d}{p}+\rho_1)}\|\dot{\Delta}_{q'}v^j\|_p 2^{q(\rho_2-1)}\|\dot{\Delta}_q\partial_j u\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$\lesssim \sum_{q'\geqslant q-2} 2^{(q-q')(\frac{d}{p}+\rho_1)} 2^{q'(\frac{d}{p}+\rho_1)} \|\dot{\Delta}_{q'} v^j\|_p \|\nabla u\|_{\dot{B}^{\rho_2-1}_{\infty,\infty}}$$

$$\lesssim C c_q \|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}} \|\nabla u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2-1}_{p,r}}. \tag{2.65}$$

特别地, 当 $\rho_2 = 1$ 时,

$$2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1)} \|I_2\|_p \leqslant C c_q \|\nabla u\|_\infty \|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}}, \tag{2.66}$$

这里用到 $\rho_1 + \dfrac{d}{p} > 0$ 的假设.

最后, 由仿积的连续性

$$\|T_{\partial_j u} v^j\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}} \lesssim \|\nabla u\|_\infty \|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}}, \tag{2.67}$$

$$\|T_{\partial_j u} v^j\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1}_{p,r}} \lesssim \|\nabla u\|_{\dot{B}^{\rho_2-1}_{\infty,\infty}} \|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}}. \tag{2.68}$$

此自然意味着 $|I_3|$ 对应的估计成立. 最后, 利用条件 (2.55), 就推出

$$\|I_4\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1}_{p,r}} = \|\partial_j R(u, v^j)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1}_{p,r}} \lesssim \|u\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_2}_{p,r}} \|v\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}+\rho_1}_{p,r}}.$$

综上就推出引理 2.8. □

注记 2.6 (1) 从引理 2.8 的证明可以看出, 主要限制条件源于仿积余项的估计. 关于仿积估计, 详见第 1 章的仿积估计.

(2) 上面所讲的稳态情形的交换子估计, 可以很自然地推广到时空 Besov 空间或混合的时空 Besov 空间上. 经典文章可见文献 [Dan2], [Dan5], [CMZ7], [CMZ8] 及 [CM].

下面给出研究 Euler 方程或 Navier-Stokes 方程的涡度形式时出现的频段层次的交换子估计.

命题 2.10 设 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\mathrm{div} v = 0$, $\omega = \mathrm{curl} v$, 则对于所有 $q \geqslant -1$ 和 $p \in [1, +\infty]$, 有

$$\|[\Delta_q, v \cdot \nabla]\omega\|_{L^p} \leqslant C \|\nabla v\|_{L^\infty} \sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j} \|\Delta_j \omega\|_{L^p}, \tag{2.69}$$

这里 C 与 N_0 是绝对常数, 自然从

$$\sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j} \|\Delta_j \omega\|_{L^p} \leqslant \|\omega\|_p$$

就获得经典的交换子估计

$$\|[\Delta_q, v \cdot \nabla]\omega\|_{L^p} \leqslant C \|\nabla v\|_{L^\infty} \|\omega\|_p. \tag{2.70}$$

证明 由 Bony 的仿积分解

$$[\Delta_q, v\cdot\nabla]\omega = [\Delta_q, T_v\cdot\nabla]\omega + [\Delta_q, T_\nabla\cdot v]\omega + [\Delta_q, R(v,\nabla\cdot)]\omega = I_1 + I_2 + I_3. \quad (2.71)$$

I_2 的估计. 由仿积的定义, 存在 $N_0>0$, 满足 (例如 $N_0=4$)

$$\begin{aligned}\|I_2\|_p &\leqslant C\sum_{j\geqslant q-N_0}\|S_{j-1}\nabla\omega\|_\infty\|\Delta_j v\|_p\\ &\leqslant C\sum_{j\geqslant q-N_0}2^j\|\omega\|_\infty 2^{-j}\|\Delta_j\nabla v\|_p\\ &\leqslant C\sum_{j\geqslant q-N_0}\|\nabla v\|_\infty\|\Delta_j\omega\|_p\\ &\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\sum_{j\geqslant q-N_0}\|\Delta_j\omega\|_p. \end{aligned}\quad (2.72)$$

I_1 的估计. 注意到

$$I_1 = \sum_j[S_{j-1}v^k\partial_k\Delta_j, \Delta_q]\omega \leqslant \sum_{|j-q|\leqslant N_0}[S_{j-1}v^k\partial_k, \Delta_q]\Delta_j\omega$$

及

$$[S_{j-1}v^k\partial_k, \Delta_q]\Delta_j\omega(\cdot) = 2^{qn}\int_{\mathbb{R}^d}h(2^q(\cdot-y))\big(S_{j-1}v^k(\cdot)-S_{j-1}v^k(y)\big)\Delta_j\partial_k\omega(y)dy,$$

就得

$$\|[S_{j-1}v^k\partial_k, \Delta_q]\Delta_j\omega(\cdot)\|_p \lesssim 2^{-q}\|\nabla S_{j-1}v\|_\infty\|\Delta_j\partial_k\omega\|_p \lesssim \|\nabla v\|_\infty 2^{j-q}\|\Delta_j\omega\|_p.$$

因此

$$\|I_1\|_p \leqslant C\|\nabla v\|_\infty\sum_{|j-q|\leqslant N_0}2^{-|j-q|}\|\Delta_j\omega\|_p. \quad (2.73)$$

I_3 的估计.

$$\begin{aligned}I_3 &= \sum_{j\geqslant -1}[\Delta_q, \Delta_j v\cdot\nabla]\widetilde{\Delta}_j\omega = \sum_{j\geqslant q-N_0}[\Delta_q, \Delta_j v\cdot\nabla]\widetilde{\Delta}_j\omega\\ &= \sum_{q-N_0\leqslant j\leqslant q}[\Delta_q, \Delta_j v\cdot\nabla]\widetilde{\Delta}_j\omega + \sum_{j\geqslant q+1}[\Delta_q, \Delta_j v\cdot\nabla]\widetilde{\Delta}_j\omega\\ &:= R_q^1 + R_q^2.\end{aligned}$$

利用交换子在物理空间的卷积表示与中值定理, 类似于 I_1 的估计, 易见

$$\begin{aligned}\|R_q^1(v,\omega)\|_p &\leqslant C\sum_{q-N_0\leqslant j\leqslant q}2^{-q}\|\nabla\Delta_j v\|_\infty\|\nabla\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p\\ &\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\sum_{q-N_0\leqslant j\leqslant q}2^{j-q}\|\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p\end{aligned}$$

$$\leqslant C\|\nabla v\|_\infty \sum_{j\geqslant q-N_0} 2^{q-j}\|\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p. \tag{2.74}$$

注意到

$$\|\partial_k[\Delta_q, \Delta_j v^k]\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p \leqslant C2^q\|\Delta_j v^k\|_\infty\|\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p \leqslant C\|\nabla v\|_\infty 2^{q-j}\|\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p,$$

由不可压条件可见

$$\begin{aligned}\|R_q^2(v,\omega)\|_p &\leqslant \Big\|\sum_{j\geqslant q+1}\partial_k[\Delta_q, \Delta_j v^k]\widetilde{\Delta}_j\omega\Big\|_p\\ &\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\sum_{j\geqslant q+1}2^{q-j}\|\widetilde{\Delta}_j\omega\|_p.\end{aligned} \tag{2.75}$$

综合 (2.71)~(2.75) 即得命题 2.10 的证明. □

注记 2.7 作为习题, 读者可以类似地证明如下交换子估计: 设 $v\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;{\rm Lip}(\mathbb{R}^2))$, $u\in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^2)$, $p,r\in[1,\infty]$, $s\in(-1,1)$, 存在常数 $C=C(s)$ 使得 $\forall q\geqslant -1$, 有估计

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]u\|_{L^p} \leqslant Cc_q2^{-qs}\|\nabla v\|_{L^\infty}\|u\|_{B^s_{p,r}}, \quad \|c_q\|_{\ell^r}=1. \tag{2.76}$$

如果 $u=v$, 上面的交换子估计对于任意 $s>-1$ 均成立. 进而, 对于 $-1<s<2$, 有

$$\|[\Delta_q, u\cdot\nabla]u\|_{L^2} \leqslant Cc_q2^{q(1-s)}\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{H^s}, \qquad q\geqslant -1, \tag{2.77}$$

这里 $\{c_q\}$ 是 ℓ^2 中单位圆上的点.

2.3 输运扩散方程的混合时空估计

本节主要证明定理 1.3 及输运扩散方程解的不同类型的时空估计. 为此, 先介绍一个基本引理.

引理 3.1 设 $v(t,x)$ 是一个光滑向量场, ψ_t 是由 $v(t,x)$ 所决定粒子轨道, 即

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\psi_t(x)=v(t,\psi_t(x))\\ \psi_t(x)\big|_{t=0}=x\end{cases} \Longleftrightarrow \psi_t(x)=x+\int_0^t v(\tau,\psi_\tau(x))d\tau. \tag{3.1}$$

则对任意 $t\in\mathbb{R}^+$, $\psi_t(\cdot)\in\mathcal{C}^1$ 是 $\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ 的微分同胚, 并且满足估计

$$\|D\psi_t^{\pm1}\|_\infty \leqslant e^{\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau}, \tag{3.2}$$

$$\|D\psi_t^{\pm1}-I\|_\infty \leqslant e^{2\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau}-1, \tag{3.3}$$

$$\|D^2\psi_t^{\pm1}\|_\infty \leqslant e^{\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau}\int_0^t\|D^2v(\tau)\|_\infty e^{2\int_0^\tau\|Dv(\tau')\|_\infty d\tau'}d\tau. \tag{3.4}$$

证明　令 $y=\psi_t(x)$, 由 (3.1) 可见

$$\psi_t^{-1}(y)=y-\int_0^t v(\tau,\psi_\tau(\psi_t^{-1}(y)))d\tau=y-\int_0^t v(\tau,\psi_{t-\tau}^{-1}(y))d\tau. \tag{3.5}$$

如果以 $\psi_s(x)$ 为初值求解, 就是

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\psi_t(x)=v(t,\psi_t(x))\\ \psi_t(x)|_{t=s}=\psi_s(x)\end{cases}\iff \psi_t(x)=\psi_s(x)+\int_s^t v(\tau,\psi_\tau(x))d\tau.$$

类似于式 (3.5), 上式可以改写成

$$\psi_s\psi_t^{-1}(y)=y-\int_s^t v(\tau,\psi_\tau\psi_t^{-1}(y))d\tau. \tag{3.6}$$

现对式 (3.1), 式 (3.5) 及式 (3.6) 求导, 就得

$$\nabla\psi_t(x)=I+\int_0^t \nabla v(\tau,\psi_\tau(x))\nabla\psi_\tau(x)d\tau, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\nabla\psi_t^{-1}(y)=&I-\int_0^t \nabla v(\tau,\psi_{t-\tau}^{-1}(y))\nabla\psi_{t-\tau}^{-1}(y)d\tau\\ =&I-\int_0^t \nabla v(t-s,\psi_s^{-1}(y))\nabla\psi_s^{-1}(y)ds,\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\nabla\psi_s\psi_t^{-1}(y)=&\nabla\psi_{s-t}(y)=\nabla\psi_{t-s}^{-1}(y)\\ =&I+\int_t^s \nabla v(\tau,\psi_\tau\psi_t^{-1}(y))\nabla\psi_\tau\psi_t^{-1}(y)d\tau.\end{aligned} \tag{3.9}$$

首先, 就式 (3.7) 和式 (3.8) 两边取 L^∞ 范数, 可得

$$\|\nabla\psi_t^{\pm1}\|_\infty\leqslant 1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty\|\nabla\psi_\tau^{\pm1}\|_\infty d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式, 推出式 (3.2).

其次, 对式 (3.9) 改写成如下形式:

$$\nabla(\psi_s\psi_t^{-1})=\nabla\psi_{t-s}^{-1}=I\exp\int_t^s \nabla v(\tau,\psi_\tau\psi_t^{-1}(y))d\tau.$$

上式两边取 L^∞ 范数, 就得

$$\|\nabla\psi_s\psi_t^{-1}\|_\infty=\|\nabla\psi_{t-s}^{-1}\|_\infty\lesssim e^{\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau}.$$

对式 (3.7) 或式 (3.8) 两边求导, 然后再取 L^∞ 范数, 可以推出

$$\begin{aligned}\|D^2\psi_t^{\pm1}\|_\infty\leqslant&\int_0^t\Big[\|D^2v(\tau,\psi_\tau(\nabla\psi_\tau(x))^2\|_\infty+\|\nabla v(\tau,\psi_\tau)\|_\infty\|D^2\psi_t^{\pm1}\|_\infty\Big]d\tau\\ \leqslant&\int_0^t\|D^2v\|_\infty\|\nabla\psi_\tau\|_\infty^2\mathrm{d}\tau+\int_0^t\|\nabla v\|_\infty\|D^2\psi_t^{\pm1}\|_\infty d\tau.\end{aligned} \tag{3.10}$$

对上式利用 Gronwall 不等式, 就推出估计 (3.4).

最后, 只要注意到

$$\|D\psi - I\|_\infty \leqslant \int_0^t \|Dv(\tau)\|_\infty \mathrm{d}\tau e^{\int_0^t \|Dv(\tau)\|_\infty d\tau}$$

及 $e^{2x}-1 \geqslant xe^x$, 就可推出估计 (3.3). □

定理 1.3 的证明 令 $u_q := \dot\Delta_q u$, $f_q := \dot\Delta_q f$, 用 $\dot\Delta_q$ 作用于方程 (TD_ν) 两边, 容易看出

$$\partial_t u_q + \dot S_{q-1}v \cdot \nabla u_q - \nu\Delta u_q = f_q + R_q, \tag{3.11}$$

这里

$$R_q := (\dot S_{q-1}v - v)\cdot\nabla u_q - [\dot\Delta_q, v\cdot\nabla]u. \tag{3.12}$$

记 ψ_q 是由光滑流场 $\dot S_{q-1}v$ 所决定的流函数 ($\phi_q \triangleq \psi_q^{-1}$), 相应的引入如下记号:

$$\bar u_q := u_q\circ\psi_q, \quad \bar f_q := f_q\circ\psi_q, \quad \bar R_q := R_q\circ\psi_q. \tag{3.13}$$

则

$$\partial_t\bar u_q - \nu\Delta\bar u_q = \bar f_q + \bar R_q + \nu T_q, \quad T_q := \Delta u_q\circ\psi_q - \Delta\bar u_q. \tag{3.14}$$

将 $\dot\Delta_j$ 作用到式 (3.14) 的两边, 并利用算子半群的局部化估计 (见引理 2.3), 可以推出

$$\begin{aligned}\|\dot\Delta_j\bar u_q(t)\|_p \lesssim & e^{-\kappa\nu t2^{2j}}\|\dot\Delta_j u_{0,q}\|_p \\ & + \int_0^t e^{-\kappa\nu(t-\tau)2^{2j}}\big(\|\dot\Delta_j\bar f_q\|_p + \|\dot\Delta_j\bar R_q\|_p + \nu\|\dot\Delta_j T_q\|_p\big)d\tau.\end{aligned} \tag{3.15}$$

首先, 考虑 $\dot\Delta_j T_q$ 的贡献 (DF 表示 Jacobi 矩阵, $\nabla F = (DF)^*$).

$$\begin{aligned}T_q =& \Delta u_q\circ\psi_q - \mathrm{tr}(\nabla\psi_q D^2u_q\circ\psi_q\cdot D\psi_q) - Du_q\circ\psi_q\cdot\Delta\psi_q \\ =& \mathrm{tr}((\mathrm{Id}-\nabla\psi_q)D^2u_q\circ\psi_q\cdot D\psi_q) + \mathrm{tr}(D^2u_q\circ\psi_q(\mathrm{Id}-D\psi_q)) \\ & - Du_q\circ\psi_q\cdot\Delta\psi_q.\end{aligned} \tag{3.16}$$

因此

$$\|\dot\Delta_j T_q\|_p \lesssim (\|D\psi_q\|_\infty+1)\|\mathrm{Id}-D\psi_q\|_\infty\|D^2u_q\circ\psi_q\|_p + \|\triangle\psi_q\|_\infty\|Du_q\circ\psi_q\|_p. \tag{3.17}$$

利用变量代替与 Bernstein 估计, 相应的 L^p 模可以估计如下:

$$\|Du_q\circ\psi_q\|_p \leqslant 2^q\|J_{\phi_q}\|_\infty^{\frac1p}\|u_q\|_p, \quad \|D^2u_q\circ\psi_q\|_p \leqslant 2^{2q}\|J_{\phi_q}\|_\infty^{\frac1p}\|u_q\|_p. \tag{3.18}$$

由于粒子轨道映射满足引理 3.1(此时 $v \longrightarrow S_{q-1}v$), 并且利用 Bernstein 估计, 得

$$\begin{cases}\max(\|D\phi_q\|_\infty, \|D\psi_q\|_\infty) \leqslant e^{C\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau}, \\ \|D\psi_q(t)-\mathrm{Id}\|_\infty \leqslant e^{C\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau} - 1, \\ \|D^2\psi_q(t)\|_\infty \leqslant C2^q(e^{C\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau}-1).\end{cases} \tag{3.19}$$

对所有的 $q\in\mathbb{Z}$ 和 $t\in[0,T]$, 有估计

$$\|\dot\Delta_j T_q(t)\|_p\leqslant C2^{2q}(e^{CV(t)}-1)\|u_q(t)\|_p,\quad V(t)=\int_0^t\|Dv(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{3.20}$$

其次, 考虑 $\dot\Delta_j\bar f_q$. 根据 Bernstein 估计, 可推出

$$\|\dot\Delta_j\bar f_q\|_p\approx 2^{-j}\|\dot\Delta_j D\bar f_q\|_p. \tag{3.21}$$

注意到 $D\bar f_q=Df_q\circ\psi_q\cdot D\psi_q$, 则由 Bernstein 估计及式 (3.19) 就可推出

$$\|\dot\Delta_j\bar f_q(t)\|_p\lesssim e^{CV(t)}2^{q-j}\|f_q(t)\|_p. \tag{3.22}$$

同理可证

$$\|\dot\Delta_j\bar R_q(t)\|_p\lesssim e^{CV(t)}2^{q-j}\|R_q\|_p. \tag{3.23}$$

由交换子估计, 可见

$$\begin{aligned}\|\dot\Delta_j\bar R_q(t)\|_p&\lesssim 2^{q-j}e^{CV(t)}2^{-qs}c_q(t)\|Dv\|_{L^\infty\cap\dot B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}}\|u(t)\|_{\dot B^s_{p,r}}\\&\lesssim 2^{q-j}e^{CV(t)}2^{-qs}c_q(t)Z'(t)\|u(t)\|_{\dot B^s_{p,r}},\end{aligned} \tag{3.24}$$

这里 $\|c_q(t)\|_{\ell^r}\leqslant 1$, p,p_1,r,s 满足引理 2.4 的条件.

现将式 (3.20), (3.22), (3.24) 代入 (3.15), 可得

$$\begin{aligned}\|\dot\Delta_j\bar u_q(t)\|_p\lesssim{}& e^{-\kappa\nu t2^{2j}}\|\dot\Delta_j u_{0,q}\|_p+\int_0^t e^{-\kappa\nu(t-\tau)2^{2j}}\Big(e^{CV(\tau)}2^{q-j}\|f_q(\tau)\|_p\\&+2^{q-j}e^{CV(\tau)}2^{-qs}c_q(\tau)Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot B^s_{p,r}}+\nu2^{2q}(e^{CV(\tau)}-1)\|u_q(\tau)\|_p\Big)d\tau.\end{aligned}$$

两边同乘以 $\nu^{\frac1\rho}2^{(\frac2\rho+s)q}$, 并取 $L^\rho(0,t)$ 积分可见

$$\begin{aligned}\nu^{\frac1\rho}2^{q(s+\frac2\rho)}\|\dot\Delta_j\bar u_q\|_{L^\rho_t(I;L^p)}\lesssim{}&2^{\frac2\rho(q-j)}2^{qs}\|\dot\Delta_j u_{0,q}\|_p\\&+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{(1+\frac2\rho+\frac{2}{\rho_1'})(q-j)}e^{CV(t)}2^{q(s-\frac{2}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L^{\rho_1}_t(I;L^p)}\\&+\nu^{\frac1\rho}2^{q(s+\frac2\rho)}2^{2(q-j)}(e^{CV(t)}-1)\|u_q\|_{L^\rho_t(I;L^p)}\\&+2^{(1+\frac2\rho)(q-j)}\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)e^{CV(\tau)}\|u(\tau)\|_{\dot B^s_{p,r}}d\tau.\end{aligned} \tag{3.25}$$

选取待定常数 N_0, 分解

$$u_q=\dot S_{q-N_0}\bar u_q\circ\phi_q+\sum_{j\geqslant q-N_0}\dot\Delta_j\bar u_q\circ\phi_q, \tag{3.26}$$

则对任意 $t\in[0,T]$, 可见 (用到坐标变换, 这样才会出现因子 $e^{CV(t)}$)

$$\|u_q\|_{L^\rho_t(I;L^p)}\leqslant e^{CV(t)}\Big(\|\dot S_{q-N_0}\bar u_q\|_{L^\rho_t(I;L^p)}+\sum_{j\geqslant q-N_0}\|\dot\Delta_j\bar u_q\|_{L^\rho_t(I;L^p)}\Big). \tag{3.27}$$

应用局部化引理 2.1 可见 $(q'=q-N_0)$

$$\|\dot{S}_{q-N_0}\bar{u}_q\|_p \lesssim \|J_{\phi_q}\|_\infty^{\frac{1}{p}}(2^{-q}\|DJ_{\phi_q}\|_\infty\|J_{\psi_q}\|_\infty + 2^{-N_0}\|D\phi_q\|_\infty)\|u_q\|_p.$$

利用引理 3.1 并注意到 $e^{2x}-1 \geqslant xe^x$, 可见

$$\|\dot{S}_{q-N_0}\bar{u}_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)} \lesssim e^{CV(t)}(e^{CV(t)}-1+2^{-N_0})\|u_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)}. \tag{3.28}$$

1. 高频部分的估计

就式 (3.25) 两边关于 $j \geqslant q-N_0$ 求和, 并且利用正交条件

$$\dot{\Delta}_j u_{0,q} = 0, \quad |j-q|>1,$$

可以推出

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geqslant q-N_0} \nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{2}{\rho})}\|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)}\\
\lesssim& 2^{qs}\|u_{0,q}\|_p + e^{CV(t)}\Big[2^{3N_0}\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{q(s-\frac{2}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}(I;L^p)}\\
&+2^{2N_0}(e^{CV(t)}-1)\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{2}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)}\\
&+2^{3N_0}\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big],
\end{aligned} \tag{3.29}$$

这里用到 $\rho\in[\rho_1,\infty]$.

现将 (3.28), (3.29) 代入 (3.27), 可见

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{2}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)} \leqslant& Ce^{CV(t)}\Big(2^{qs}\|u_{0,q}\|_p + 2^{3N_0}\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{q(s-\frac{2}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}(I;L^p)}\\
&+\big(2^{-N_0}+2^{2N_0}(e^{CV(t)}-1)\big)\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{2}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)}\\
&+2^{3N_0}\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

选取 N_0 使得

$$2C2^{-N_0} \in \Big(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\Big]. \tag{3.31}$$

进而, 选取 T_1 使得满足

$$T_1 \leqslant T, \quad CV(T_1)\leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon = \min\Big(\log 2, \frac{2^{-2N_0}}{16C}\Big). \tag{3.32}$$

对于上述选取的 T_1 与 N_0, 右边第三项在 $t\leqslant T_1$ 时, 可以被左边项吸收. 因此, $\forall t\in[0,T_1]\triangleq I_1$, 有估计

$$\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{2}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho(I_1;L^p)} \leqslant& C_1\Big(2^{qs}\|u_{0,q}\|_p + \nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{q(s-\frac{2}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}(I_1;L^p)}\\
&+\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

两边关于 q 求 ℓ^r 和, 则对 $\forall t\in I_1$ 有

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_t^{\rho}(I_1;\dot{B}_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})}\leqslant C_1\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}_t^{\rho_1}(I_1;\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{2}{\rho_1'}})}+\int_0^t Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big). \tag{3.34}$$

下面就很容易完成定理 1.3 的证明. 事实上, 剖分 $[0,T]$:

$$[0,T]=\bigcup I_k,\quad I_{k+1}=[T_k,T_{k+1}],\quad 0=T_0<T_1<\cdots<T_{l+1}=T,$$

使得

$$C\int_{T_k}^{T_{k+1}}\|Dv(t)\|_\infty dt\approx\varepsilon. \tag{3.35}$$

类同于 (3.34) 的证明, 有

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^{\rho}([T_k,t];\dot{B}_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})}\leqslant{}& C_1\Big(\|u(T_k)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}([T_k,t];\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{2}{\rho_1'}})}\\&+\int_{T_k}^t Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big),\quad\forall t\in[T_k,T_{k+1}].\end{aligned} \tag{3.36}$$

对于 $\forall t\in[0,T]$, 由归纳技术容易看出

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^{\rho}(I;\dot{B}_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})}\leqslant C_1^{l+1}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{2}{\rho_1'}})}+\int_0^t Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big). \tag{3.37}$$

由于区间的个数 $l\approx CV(T)\varepsilon^{-1}$, 适当修改常数 C, 就可以推出

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^{\rho}(I;\dot{B}_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})}\leqslant{}& Ce^{CV(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{2}{\rho_1'}})}\\&+\int_0^T Z'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}dt\Big).\end{aligned} \tag{3.38}$$

当取 $\rho=\infty$, 则

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(I;\dot{B}^s_{p,r})}\leqslant{}& Ce^{CV(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{2}{\rho_1'}})}\\&+\int_0^T Z'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}dt\Big).\end{aligned} \tag{3.39}$$

由 Gronwall 不等式就推出

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(I;\dot{B}^s_{p,r})}\leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{2}{\rho_1'}})}\Big). \tag{3.40}$$

对于一般 $\rho\in[\rho_1,\infty]$, 将上面的估计代入 (3.38), 就得所求的估计.

2. (TD_ν) 在非齐次时空 Besov 空间的估计

我们将定理 1.3 中的正则性估计推广到非齐次空间的情形. 采用非齐次空间中的 Littlewood-Paley 理论, 引入如下记号:

$$\begin{cases}\Delta_q = \dot{\Delta}_q = \varphi(2^{-q}D), \quad q \geqslant 0,\\ \Delta_{-1} \triangleq \dot{S}_0 = \chi(D).\end{cases} \tag{3.41}$$

与齐次 Littlewood-Paley 分解相比, 非齐次 Littlewood-Paley 分解确保

$$\sum_{q\geqslant -1} \Delta_q u = u, \quad \forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{3.42}$$

非齐次 Besov 空间的 Littlewood-Paley 分解详见第 1 章, 我们采用混合时空 Besov 空间 $\mathcal{L}^\rho(I; B^s_{p,r})$, 意义在于混合时空 Besov 空间给出了较通常的时空 Besov 空间更优的先验估计.

现在来讨论 (TD_ν) 方程解在非齐次 Besov 空间中的先验估计. 当 $q \geqslant 0$ 时, $\Delta_q u$ 的估计完全类同于 $\dot{\Delta}_q u$ 的情形. 具体地讲, 用 Δ_q 作用于 (TD_ν) 两边, 施行变量代替, 就是

$$\partial_t \bar{u}_q - \nu\Delta\bar{u}_q = \bar{f}_q + \bar{R}_q + \nu T_q, \quad q \geqslant 0, \tag{3.43}$$

其中非齐次余项仍是

$$\bar{R}_q := (S_{q-1}v - v)\cdot\nabla\Delta_q u - [\Delta_q, v\cdot\nabla]u, \quad q \geqslant 0. \tag{3.44}$$

再用 $\dot{\Delta}_j$ 作用 (3.43) 两边, 利用算子半群的局部化估计可见

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q(t)\|_p \lesssim & e^{-\kappa\nu t 2^{2j}}\|\dot{\Delta}_j u_{0,q}\|_p\\ &+\int_0^t e^{-\kappa\nu(t-\tau)2^{2j}}(\|\dot{\Delta}_j\bar{f}_q\|_p + \|\dot{\Delta}_j\bar{R}_q\|_p + \nu\|\dot{\Delta}_j T_q\|_p)d\tau.\end{aligned} \tag{3.45}$$

由交换子估计 (引理 2.4) 的证明过程, 对于非齐次空间 $B^s_{p,r}$ 而言, 余项 R_q 的估计可以换成

$$\|R_q\|_p \leqslant C c_q 2^{-qs} Y'(t)\|u\|_{B^s_{p,r}}, \tag{3.46}$$

这里 $s > -\min\left(\dfrac{d}{p_1}, \dfrac{d}{p'}\right)$ 或 $s > -1-\min\left(\dfrac{d}{p_1}, \dfrac{d}{p'}\right)$, 若 $\mathrm{div} v = 0$.

$$Y'(t) := \begin{cases}\|\nabla v(t)\|_{B^{\frac{d}{p_1}}_{p_1,\infty}\cap L^\infty}, & 若\ s < 1 + \dfrac{d}{p_1},\\ \|\nabla v(t)\|_{B^{s-1}_{p_1,r}}, & 若\ s > 1+\dfrac{d}{p_1}\ 或\ \left\{s = 1+\dfrac{d}{p_1}\ 且\ r = 1\right\}.\end{cases} \tag{3.47}$$

这样, 完全类同于定理 1.3 的证明, 就可以获得类似于 (3.33) 的估计. 换言之, 存在 $T_1>0$ 满足 (3.32), 且对任意 $t\in[0,T_1]=I_1$ 和 $q\geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{2}{\rho})}\|\Delta_q u\|_{L_t^\rho(I_1;L^p)}\leqslant &C_1\Big(2^{qs}\|\Delta_q u_0\|_{L^p}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{q(s-\frac{2}{\rho_1'})}\|\Delta_q f\|_{L_t^{\rho_1}(I_1;L^p)}\\&+\int_0^{T_1}c_q(\tau)Y'(\tau)\|u(\tau)\|_{B^s_{p,r}}d\tau\Big).\end{aligned}\tag{3.48}$$

与定理 1.3 证明不同, 我们尚需估计低频部分. 用 Δ_{-1} 作用于方程两边可见

$$\partial_t\Delta_{-1}u+v\cdot\nabla\Delta_{-1}u-\nu\Delta\Delta_{-1}u=\Delta_{-1}f-[\Delta_{-1},v\cdot\nabla]u.\tag{3.49}$$

注意到

$$[\Delta_{-1},v\cdot\nabla]u=[\widetilde{v}^j,\Delta_{-1}]\partial_j u+[\Delta_{-1}v^j,\Delta_{-1}]\partial_j u,\quad v=\Delta_{-1}v+\widetilde{v}.$$

利用经典的交换子估计引理 2.5,

$$\|[\Delta_{-1},v\cdot\nabla]u\|_p\leqslant Y'(t)\|u\|_{B^s_{p,r}}.$$

对于 (3.49) 使用能量积分技术, 容易看出

$$\begin{aligned}\|\Delta_{-1}u(t)\|_{L^p}\leqslant&\|\Delta_{-1}u_0\|_{L^p}+\int_0^t\|\Delta_{-1}f\|_{L^p}d\tau\\&+\int_0^t\Big(\frac{1}{p}\|\mathrm{div}v\|_{L^\infty}\|\Delta_{-1}u\|_{L^p}+\|[\Delta_{-1},v\cdot\nabla]u\|_{L^p}\Big)d\tau,\end{aligned}\tag{3.50}$$

这里用到

$$-\int\nu\Delta(\Delta_{-1}u)\cdot|\Delta_{-1}u|^{p-2}\Delta_{-1}udx\geqslant 0.$$

因此, 对 (3.48) 及 (3.50) 关于时间变量取积分后所得的等式两边关于 $q\geqslant -1$ 求和, 可见

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_t^\rho(I_1;B^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}\leqslant&C(1+\nu t)^{\frac{1}{\rho}}\Big(\|u_0\|_{B^s_{p,r}}+\int_0^{T_1}Y'(\tau)\|u(\tau)\|_{B^s_{p,r}}d\tau\Big)\\&+C(1+\nu t)^{\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1'}}\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}_t^{\rho_1}(I_1;B^{s-\frac{2}{\rho_1'}}_{p,r})}.\end{aligned}$$

采用定理 1.3 的证明方法, 可以将上式推广到 $[0,T]=I$, 直接应用 Gronwall 不等式, 就可以推出如下结果:

定理 3.2 设 $1\leqslant p\leqslant p_1\leqslant\infty$, $1\leqslant\rho_1,r\leqslant\infty$ 并且 s 满足

$$s>-\min\Big(\frac{d}{p_1},\frac{d}{p'}\Big)\quad\text{或}\quad s>-1-\min\Big(\frac{d}{p_1},\frac{d}{p'}\Big),\ \text{若 }\mathrm{div}v=0.$$

则存在常数 $C=C(d,r,s,p,p_1)$ 使得 (TD_ν) 的任意的光滑解满足如下先验估计:

$$
\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^{\rho}(I;B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leqslant & Ce^{C(1+\nu T)^{\frac{1}{\rho}}Y(T)}\Big((1+\nu T)^{\frac{1}{\rho}}\|u_0\|_{B_{p,r}^s} \\
& + (1+\nu T)^{1+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}}\nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;B_{p,r}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}})}\Big),
\end{aligned} \tag{3.51}
$$

这里 $\rho\in[\rho_1,\infty]$, $Y(T)=\displaystyle\int_0^T Y'(t)dt$, $Y'(t)$ 由公式 (3.47) 确定.

注记 3.1　(1) 在估计 (3.51) 中, 时间变量依赖的现象不是技术原因, 而是处理低频时所需要的, 即使当 $\nu=0$ 时, 亦会有这一现象. 另外, 在非齐次空间的情形, 不要求对 s 有上界的限制.

(2) 利用通常的 Fourier 局部化 (无需进行保测变换与二次微局部化) 技术与能量积分估计, 可以推出如下正则性估计:

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(B_{p,r}^s)} + \kappa\nu\frac{p-1}{p^2}\Big\|u-\Delta_{-1}u\Big\|_{\mathcal{L}^1(B_{p,r}^{s+2})} \\
\leqslant & Ce^{CY(t)}\Big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \int_0^t e^{-CY(\tau)}\|f(\tau)\|_{B_{p,r}^s}d\tau\Big),
\end{aligned} \tag{3.52}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{\mathcal{L}^{\infty}(B_{p,r}^s)} + \kappa\nu\frac{p-1}{p^2}\Big\|u-\Delta_{-1}u\Big\|_{\mathcal{L}^1(B_{p,r}^{s+2})} \\
\leqslant & Ce^{CY(t)}\Big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \|f(\tau)\|_{\mathcal{L}_t^1(B_{p,r}^s)}\Big),
\end{aligned} \tag{3.53}
$$

这里 κ 由不等式

$$
-\int_{\mathbb{R}^d}\Delta\Delta_q f|\Delta_q f|^{p-2}\Delta_q f dx \geqslant \kappa\frac{p-1}{p^2}2^{2q}\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_q f|^p dx
$$

所决定.

(3) 在 $(\mathrm{TD})_\nu$ 中, 如果 $u=\nabla\times v$ (或 u 可以表示成一阶齐次微分算子作用于 v), 与齐次 Besov 空间框架相类似, 估计 (3.51) 对于任意的 $s>-1$ 成立, 并且

$$
Y(T)=\int_0^T\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt.
$$

3. log 估计

Vishik[Vi] 利用输运方程的结构 (即输运方程的解可以由初值与流函数表示出来, 但对于含扩散项的输运扩散方程, 则无法实现), 证明了 log-型的估计. Hmidi 与 Keraani 则是对输运扩散型方程导出了新的 Logarithmic 估计, 它不依赖扩散系数 ν. 因此, 由此可以推出初值正则性的保持性.

定理 3.3 (Vishik-log 估计)　设 $g:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ 是保持 Lebesgue 测度的同胚映射,$u\in B_{\infty,1}^0$, 则 $u\circ g^{-1}\in B_{\infty,1}^0$, 并且存在常数 C, 使得

$$
\|u\circ g^{-1}\|_{B_{\infty,1}^0}\leqslant C(1+\log(\|g\|_{\mathrm{Lip}}\|g^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}))\|u\|_{B_{\infty,1}^0}. \tag{3.54}
$$

证明 在非齐次 Littlewood-Paley 分解定义中, 常选取

$$\widetilde{\varphi}(\xi)=\varphi(2^{-1}\xi)+\varphi(\xi)+\varphi(2\xi)\in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d),$$

它支撑在环上且满足在 $\mathrm{supp}\varphi$ 的邻域上恒等于 1. 对于 $k=1,2,\cdots,d$, 定义 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 中的函数如下:

$$\widehat{f}_k(\xi)=-i\xi_k|\xi|^{-2}\widetilde{\varphi}(\xi),\quad \widehat{\theta}_k(\xi)=\widehat{f}_k(\xi)\varphi(\xi),\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^d. \tag{3.55}$$

显然, $\widehat{\theta}_k(\xi)\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ 且对于任意的 $1\leqslant k\leqslant d$, 有

$$\mathrm{supp}\widehat{\theta}_k\subset\left\{\xi\in\mathbb{R}^d,\ \frac{3}{4}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{4}{3}\right\}.$$

对于任意的 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, 定义:

$$\widetilde{\Delta}_{jk}u=\widehat{\theta}_k(2^{-j}D)u=2^{jd}\theta_k(2^j\cdot)*u,\qquad j\geqslant 0,\ k=1,2,\cdots,d. \tag{3.56}$$

注意到

$$\varphi(2^j\xi)=2^{-j}\sum_{k=1}^{d}i\xi_k f_k(2^{-j}\xi)\varphi(2^j\xi)=2^{-j}\sum_{k=1}^{d}i\xi_k\theta_k(2^{-j}\xi), \tag{3.57}$$

就可以得到 Δ_j 角向分解表示

$$\Delta_j u=2^{-j}\sum_{k=1}^{d}\partial_k\widetilde{\Delta}_{jk}u,\qquad j\geqslant 0. \tag{3.58}$$

选取待定常数 $N>1$, 分三种情形来予以讨论.

情形 1. $j-q\geqslant N$.

$$\begin{aligned}\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})(x)&=\sum_{k=1}^{d}2^{dj-j}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_k\theta_k(2^j(x-y))(\Delta_q u)(g^{-1}(y))dy\\&=\sum_{k=1}^{d}2^{dj-j}\int_{\mathbb{R}^d}\theta_k(2^j(x-y))\partial_k((\Delta_q u)(g^{-1}(y)))dy.\end{aligned} \tag{3.59}$$

对于 $j-q\geqslant N$, 直接估计可得

$$\|\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})\|_{\infty}\leqslant C2^{-j}\|\nabla\Delta_q u\|_{\infty}\|\nabla g^{-1}\|_{\infty}\leqslant C2^{q-j}\|\Delta_q u\|_{\infty}\|g^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}. \tag{3.60}$$

情形 2. $q-j\geqslant N$.

$$\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})=2^{-q}\sum_{k=1}^{d}\Delta_j(\partial_k(\widetilde{\Delta}_{qk}u)\circ g^{-1}). \tag{3.61}$$

注意到 g 是 $\mathbb{R}^d$ 上的保测同胚, 因此

$$
\begin{aligned}
\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})(x) &= \sum_{k=1}^{d} 2^{dj-q}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-y))\partial_k(\widetilde{\Delta}_{qk}u)(g^{-1}(y))dy\\
&= \sum_{k=1}^{d} 2^{dj-q}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(2^j(x-g(y)))\partial_k\widetilde{\Delta}_{qk}u(y)dy\\
&= -\,2^{dj-q}\sum_{k=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_{y_k}\varphi(2^j(x-g(y)))\widetilde{\Delta}_{qk}u(y)dy.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

在 $q-j\geqslant N$ 的条件下, 就有

$$
\|\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})\|_\infty \leqslant C2^{j-q}\sum_{k=1}^{d}\|\widetilde{\Delta}_{qk}u\|_\infty\|\nabla g\|_\infty \leqslant C2^{j-q}\sum_{k=1}^{d}\|\widetilde{\Delta}_{qk}u\|_\infty\|g\|_{\mathrm{Lip}}.
\tag{3.63}
$$

情形 3. $|q-j|\leqslant N$. 显然, 有如下平凡的估计:

$$
\|\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})\|_\infty \leqslant C\|\Delta_q u\|_\infty.
\tag{3.64}
$$

综合利用 (3.60),(3.63) 及 (3.64), 就可以推出

$$
\begin{aligned}
\|u\circ g^{-1}\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant& \sum_{j=-1}^{\infty}\|\Delta_j(u\circ g^{-1})\|_\infty\\
\leqslant& \sum_{q=-1}^{\infty}\Big(\sum_{j\leqslant q-N}+\sum_{j\geqslant q+N}+\sum_{|j-q|<N}\Big)\|\Delta_j((\Delta_q u)\circ g^{-1})\|_\infty\\
\leqslant& C\|g^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}2^{-N}\sum_{q=-1}^{\infty}\|\Delta_q u\|_\infty + C\|g\|_{\mathrm{Lip}}2^{-N}\sum_{k=1}^{d}\sum_{q=0}^{\infty}\|\widetilde{\Delta}_{qk}u\|_\infty\\
&+C(2N+1)\sum_{q=-1}^{\infty}\|\Delta_q u\|_\infty\\
\leqslant& C\big(2^{-N}\|g^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}+2^{-N}\|g\|_{\mathrm{Lip}}+N\big)\|u\|_{B^0_{\infty,1}}.
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

选取

$$
N=\Big[\log_2\big(\|g\|_{\mathrm{Lip}}\|g^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}\big)\Big]+1,
$$

就得 log-型的估计 (3.54). □

注记 3.2 (1) 在定理的证明中, 用到了 $\|g^{\pm1}\|_{\mathrm{Lip}}\geqslant 1$, 这一事实是因为 $g^{\pm1}$ 是保持 Lebesgue 测度不变的.

(2) 对于 $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, 定理 3.3 中一般形式的 Vishik-log-型不等式:

$$
\|u\circ g^{-1}\|_{B^0_{p,r}} \leqslant C(1+\log(\|g\|_{\mathrm{Lip}}\|g^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}))\|u\|_{B^0_{p,r}},\quad u\in B^0_{p,r}
\tag{3.66}
$$

仍然成立.

作为 Vishik-log-型不等式的直接推论, 就有

推论 3.4　设 $(p,r)\in[1,\infty]^2$, $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$, $\mathrm{div}v=0$, u 是输运方程的解:

$$\begin{cases}\partial_t u+v\cdot\nabla u=0,\\ u|_{t=0}=u_0(x).\end{cases}\tag{3.67}$$

如果 $u_0\in B^0_{p,r}$, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}^+$, 有先验估计

$$\|u\|_{L^\infty_t B^0_{p,r}}\leqslant C\|u_0\|_{B^0_{p,r}}\Big(1+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big),\tag{3.68}$$

其中 C 是一个绝对常数.

注记 3.3　事实上, 用 g 表示推论 3.4 中的零散度 Lip 向量场决定的保测同胚映射, 则 (3.67) 的解可以表示成 $u=u_0(g^{-1}(t,x))$. 因此, 利用 Vishik-log-型不等式 (3.66) 及引理 3.1 中的估计

$$\|\nabla g^{\pm1}\|_\infty\leqslant\exp\Big(\int_0^t\|\nabla v\|_\infty d\tau\Big)$$

就得估计 (3.68). 在研究 2 维 Euler 方程在临界空间 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$ 中的整体适定性时, 就需要改进的线性估计 (3.68), 这里 $p=\infty$, $r=1$.

然而, 对于输运扩散方程, 我们不能直接利用 Vishik-log-型不等式. 但是, 通过经典的时空估计及 Fourier 局部化技术可以获得相同的 log-型时空估计 (输运方程是特例). 考虑如下的输运扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t f+v\cdot\nabla f-\nu\Delta f=g,\quad \nu\geqslant 0,\\ f|_{t=0}=f_0(x),\end{cases}\tag{3.69}$$

则有如下经典的估计 (解在 Besov 空间中保持正则性):

命题 3.5 (Besov 正则性的保持)　设 $s\in(-1,1)$, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, $\mathrm{div}v=0$, $f_0(x)\in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 及 $g(t,x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))$. 对于 (3.69) 的任意的光滑解 $f(t)$ 满足如下先验估计

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_t(B^s_{p,r})}\leqslant\Big(\|f_0\|_{B^s_{p,r}}+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}}d\tau\Big)e^{CV(t)},\qquad\forall t\in\mathbb{R}_+,\tag{3.70}$$

这里 $V(t)=\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau$. 进而还有

端点情形. 对于端点情形:

$$s=-1,\ r=\infty,\ p\in[1,\infty]\quad\text{或}\quad s=1,\ r=1,\ p\in[1,\infty],\tag{3.71}$$

仍有估计

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_t(B^s_{p,r})}\leqslant\Big(\|f_0\|_{B^s_{p,r}}+\int_0^t e^{-CU(\tau)}\|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}}d\tau\Big)e^{CU(t)},\qquad\forall t\in\mathbb{R}_+,\tag{3.72}$$

这里 $U(t) = \int_0^t \|\nabla v(t)\|_{B^1_{\infty,1}} dt$.

情形 $f = \mathbf{curl} v$. 在此情形下, 估计 (3.70), (3.72) 对于任意的 $s \in [1, \infty)$ 均成立.

证明 第一步. 用 Fourier 局部化技术, 即 Δ_q 作用于输运扩散方程两边, 可以看出

$$\partial_t f_q + v \cdot \nabla f_q - \nu \Delta f_q = -[\Delta_q, v \cdot \nabla] f + g_q. \tag{3.73}$$

利用标准的 L^p 方法, 两边同乘以 $|f_q|^{p-2} f_q$, 积分可见

$$\|f_q\|_{L^\infty_t L^p} \leqslant \|f_q(0)\|_p + \int_0^t \|[\Delta_q, v \cdot \nabla] f(\tau)\|_p d\tau + \int_0^t \|g_q(\tau)\|_p d\tau, \tag{3.74}$$

这里用到

$$-\nu \int_{\mathbb{R}^d} \Delta f \cdot |f|^{p-2} f dx \geqslant \frac{4\nu(p-1)}{p^2} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla |f|^{\frac{p}{2}})^2 dx.$$

两边同乘以 2^{qs}, 然后取 ℓ^r 范数, 利用 Minkowski 不等式及交换子估计 (引理 2.5),

$$\|2^{qs} \|[\Delta_q, v \cdot \nabla] f(\tau)\|_p\|_{\ell^r} \leqslant C Z(t) \|f\|_{B^s_{p,r}}, \quad Z(t) = \|\nabla v(t)\|_\infty. \tag{3.75}$$

因此

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_t(B^s_{p,r})} &\leqslant \|f_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau + C \int_0^t Z(\tau) \|f(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau \\ &\leqslant \|f_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau + C \int_0^t Z(\tau) \|f(\tau)\|_{\mathcal{L}^\infty_\tau(B^s_{p,r})} d\tau.\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式, 立即得到估计 (3.70).

事实上, 记上式右边为 $F(t)$, 则

$$F'(t) \leqslant \|g\|_{B^s_{p,r}} + \|\nabla v\|_\infty \|f\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|g\|_{B^s_{p,r}} + C \|\nabla v\|_\infty F(t).$$

因此

$$\left(e^{-C\int_0^t \|\nabla v\|_\infty d\tau} F\right)' \leqslant \|g\|_{B^s_{p,r}} e^{-C\int_0^t \|\nabla v\|_\infty d\tau}.$$

从而推出

$$F(t) \leqslant \left(\|f_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \|\nabla v(\tau')\|_\infty d\tau'} \|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\right) e^{\int_0^t \|\nabla v\|_\infty d\tau}.$$

同时也就证明了

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_t(B^s_{p,r})} \leqslant \left(\|f_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-CV(\tau)} \|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\right) e^{CV(t)}.$$

第二步. 类似于第一步的步骤, 不同之处就是要替换交换子估计 (3.75). 注意到

$$\begin{aligned}[\Delta_q, v\cdot\nabla]f &= [\Delta_q, T_{v^j}]\partial_j f - T_{\Delta_q\partial_j f}v^j - R(\Delta_q\partial_j f, v^j)\\ &\quad + \Delta_q T_{\partial_j f}v^j + \Delta_q R(\partial_j f, v^j)\\ &= [\Delta_q, T_{v^j}]\partial_j f - T'_{\Delta_q\partial_j f}v^j + \Delta_q T_{\partial_j f}v^j + \Delta_q R(\partial_j f, v^j)\\ &\triangleq I_q + II_q + III_q + IV_q. \end{aligned}\tag{3.76}$$

I_q 的估计. 根据频率的相互作用的正交性,

$$I_q = [\Delta_q, T_{v^j}]\partial_j f = \sum_{|k-q|\leqslant 4}[\Delta_q, S_{k-1}v^j]\Delta_k\partial_j f.$$

将交换子表示成物理空间的形式, 利用中值定理就得

$$\begin{aligned}\|[\Delta_q, S_{k-1}v^j]\Delta_k\partial_j f\|_p &\lesssim 2^{-q}\|\nabla S_{k-1}v\|_\infty\|\partial_j\Delta_k f\|_p\\ &\lesssim 2^{k-q}\|\nabla v\|_\infty\|\Delta_k f\|_p.\end{aligned}$$

因此, 利用离散的 Young 不等式, 就得

$$\sup_{q\geqslant -1}2^{-q}\|I_q\|_p \lesssim \sum_{|q-k|\leqslant 4}2^{k-2q}\|\nabla v\|_\infty\|\Delta_k f\|_p \lesssim \|\nabla v\|_\infty\|f\|_{B^{-1}_{p,\infty}}.\tag{3.77}$$

II_q 的估计. 按定义,

$$II_q = -T'_{\Delta_q\partial_j f}v^j = -\sum_{k\geqslant q-2}S_{k+2}\Delta_q\partial_j f\Delta_k v^j.$$

利用 Bernstein 估计, 可见

$$2^{-q}\|II_q\|_p \lesssim 2^{-q}\|\Delta_q f\|_p\sum_{k\geqslant q-2}2^{q-k}2^k\|\Delta_k v\|_\infty.$$

因此, 利用离散的 Young 不等式, 就得

$$\sup_{q\geqslant -1}2^{-q}\|II_q\|_p \lesssim \|\nabla v\|_{B^1_{\infty,\infty}}\|f\|_{B^{-1}_{p,\infty}}.\tag{3.78}$$

III_q 的估计. 按定义,

$$III_q = \Delta_q T_{\partial_j f}v^j = \sum_{|q-k|\leqslant 4}\Delta_q(S_{q-1}\partial_j f\Delta_k v^j).$$

利用 Bernstein 估计与离散的 Young 不等式, 就得

$$\begin{aligned}\sup_q 2^{-q}\|III_q\|_p &\lesssim \sup_q 2^{-q}\|S_{q-1}f\|_p\cdot 2^q\|\Delta_q v\|_\infty\\ &\lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,\infty}}\sup_q\sum_{-1\leqslant m\leqslant q-2}2^{m-q}2^{-m}\|\Delta_m f\|_p\\ &\lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,\infty}}\|f\|_{B^{-1}_{p,\infty}}.\end{aligned}\tag{3.79}$$

***IV_q* 的估计.** 按定义,

$$IV_q = \sum_{k>q-3} \Delta_q \partial_j (\Delta_k f \widetilde{\Delta}_k v^j).$$

利用 Bernstein 估计就得

$$\sup_{q\geqslant -1} 2^{-q} \|IV_q\|_p \lesssim \sum_{k\geqslant q-3} 2^{-k} \|\Delta_k f\|_p 2^k \|\widetilde{\Delta}_k v^j\|_\infty \lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|f\|_{B^{-1}_{p,\infty}}. \tag{3.80}$$

综合利用 (3.77)~(3.80) 就得

$$\sup_{q\geqslant -1} 2^{-q} \|[\Delta_q, v\cdot\nabla] f\|_p \lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|f\|_{B^{-1}_{p,\infty}}. \tag{3.81}$$

由 (3.74), 就得

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_t(B^{-1}_{p,\infty})} \leqslant \|f_0\|_{B^{-1}_{p,\infty}} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{B^{-1}_{p,\infty}} d\tau + C\int_0^t \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|f\|_{B^{-1}_{p,\infty}} d\tau. \tag{3.82}$$

利用 Gronwall 不等式, 立即得到 $s=-1$ 对应的端点估计 (3.72).

下面考虑 $s=1$ 对应的端点估计 (3.72). 容易看出, I_q 与 II_q 的估计与 $s=-1$ 的情形类似, 仅考虑 III_q 与 IV_q 的估计. 事实上,

$$\begin{aligned}\sum_q 2^q \|III_q\|_p &\lesssim \sum_q 2^q \|\nabla S_{q-1} f\|_p \|\Delta_q v\|_\infty \\ &\lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|\nabla f\|_p \lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|f\|_{B^1_{p,1}},\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\sum_q 2^q \|IV_q\|_p \lesssim \sum_{k\geqslant q-3} 2^{q-k} 2^q \|\Delta_k f\|_p 2^k \|\widetilde{\Delta}_k v^j\|_\infty \lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|f\|_{B^1_{p,1}}. \tag{3.84}$$

从而证明了 $s=1$ 对应的端点估计 (3.72). 当 $f=\mathrm{curl}v$ 时, 由于交换子估计引理 2.5 对 $s\geqslant 1$ 均成立, 因此定理得证. □

注记 3.4 当 $\nu=0$ 时, 上面的定理就对应着解 Euler 方程的解在 Besov 空间中正则性的保持. 另一方面, 在形如定理 1.3 的格调下, 可将上面的定理写成更一般的形式.

下面的命题着重考虑了输运扩散方程解的时空估计 —— 光滑效应, 本质上是定理 3.2 的特例, 不同之处在于非齐次部分采用了时空 Besov 空间, 而非混合型的时空 Besov 空间. 当 $\rho=\infty$ 时, 就对应着输运扩散方程解在 Besov 空间中正则性的保持. 在不计常数与积分中的衰减因子的前提下, 恰好是命题 3.5 的特款.

命题 3.6 (输运扩散方程解的光滑效应) 设 $s\in(-1,1)$, $(p,r,\rho)\in[1,\infty]^3$, $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\mathrm{div}v=0$, 则存在常数 $C=C(d,s)$ 使得下面事实成立. 设 u 是

$$\begin{cases}\partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u = f,\\ u|_{t=0} = u_0(x)\end{cases}$$

的光滑解, 则它满足如下的先验估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_t^\rho(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leqslant Ce^{CV(t)}(1+\nu t)^{\frac{1}{\rho}}\Big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+\|f\|_{L_t^1B_{p,r}^s}\Big), \tag{3.85}$$

这里 $V(t)=\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau$.

证明 仅证 $\rho=\infty$ 或 $\rho=1$, 其他情形是它们的插值结果. 证明仍然采用 Fourier 局部化技术.

情形 1. $\rho=\infty$. 对输运扩散方程的两边施行局部化, 即用 $\Delta_j(j=-1,0,1,\cdots)$ 作用于方程的两边, 可见

$$\partial_t u_q+v\cdot\nabla u_q-\nu\Delta u_q=-[\Delta_q,v\cdot\nabla]u+f_q.$$

两边取 L^p 范数

$$\|u_q\|_{L_t^\infty L^p}\leqslant\|u_q(0)\|_p+\int_0^t\|[\Delta_q,v\cdot\nabla]u(\tau)\|_p d\tau+\int_0^t\|f_q(\tau)\|_p d\tau.$$

两边同乘以 2^{qs}, 再取 ℓ^r 和, 并且利用交换子估计

$$\|[\Delta_q,v\cdot\nabla]u(\tau)\|_p\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B_{p,r}^s},$$

就可推出

$$\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{p,r}^s}\lesssim\|u(0)\|_{B_{p,r}^s}+\|f\|_{L_t^1B_{p,r}^s}+\int_0^t\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{B_{p,r}^s}d\tau. \tag{3.86}$$

利用 Gronwall 不等式就可获得所需的 $\rho=\infty$ 情形的证明.

情形 2. $\rho=1$. 第一步. 两边施行 Fourier 局部化, 并且正则化向量场 v, 就得

$$\partial_t u_q+S_{q-1}v\cdot\nabla u_q-\nu\Delta u_q=(S_{q-1}v-v)\cdot\nabla u_q-[\Delta_q,v\cdot\nabla]u+f_q. \tag{3.87}$$

记 $g_q=(S_{q-1}v-v)\cdot\nabla u_q-[\Delta_q,v\cdot\nabla]u$, ψ_q 是由正则化速度场 $S_{q-1}v$ 所决定的流函数

$$\psi_q(t,x)=x+\int_0^t S_{q-1}v(t,\psi_q(\tau,x))d\tau. \tag{3.88}$$

令

$$\begin{cases}\bar u_q(t,x)=u_q(t,\psi_q(t,x)),\\ \bar g_q(t,x)=g_q(t,\psi_q(t,x)),\\ \bar f_q(t,x)=f_q(t,\psi_q(t,x)),\end{cases}$$

简单计算可以看出

$$\Delta\bar u_q(t,x)=\sum_{i=1}^d\langle H_q\cdot(\partial^i\psi_q)(t,x),(\partial^i\psi_q)(t,x)\rangle+(\nabla u_q)(t,\psi_q(t,x))\cdot\Delta\psi_q(t,x),$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的欧几里得内积,

$$H_q(t,x)=(\nabla^2 u_q)(t,\psi_q(t,x)),\qquad \partial^i\psi_q(t,x)=e_i+h_q^i(t,x).$$

因此

$$\begin{cases}\|h_q^i(t,x)\|_\infty\lesssim V(t)e^{CV(t)}, & V(t)=\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau,\\ \|\Delta\psi_q(t,x)\|_\infty\lesssim 2^qV(t)e^{CV(t)}, & \|\nabla\psi_q(t,x)\|_\infty\leqslant e^{CV(t)}.\end{cases}\tag{3.89}$$

于是, 平坦空间的 Laplace 与非平坦空间上的 Laplace 相差估计如下:

$$\begin{aligned}\|R_q\|_p&:=\|(\Delta u_q)(t,\psi_q(t,x))-\Delta\bar u_q\|_p\\&\leqslant\|\nabla u_q\|_p\|\Delta\psi_q\|_\infty+\|\nabla^2u_q\|_p\sup_i\{\|h_q^i(t)\|_\infty+\|h_q^i(t)\|_\infty^2\}\\&\leqslant 2^{2q}V(t)e^{CV(t)}\|u_q\|_p.\end{aligned}\tag{3.90}$$

第二步. 二次 Fourier 局部化过程. 由 (3.87) 及 (3.88) 所决定的变换可见, $\bar u_q(t,x)$ 满足

$$(\partial_t-\nu\Delta)\bar u_q(t,x)=\nu R_q(t,x)+\bar g_q(t,x)+\bar f_q(t,x).\tag{3.91}$$

利用 Fourier 频率算子 Δ_j 局部化上面方程, 可见

$$\begin{aligned}\Delta_j\bar u_q(t,x)=&\,e^{\nu t\Delta}\Delta_ju_{0,q}+\nu\int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\Delta_jR_q(\tau,x)\mathrm{d}\tau\\&+\int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\Delta_j\bar g_q(\tau,x)\mathrm{d}\tau+\int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\Delta_j\bar f_q(\tau,x)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{3.92}$$

由于 $\forall j\in\mathbb{N}$, $\|e^{\nu t\Delta}\Delta_ju\|_p\leqslant Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_ju\|_p$, 利用变换的保测性, 容易看出

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar u_q(t)\|_{L^p}\lesssim&\, e^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_ju_{0,q}\|_{L^p}+V(t)e^{CV(t)}\nu2^{2q}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|u_q\|_pd\tau\\&+\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\left[\|f_q(\tau,x)\|_{L^p}+\|g_q(\tau,x)\|_{L^p}\right]d\tau.\end{aligned}\tag{3.93}$$

两边关于时间积分

$$\begin{aligned}\|\Delta_j\bar u_q\|_{L_t^1L^p}\leqslant&\,C(\nu2^{2j})^{-1}(\|\Delta_ju_{0,q}\|_{L^p}+\|f_q\|_{L_t^1L^p}+\|g_q\|_{L_t^1L^p})\\&+CV(t)e^{CV(t)}2^{2(q-j)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned}\tag{3.94}$$

第三步. Besov 空间框架下的先验估计. 取 N 是待定的正整数, 我们将分频 $q>N$ 及 $q\leqslant N$ 来进行估计, 注意到函数 $\psi_q(t,x)$ 保持 Lebesgue 测度, 故

$$\begin{aligned}\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p} &= \nu 2^{q(s+2)}\|\bar{u}_q\|_{L_t^1L^p}\\ &\leqslant \nu 2^{q(s+2)}\Big(\sum_{|j-q|<N}\|\Delta_j\bar{u}_q\|_{L_t^1L^p}+\sum_{|j-q|\geqslant N}\|\Delta_j\bar{u}_q\|_{L_t^1L^p}\Big).\end{aligned}$$

因此, 对所有 $q>N$, 有

$$\begin{aligned}&\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}\\ \leqslant& C2^{qs}\|u_{0,q}\|_{L^p}+C2^{2N}2^{qs}\|f_q\|_{L_t^1L^p}+C2^{2N}2^{qs}\|g_q\|_{L_t^1L^p}\\ &+Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N}\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}+\nu 2^{q(s+2)}\sum_{|j-q|\geqslant N}\|\Delta_j\bar{u}_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned}$$

注意到几乎衰减正交性 (局部化引理)

$$\|\Delta_j\bar{u}_q\|_{L^p}\leqslant C2^{-|j-q|}e^{CV(t)}\|u_q\|_{L^p},$$

容易看出

$$\begin{aligned}\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}\leqslant& C2^{qs}\|u_{0,q}\|_{L^p}+C2^{2N}2^{qs}\|f_q\|_{L_t^1L^p}+C2^{2N}2^{qs}\|g_q\|_{L_t^1L^p}\\ &+Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N}\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}\\ &+2^{-N}e^{CV(t)}\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned}\tag{3.95}$$

对于 $q\leqslant N$, 直接由 Hölder 不等式可见

$$\nu 2^{q(s+2)}\|u_q\|_{L_t^1L^p}\leqslant(\nu t)2^{2N}2^{qs}\|u_q\|_{L_t^\infty L^p}.\tag{3.96}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\|2^{qs}\|g_q\|_{L_t^1L^p}\|_{\ell^r}\\ \leqslant&\|2^{qs}\|[\Delta_q,v\cdot\nabla]u\|_{L_t^1L^p}\|_{\ell^r}+\|2^{qs}\|(Id-S_q)v\cdot\nabla u_q\|_{L_t^1L^p}\|_{\ell^r}\\ \leqslant&\Big\|2^{qs}\int_0^t\|\nabla v\|_\infty\|u_q\|_{L^p}d\tau\Big\|_{\ell^r}+\Big\|2^{qs}\int_0^t\sum_{j\geqslant q-1}\|\Delta_jv\|_\infty\|\nabla u_q\|_{L^p}d\tau\Big\|_{\ell^r}\\ \leqslant&\int_0^t\|\nabla v\|_\infty\Big\|2^{qs}\|u_q\|_{L_\tau^\infty L^p}\Big\|_{\ell^r}d\tau+\Big\|2^{qs}\int_0^t\sum_{j\geqslant q-1}2^{q-j}\|\Delta_j\nabla v\|_\infty\|u_q\|_{L^p}d\tau\Big\|_{\ell^r}\\ \lesssim&\int_0^t\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\mathcal{L}_\tau^\infty(B_{p,r}^s)}d\tau+\int_0^t\|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(B_{p,r}^s)}d\tau.\end{aligned}\tag{3.97}$$

将 (3.96) 代入 (3.95), 然后两边关于 q 取 ℓ^r 和, 注意利用 (3.97), 可见

$$\begin{aligned}\nu\|u\|_{\mathcal{L}_t^1B_{p,r}^{s+2}}\leqslant& C\|u_0\|_{B_{p,r}^s}+2^{2N}\|f\|_{L_t^1B_{p,r}^s}+2^{2N}(V(t)+\nu t)\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{p,r}^s}\\ &+\big(Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N}+Ce^{CV(t)}2^{-N}\big)\nu\|u\|_{\mathcal{L}_t^1B_{p,r}^{s+2}}.\end{aligned}\tag{3.98}$$

选取 N 与 t, 使得

$$Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N}+Ce^{CV(t)}2^{-N}<\frac{1}{2},$$

这仅需对充分小的 t 满足

$$V(t) \leqslant C_1 = C_1(d),$$

就行了, 这里 $C_1(d)$ 是仅依赖于 d 的小常数. 在此假设下, 有

$$\nu\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{p,r}^{s+2}} \leqslant C\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + C\|f\|_{L_t^1 B_{p,r}^s} + C(1+\nu t)\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{p,r}^s}. \tag{3.99}$$

利用 $\mathcal{L}_t^\infty B_{p,r}^s$ 估计可见, 上式就意味着估计

$$\nu\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{p,r}^{s+2}} \leqslant C(1+\nu t)\big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \|f\|_{L_t^1 B_{p,r}^s}\big).$$

利用标准的延拓方法, 可将上面局部 $\mathcal{L}_t^1 B_{p,r}^{s+2}$ 推广到 $[0,T]$ 上的时空先验估计

$$\nu\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{p,r}^{s+2}} \leqslant Ce^{CV(t)}(1+\nu t)\big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \|f\|_{L_t^1 B_{p,r}^s}\big). \qquad \square$$

采用齐次 Besov 空间中线性输运扩散方程的时空估计结合 $\rho = \infty$ 时非齐次 Besov 空间中的时空估计, 可以直接推出一个很方便且实用的估计.

推论 3.7 设 $\nu \geqslant 0$, $s \in (-1,1)$, $(p,r) \in [1,\infty]^2$, $v \in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\mathrm{div} v = 0$. 设 u 是下面输运扩散方程

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u = f$$

的光滑解, 则存在常数 $C = C(s,d)$ 满足: 对 $\forall t \in \mathbb{R}^+$, 有

$$\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(B_{p,r}^s)} + \nu^{\frac{1}{\rho}}\|u - \Delta_{-1}u\|_{\mathcal{L}_t^\rho(B_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leqslant Ce^{CV(t)}\Big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{B_{p,r}^s} d\tau\Big), \tag{3.100}$$

这里 $V(t) = \displaystyle\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau$.

注记 3.5 意义: 右端不包含 t 的线性部分的因子. 另一方面, 还可以获得更优的估计, 即 (3.52) 的特例:

$$\begin{aligned}&\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty(B_{p,r}^s)} + \kappa\nu\frac{p-1}{p^2}\Big\|u - \Delta_{-1}u\Big\|_{\mathcal{L}_t^1(B_{p,r}^{s+2})}\\ \leqslant& Ce^{CV(t)}\Big(\|u_0\|_{B_{p,r}^s} + \int_0^t e^{-CV(\tau)}\|f(\tau)\|_{B_{p,r}^s} d\tau\Big), \quad V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau.\end{aligned}$$

事实上, 利用 Fourier 局部化, 可见

$$\partial_t u_q + S_{q+1}v\cdot\nabla u_q - \nu\Delta u_q = (S_{q+1}v - v)\cdot\nabla u_q - [\Delta_q, v\cdot\nabla]u + f_q. \tag{3.101}$$

记 $R_q = (S_{q+1}v - v)\cdot\nabla u_q - [\Delta_q, v\cdot\nabla]u$, 由于 $S_{q+1}v$ 是光滑向量场, 故当 $\nu = 0$ 时, 输运方程 (3.101) 满足估计

$$\|u_q\|_p \leqslant \|u_q(0)\|_p + \int_0^t \big[\|R_q\|_p + \|f_q(\tau)\|_p\big] d\tau + \frac{1}{p}\int_0^t \|\mathrm{div} S_{q+1}v(\tau)\|_\infty \|u_q\|_p d\tau.$$

下面考虑 $\nu > 0, q \geqslant 0$ 的情形.

情形 1. $1 < p < \infty$. 用 $|\Delta_q u|^{p-1}\mathrm{sign}(\Delta_q u)$ 乘以方程 (3.101) 的两边, 注意到正性不等式

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\Delta_q f|\Delta_q f|^{p-2}\Delta_q f dx \geqslant \kappa\frac{p-1}{p^2}2^{2q}\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_q f|^p dx$$

及标准的能量积分, 就得

$$\begin{aligned}\|u_q\|_p + \kappa\frac{p-1}{p^2}2^{2q}\int_{\mathbb{R}^d}|u_q|^p dx \leqslant &\|u_q(0)\|_p + \int_0^t \left[\|R_q\|_p + \|f_q(\tau)\|_p\right]d\tau \\ &+ \frac{1}{p}\int_0^t \|\mathrm{div} S_{q+1}v(\tau)\|_\infty \|u_q\|_p d\tau.\end{aligned}$$

情形 2. $p = 1$. 令

$$T_\varepsilon(x) = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon^2 + |x|^2}}.$$

注意到

$$-\int_{\mathbb{R}^d}\Delta\Delta_q u T_\varepsilon(\Delta_q u)dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\varepsilon^2|\nabla\Delta_q u|^2}{\varepsilon^2 + |\Delta_q u|^2}dx \geqslant 0,$$

因此, 用 $T_\varepsilon(\Delta_q u)$ 乘以方程 (3.101) 的两边, 积分并取 $\varepsilon \longrightarrow 0$, 就得与情形 1 一样的估计.

情形 3. $p = \infty$. 直接用极大值原理, 就推出估计

$$\|u_q\|_\infty \leqslant \|u_q(0)\|_\infty + \int_0^t \left[\|R_q\|_\infty + \|f_q(\tau)\|_\infty\right]d\tau.$$

另一方面, 注意到正性不等式

$$-\int_{\mathbb{R}^d}\Delta\Delta_{-1} f|\Delta_q f|^{p-2}\Delta_{-1} f dx \geqslant \kappa\frac{p-1}{p^2}2^{2q}\int_{\mathbb{R}^d}|\Delta_{-1} f|^p dx \geqslant 0$$

及标准的能量积分, 就得

$$\begin{aligned}\|u_{-1}\|_p \leqslant &\|u_{-1}(0)\|_p + \int_0^t \left[\|R_{-1}\|_p + \|f_{-1}(\tau)\|_p\right]d\tau \\ &+ \frac{1}{p}\int_0^t \|\mathrm{div} S_0 v(\tau)\|_\infty \|u_{-1}\|_p d\tau.\end{aligned}$$

按照非齐次 Besov 空间的定义, 结合上式及情形 1∼ 情形 3 所得的估计、引理 2.5 中的交换子估计就推出所要的估计.

读者不难看出, 前面建立的正则性时空估计均包括形如 $e^{CV(t)}$ 的指数增长, 是否可以将这种指数增长降低成线性增长? 在零阶的 Besov 空间的框架下, 输运扩散方程解的正则性时空估计、输运方程的正则性保持估计中可以实现线性增长的控制, 它恰好是输运扩散方程解正则性估计中增长的 log-型控制! 这一事实与保测映

射 ψ 在不同类型的函数空间的保持性估计密切相关. 例如, 保测映射 ψ 在 $B^s_{p,r}$ 框架下会出现 $\|\nabla\psi\|^{\alpha}_{\infty}$, 它在 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 框架下保持 L^p 范数不变! 然而, 在零阶的 Besov 空间 (局部化空间) 框架下会出现 $\|\nabla\psi\|_{\infty}$ 的 log-型增长. 利用这一优化的线性估计, 可以建立二维 Euler 方程在临界空间中的整体适定性.

命题 3.8 (log-型零阶 Besov 正则性保持) 设 $p,r\in[1,+\infty]$, $v\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+;\text{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\text{div}v=0$, 设 u 是如下输运扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t u+v\cdot\nabla u-\nu\Delta u=f,\\ u|_{t=0}=u_0(x)\end{cases}\tag{3.102}$$

的解. 如果 $u_0\in B^0_{p,r}$, 则对 $\forall t\in\mathbb{R}^+$, 有

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{p,r}}\leqslant C\big(\|u_0\|_{B^0_{p,r}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_t B^0_{p,r}}\big)\Big(1+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau\Big),\tag{3.103}$$

这里 $C=C(d)$ 仅依赖于空间维数而不依赖于黏性系数.

证明 记 $\tilde{u}_q$ 是如下初值问题的整体光滑解:

$$\begin{cases}\partial_t\tilde{u}_q+v\cdot\nabla\tilde{u}_q-\nu\Delta\tilde{u}_q=f_q:=\Delta_q f,\\ \tilde{u}_q(0)=\Delta_q u_0.\end{cases}\tag{3.104}$$

注意到

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_t(B^s_{p,r})}+\nu\|u-\Delta_{-1}u\|_{\mathcal{L}^\rho_t(B^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}\leqslant Ce^{CV(t)}\Big(\|u_0\|_{B^s_{p,r}}+\int_0^t\|f(\tau)\|_{B^s_{p,r}}d\tau\Big),\tag{3.105}$$

可以取 $r=\infty$, $s=\pm\dfrac{1}{2}$ 可见

$$\|\tilde{u}_q(t)\|_{B^{\pm\frac12}_{p,\infty}}\leqslant C\big(\|\Delta_q u_0\|_{B^{\pm\frac12}_{p,\infty}}+\int_0^t\|f_q(\tau)\|_{B^{\pm\frac12}_{p,\infty}}d\tau\big)e^{CV(t)}.\tag{3.106}$$

另一方面, 利用 Besov 空间的定义, 可以推出: 对任意 $j,q\geqslant -1$, 成立

$$\|\Delta_j\tilde{u}_q(t)\|_{L^p}\leqslant C2^{-\frac{|j-q|}{2}}\big(\|\Delta_q u_0\|_{L^p}+\|f_q\|_{L^1_tL^p}\big)e^{CV(t)}.\tag{3.107}$$

事实上, 由 (3.106) 可以看出

$$\sup_j 2^{\pm\frac12 j}\|\Delta_j\tilde{u}_q(t)\|_p\leqslant C\sup_k 2^{\pm\frac12 k}\big(\|\Delta_k\Delta_q u_0\|_p+\|\Delta_k\Delta_q f\|_{L^1_tL^p}\big)e^{CV(t)}.$$

因此

$$\sup_j 2^{\pm\frac12 j}\|\Delta_j\tilde{u}_q(t)\|_p\leqslant C2^{\pm\frac12 q}\big(\|\Delta_q u_0\|_p+\|\Delta_q f\|_{L^1_tL^p}\big)e^{CV(t)}.$$

从而

$$\|\Delta_j\tilde{u}_q(t)\|_p\leqslant C2^{\mp\frac12 j}2^{\pm\frac12 q}\big(\|\Delta_q u_0\|_p+\|\Delta_q f\|_{L^1_tL^p}\big)e^{CV(t)}.$$

故 (3.107) 成立.

由线性叠加原理

$$u = \sum_{q \geqslant -1} \tilde{u}_q(t,x).$$

现取 $N \in \mathbb{N}$ 待定, 则按定义

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{\mathcal{L}_t^\infty B^0_{p,r}} \leqslant & \Big(\sum_j \Big(\sum_q \|\Delta_j \tilde{u}_q(t)\|_{L_t^\infty L^p}\Big)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
\leqslant & \Big(\sum_j \Big(\sum_{|q-j|\geqslant N} \|\Delta_j \tilde{u}_q(t)\|_{L_t^\infty L^p}\Big)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
& + \Big(\sum_j \Big(\sum_{|q-j|<N} \|\Delta_j \tilde{u}_q(t)\|_{L_t^\infty L^p}\Big)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
= & I + II.
\end{aligned} \tag{3.108}$$

先来估计 I, 注意到 (3.107), 可见

$$\begin{aligned}
I & \lesssim 2^{-N/2} e^{CV(t)} \big\| \|\Delta_q u_0\|_{L^p} + \|f_q\|_{L_t^1 L^p} \big\|_{\ell^r} \\
& \lesssim 2^{-N/2} e^{CV(t)} \big(\|u_0\|_{B^0_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}_t^1 B^0_{p,r}}\big).
\end{aligned}$$

再来估计 II. 利用 Δ_j 在 L^p 上一致有界及 L^p 能量估计, 可见

$$\begin{aligned}
II & \lesssim \Big(\sum_j \Big(\sum_{|q-j|<N} \|\tilde{u}_q(t)\|_{L_t^\infty L^p}\Big)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
& \lesssim \Big(\sum_j \Big(\sum_{|q-j|<N} \|\Delta_q u_0\|_{L^p} + \|f_q\|_{L_t^1 L^p}\|\Big)^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
& \lesssim N\big(\|u_0\|_{B^0_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}_t^1 B^0_{p,r}}\big).
\end{aligned}$$

因此

$$\|u(t)\|_{\mathcal{L}^\infty B^0_{p,r}} \lesssim \big(\|u_0\|_{B^0_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}_t^1 B^0_{p,r}}\big)\big(2^{-N/2} e^{CV(t)} + N\big). \tag{3.109}$$

令

$$N = \Big[\frac{2CV(t)}{\ln 2} + 1\Big],$$

即可推出估计 (3.103). □

注记 3.6 (分数阶输运扩散方程 log-型零阶 Besov 正则性保持) 完全类似于命题 3.8 的证明, 可以证明: 设 $p, r \in [1, +\infty]$, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\mathrm{div} v = 0$, 设 u 是如下分数阶输运扩散方程:

$$\begin{cases}
\partial_t u + v \cdot \nabla u + \nu \Lambda^\alpha u = f, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2, \\
u|_{t=0} = u_0(x) \in B^0_{p,r}
\end{cases}$$

的解. 则对 $\forall t\in\mathbb{R}^+$, 有

$$\|u\|_{\mathcal{L}_t^\infty B^0_{p,r}}\leqslant C(\|u_0\|_{B^0_{p,r}}+\|f\|_{\mathcal{L}_t^1 B^0_{p,r}})\Big(1+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big),$$

这里 $C=C(d)$ 仅依赖于空间维数而不依赖于黏性系数.

4. 频段层次的正则性估计

考虑齐次输运扩散方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega+v\cdot\nabla a-\nu\Delta a=0, \quad \mathrm{div}v=0, \quad \nu>0,\\ a(0)=a_0.\end{cases}$$

命题 3.9 (频段层次的正则性估计 I) 设 $a_0\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $v\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip})$, 则

$$\nu 2^{2q}\int_0^t\|\Delta_q a(\tau)\|_{L^p}d\tau\leqslant C\|a_0\|_{L^p}\Big(1+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big), \quad \forall q\in\mathbb{N}. \tag{3.110}$$

显然, 利用 $\int_0^t\|\Delta_{-1}a\|_p dt\leqslant t\|a_0\|_p$ 与 Sobolev 空间的嵌入等就得

$$\nu 2^{2q}\int_0^t\|\Delta_q a(\tau)\|_{L^p}\mathrm{d}\tau\leqslant C\|a_0\|_{L^p}\Big(1+t+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big), \quad q\geqslant -1, \tag{3.111}$$

$$\nu\|a(\tau)\|_{L_t^1 B^s_{p,1}}\leqslant C\|a_0\|_{L^p}\Big(1+t+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big), \quad s<2. \tag{3.112}$$

证明 令 $a_q:=\Delta_q a$, 对于输运扩散方程进行 Fourier 局部化, 就得

$$\partial_t a_q+S_{q-1}v\cdot\nabla a_q-\nu\Delta a_q=(S_{q-1}v-v)\cdot\nabla a_q-[\Delta_q,v\cdot\nabla]a=:f_q. \tag{3.113}$$

令

$$\begin{cases}\bar a_q(t,x)=a_q\circ\psi_q(t,x)=a_q(t,\psi_q(t,x)),\\ \bar f_q(t,x)=f_q\circ\psi_q(t,x)=f_q(t,\psi_q(t,x)),\end{cases} \tag{3.114}$$

这里 $\psi_q(t,x)$ 是由正则化速度场 $S_{q-1}v$ 所定义的流函数, 即

$$\psi_q(t,x)=x+\int_0^t S_{q-1}v(t,\psi_q(\tau,x))d\tau. \tag{3.115}$$

简单计算可以看出

$$\Delta\bar a_q(t,x)=\sum_{i=1}^d\langle H_q\cdot(\partial^i\psi_q)(t,x),(\partial^i\psi_q)(t,x)\rangle+(\nabla a_q)(t,\psi_q(t,x))\cdot\Delta\psi_q(t,x), \tag{3.116}$$

这里

$$H_q(t,x)=(\nabla^2 a_q)(t,\psi_q(t,x)), \quad \text{Hessian 矩阵}.$$

利用流函数表达式 (3.115), 直接计算

$$\partial^i \psi_q(t,x) = e_i + h_q^i(t,x).$$

并且利用 Gronwall 不等式可见

$$\|\partial^i \psi_q(t,x)\|_\infty \leqslant e^{\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau} := e^{V(t)}, \quad \|h_q^i(t,x)\|_\infty \leqslant V(t)e^{CV(t)}. \tag{3.117}$$

则平坦空间的 Laplace 与非平坦空间上的 Laplace 的差

$$R_q := (\Delta a_q)(t, \psi_q(t,x)) - \Delta \bar{a}_q \tag{3.118}$$

满足如下估计:

$$\begin{aligned}\|R_q\|_p &\leqslant \|\nabla a_q\|_p \|\Delta \psi_q\|_\infty + \|\nabla^2 a_q\|_p \sup_i \{\|h_q^i(t)\|_\infty + \|h_q^i(t)\|_\infty^2\} \\ &\leqslant 2^{2q} V(t) e^{CV(t)} \|a_q\|_p.\end{aligned} \tag{3.119}$$

由 (3.113), (3.114), 可见 $\bar{a}_q(t,x)$ 满足

$$(\partial_t - \nu\Delta)\bar{a}_q(t,x) = \nu R_q(t,x) + \bar{f}_q. \tag{3.120}$$

利用 Fourier 频率算子 $\dot{\Delta}_j$ 局部化上面方程, 可见

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_j \bar{a}_q(t,x) = {} & e^{\nu t\Delta}\dot{\Delta}_j a_{0,q} + \nu \int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\dot{\Delta}_j R_q(\tau,x)\mathrm{d}\tau \\ & + \int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\dot{\Delta}_j \bar{f}_q(\tau,x) d\tau.\end{aligned} \tag{3.121}$$

注意到

$$\|e^{\nu t\Delta}\dot{\Delta}_j u\|_p \leqslant Ce^{-c\nu t 2^{2j}} \|\dot{\Delta}_j u\|_p,$$

由 (3.113)、流函数的保测性及广义交换子估计 (引理 2.4)

$$\|\bar{f}_q(\tau,x)\|_p \leqslant \|\nabla v\|_{L^\infty} \|a_q\|_p,$$

就得

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j \bar{a}_q(t)\|_p \lesssim {} & e^{-c\nu t 2^{2j}} \|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + \nu \int_0^t 2^{2q} V(\tau) e^{CV(\tau)} e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|a_q\|_p d\tau \\ & + \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\bar{f}_q(\tau,x)\|_p d\tau \\ \leqslant {} & Ce^{-c\nu t 2^{2j}} \|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + CV(t)e^{CV(t)} \nu 2^{2q} \int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|a_q\|_p d\tau \\ & + C\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}} \|\nabla v\|_\infty \|a_q\|_p d\tau.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} &\leqslant C(\nu 2^{2j})^{-1}\|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + CV(t)e^{CV(t)}2^{2(q-j)}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\\ &\quad + C(\nu 2^{2j})^{-1}V(t)\|a\|_{L_t^\infty L^p}\\ &\leqslant C(\nu 2^{2j})^{-1}\|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + CV(t)e^{CV(t)}2^{2(q-j)}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\\ &\quad + C(\nu 2^{2j})^{-1}V(t)\|a_0\|_p. \end{aligned}\tag{3.122}$$

两边同乘以 $\nu 2^{2q}$, 得到

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} &\leqslant C2^{2(q-j)}\|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + CV(t)e^{CV(t)}2^{2(q-j)}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\\ &\quad + CV(t)2^{2(q-j)}\|a_0\|_p. \end{aligned}\tag{3.123}$$

选取待定正整数 N, 由于流函数保持 Lebesgue 测度, 从而

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p} &= \nu 2^{2q}\|\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p}\\ &\leqslant \sum_{|j-q|\leqslant N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} + \sum_{|j-q|>N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p}. \end{aligned}\tag{3.124}$$

由于当 $|j-q|>1$ 时, $\dot{\Delta}_j a_{0,q}=0$, 所以利用 (3.123) 可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{|j-q|\leqslant N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} &\leqslant C\|a_0\|_{L^p} + CV(t)2^{2N}\|a_0\|_{L^p}\\ &\quad + Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}. \end{aligned}\tag{3.125}$$

另一方面, 由局部化引理 2.2,

$$\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L^p} \leqslant C2^{-|j-q|}e^{CV(t)}\|a_q\|_{L^p},\tag{3.126}$$

有

$$\sum_{|j-q|>N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} \leqslant Ce^{CV(t)}2^{-N}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\tag{3.127}$$

将 (3.125) 和 (3.127) 代入 (3.124) 得到

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p} &\leqslant C\|a_0\|_{L^p} + CV(t)2^{2N}\|a_0\|_{L^p}\\ &\quad + \left(Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N} + Ce^{CV(t)}2^{-N}\right)\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}. \end{aligned}\tag{3.128}$$

选取 N 与 t, 使得

$$Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N} + Ce^{CV(t)}2^{-N} \leqslant \frac{1}{2},\quad V(t)\leqslant C_1,\tag{3.129}$$

此处 C_1 是一个绝对常数. 在此限制之下, 可以推出

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p} \leqslant C\|a_0\|_{L^p}.\tag{3.130}$$

下面将上面估计推广到 $[0,T]$, 剖分 $[0,T]$, 使得此剖分满足

$$T_0=0<T_1<T_2<\cdots<T_m=T, \quad \int_{T_i}^{T_{i+1}}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt\simeq C_1. \tag{3.131}$$

重复前面的证明, 可以推出

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L^1(T_i,T_{i+1};L^p)}\leqslant C\|a(T_i)\|_{L^p}\leqslant C\|a_0\|_{L^p}. \tag{3.132}$$

对上式两边求和, 可见

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L^1_TL^p}\leqslant Cm\|a_0\|_{L^p}. \tag{3.133}$$

注意到 $C_1m\simeq V(T)$, 可以推出频段层次上的正则性估计. □

注记 3.7 上面的命题表明: 设 $v(t,x)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;{\rm Lip})$, a 是如下输运扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t a+v\cdot\nabla a-\nu\Delta a=0, \quad {\rm div} v=0,\\ a|_{t=0}=a_0(x)\end{cases} \tag{3.134}$$

的解, 通过 Fourier 局部化结合经典的交换子估计

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\|_p\leqslant\|\nabla v\|_\infty\|a\|_p, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

直接推出

$$\sup_{q\geqslant -1}2^{2q}\nu\int_0^t\|\Delta_q a\|_p d\tau\lesssim\|a_0\|_p\Big(1+t+\int_0^t\|\nabla v\|_\infty d\tau\Big), \quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

通过建立频段层次上的交换子估计 (对一般的可积指标 $1\leqslant p\leqslant\infty$),

$$\|[\Delta_q,v\cdot\nabla]a\|_p\lesssim\|a\|_p\big(\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty+(q+2)\|\omega\|_\infty\big), \ q\geqslant -1, \tag{3.135}$$

这里 $\omega={\rm curl}\ v$. 利用完全相同的方法, 可以证明 (3.134) 的解满足如下频段层次的正则化估计.

命题 3.10 (频段层次的正则性估计 II) 设 $a_0\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $v\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;{\rm Lip})$, $\omega={\rm curl}\ v$. 对任意的 $q\in\{-1\}\cup\mathbb{N}$, 式 (3.134) 的光滑解 $a(t,x)$ 满足如下正则性估计:

$$2^{2q}\nu\int_0^t\|\Delta_q a\|_p d\tau\lesssim\|a_0\|_p\Big(1+t+(q+2)\|\omega\|_{L^1_tL^\infty}+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L^1_tL^\infty}\Big). \tag{3.136}$$

证明 方法完全类似于命题 3.9 的证明, 对于方程 (3.134) 实施局部化, 整理可得

$$\dot\Delta_j\bar\omega_q(t,x)=e^{\nu t\Delta}\dot\Delta_j a_{0,q}+\nu\int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\dot\Delta_j R_q(\tau,x)d\tau$$

$$+\int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}\dot{\Delta}_j \bar{f}_q(\tau,x)d\tau, \tag{3.137}$$

这里 $R_q := (\Delta a_q)(t,\psi_q(t,x)) - \Delta\bar{a}_q$. 注意到 (见 (3.119) 的证明)

$$\|R_q\|_p \leqslant 2^{2q}V(t)e^{CV(t)}\|\omega_q\|_p, \quad \|e^{\nu t\Delta}\dot{\Delta}_j\phi\|_p \leqslant Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\dot{\Delta}_j\phi\|_p,$$

就可推出

$$\|e^{\nu(t-\tau)\Delta}\dot{\Delta}_j R_q(\tau)\|_p \leqslant C2^{2q}V(\tau)e^{CV(\tau)}e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|a_q\|_p, \tag{3.138}$$

$$\|e^{\nu(t-\tau)\Delta}\bar{f}_q(\tau,x)\|_p \leqslant e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\Big(\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\|_p + \|(S_{q-1}v - v)\cdot\nabla a_q\|_p\Big). \tag{3.139}$$

由 (3.135) 与极值原理就得

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]a\|_p \lesssim \|a_0\|_p(\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty + (q+2)\|\omega\|_\infty), \quad q\geqslant -1. \tag{3.140}$$

另一方面, 由于 $q\in\mathbb{N}^* = \{1,2,\cdots\}$, 容易看出

$$\|(S_{q-1}v - v)\cdot\nabla a_q\|_p \lesssim \|a_0\|_p \sum_{j\geqslant q-1} 2^{q-j}\|\Delta_j\omega\|_p \lesssim \|a_0\|_p\|\omega\|_\infty. \tag{3.141}$$

将 (3.138)~(3.141) 代入到 (3.137) 的估计, 就得

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q(t)\|_{L^p} \lesssim{}& e^{-c\nu t2^{2j}}\|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_{L^p} + V(t)e^{CV(t)}\nu 2^{2q}\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|a_q(\tau)\|_p d\tau\\ &+ (q+2)\|a_0\|_p\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\omega(\tau)\|_\infty d\tau\\ &+ \|a_0\|_p\int_0^t e^{-c\nu(t-\tau)2^{2j}}\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty d\tau.\end{aligned} \tag{3.142}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} \lesssim{}& (\nu 2^{2j})^{-1}\Big(\|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + (q+2)\|a_0\|_p\|\omega\|_{L_t^1L^\infty}\\ &+ \|a_0\|_p\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\Big) + V(t)e^{CV(t)}2^{2(q-j)}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned} \tag{3.143}$$

两边同乘以 $\nu 2^{2q}$, 得到

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} \lesssim{}& 2^{2(q-j)}\Big(\|\dot{\Delta}_j a_{0,q}\|_p + (q+2)\|a_0\|_p\|\omega\|_{L_t^1L^\infty} + \|a_0\|_p\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\Big)\\ &+ V(t)e^{CV(t)}2^{2(q-j)}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned} \tag{3.144}$$

选取待定正整数 N, 由于流函数保持 Lebesgue 测度, 从而

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p} &= \nu 2^{2q}\|\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p}\\ &\leqslant \sum_{|j-q|\leqslant N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p} + \sum_{|j-q|>N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned} \tag{3.145}$$

由于当 $|j-q|>1$ 时,$\dot{\Delta}_j\omega_{0,q}=0$. 对于所有的 $q>N$, 利用 (3.144) 可以得到

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\lesssim&\|a_0\|_p+2^{2N}\|a_0\|_p\Big((q+2)\|\omega\|_{L_t^1L^\infty}+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\Big)\\&+e^{CV(t)}V(t)2^{2N}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}+\sum_{|j-q|>N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned}\tag{3.146}$$

另一方面, 由局部化引理 2.2,

$$\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L^p}\leqslant C2^{-|j-q|}e^{CV(t)}\|a_q\|_{L^p},\tag{3.147}$$

有

$$\sum_{|j-q|>N}\nu 2^{2q}\|\dot{\Delta}_j\bar{a}_q\|_{L_t^1L^p}\lesssim e^{CV(t)}2^{-N}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\tag{3.148}$$

将式 (3.148) 代入式 (3.146) 得到

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\lesssim&\|a_0\|_p+2^{2N}\|a_0\|_p\Big((q+2)\|\omega\|_{L_t^1L^\infty}+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\Big)\\&+e^{CV(t)}V(t)2^{2N}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}+e^{CV(t)}2^{-N}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned}\tag{3.149}$$

对于低频部分 $q\leqslant N$, 总有

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\leqslant\nu 2^{2N}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\tag{3.150}$$

故对于任意的 $q\in\{-1\}\cup\mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\lesssim&\|a_0\|_p+\nu 2^{2N}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\\&+2^{2N}\|a_0\|_p\Big((q+2)\|\omega\|_{L_t^1L^\infty}+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\Big)\\&+\Big(V(t)e^{CV(t)}2^{2N}+e^{CV(t)}2^{-N}\Big)\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}.\end{aligned}\tag{3.151}$$

选取 N 与 t, 使得

$$Ce^{CV(t)}V(t)2^{2N}+Ce^{CV(t)}2^{-N}\leqslant\frac{1}{2},\quad V(t)\leqslant C_1,\tag{3.152}$$

此处 C_1 是一个绝对常数. 在此限制之下, 可以推出

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L_t^1L^p}\lesssim\|a\|_{L_t^1L^p}+\|a_0\|_p\Big(1+(q+2)\|\omega\|_{L_t^1L^\infty}+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\Big).\tag{3.153}$$

下面将上面估计推广到 $[0,T]$, 剖分 $[0,T]$, 使得此剖分满足

$$T_0=0<T_1<T_2<\cdots<T_M=T,\quad\int_{T_i}^{T_{i+1}}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt\simeq C_1.\tag{3.154}$$

重复前面的证明, 并且注意到 $\|a(T_j)\|_p\leqslant\|a_0\|_p$, 可以推出

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L^1(T_i,T_{i+1};L^p)}\lesssim&\|a\|_{L^1(T_i,T_{i+1};L^p)}+\|a_0\|_p\Big(1+(q+2)\|\omega\|_{L^1(T_i,T_{i+1};L^\infty)}\\&+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L^1(T_i,T_{i+1};L^\infty)}\Big).\end{aligned}\tag{3.155}$$

对上式两边求和, 可见

$$\begin{aligned}\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L^1_T L^p} \lesssim & \|a\|_{L^1_T L^p} + (M+1)\|a_0\|_p \\ & + \|a_0\|_p\Big((q+2)\|\omega\|_{L^1_T L^\infty} + \|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L^1_T L^\infty}\Big).\end{aligned} \tag{3.156}$$

注意到

$$M \simeq V(T) = \int_0^T \|\nabla v\|_\infty dt, \quad \|\nabla v\|_\infty \leqslant \|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty + (q+2)\|\omega\|_\infty,$$

可以推出频段层次上的正则性估计

$$\nu 2^{2q}\|a_q\|_{L^1_T L^p} \lesssim \|a_0\|_p\Big((1+T) + (q+2)\|\omega\|_{L^1_T L^\infty} + \|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L^1_T L^\infty}\Big). \tag{3.157}$$

□

下面给出命题 3.10 中所需要的交换子估计 (3.135) 及其他频段层次上的交换子估计:

命题 3.11 *设 u 是光滑函数,$v \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;{\rm Lip}(\mathbb{R}^d))$, ${\rm div}v = 0$, $\omega = {\rm curl}v \in L^\infty$, 则对所有 $q \geqslant -1$, 有如下交换子估计:*

$$\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]u\|_p \leqslant C\|u\|_p(\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty + (q+2)\|\omega\|_\infty), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{3.158}$$

证明 由 Bony 的仿积分解

$$[\Delta_q, v\cdot\nabla]u = [\Delta_q, T_v\cdot\nabla]u + [\Delta_q, T_{\nabla\cdot}\cdot v]u + [\Delta_q, R(v,\nabla\cdot)]u \triangleq I_1 + I_2 + I_3, \tag{3.159}$$

这里

$$\begin{cases}[\Delta_q, T_v\cdot\nabla]u = \Delta_q(T_v\cdot\nabla u) - T_v\cdot\nabla\Delta_q u, \\ [\Delta_q, T_{\nabla\cdot}\cdot v]u = \Delta_q(T_{\nabla u}\cdot v) - T_{\nabla\Delta_q u}\cdot v, \\ [\Delta_q, R(v,\nabla\cdot)]u = \Delta_q(R(v\cdot\nabla, u)) - R(v\cdot\nabla, \Delta_q u).\end{cases} \tag{3.160}$$

I_2 的估计. 由仿积的定义、Bernstein 估计、等价模的定义

$$\begin{aligned}\|I_2\|_p &\leqslant C\sum_{|q-j|\leqslant 4}\|S_{j-1}\nabla u\|_p\|\Delta_j v\|_\infty + \sum_{j\geqslant q-3}\|S_{j-1}\nabla\Delta_q u\|_p\|\Delta_j v\|_\infty \\ &\leqslant C\|u\|_p\|\omega\|_\infty + C\sum_{j\geqslant q-3}\|S_{j-1}\Delta_q u\|_p 2^{q-j}\|\Delta_j\nabla v\|_\infty \\ &\leqslant C\|u\|_p\|\omega\|_\infty,\end{aligned} \tag{3.161}$$

这里用到 L^∞ 均取在 v 的高频部分 $\Delta_j v$, $j \geqslant 0$. 否则, $S_{j-1}u = 0$. 类似的事实在 I_1, I_3 的估计中均会出现, 请留意之.

I_1 的估计.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{|j-q|\leqslant 4} [\Delta_q, S_{j-1}v\cdot\nabla]\Delta_j u \\
&= -\sum_{|j-q|\leqslant 4} 2^{qd}\int_{\mathbb{R}^d} h(2^q(x-y))\big(S_{j-1}v(x)-S_{j-1}v(y)\big)\nabla\Delta_j u(y)dy.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\|I_1\|_p &\leqslant \sum_{|j-q|\leqslant 4} 2^{-q}\|\nabla S_{j-1}v\|_\infty\|\Delta_j\nabla u\|_p \leqslant \sum_{|j-q|\leqslant 4} 2^{j-q}\|\nabla S_{j-1}v\|_\infty\|u\|_p \\
&\leqslant \|u\|_p(\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty+(q+2)\|\omega\|_\infty), \qquad (3.162)
\end{aligned}
$$

这里 2^{-q} 源于中值定理出现的因子 $|x-y|$, 它需要配上 2^q.

I_3 的估计.

$$
I_3 = \sum_{j\geqslant q-4} [\Delta_q, \Delta_j v\cdot\nabla]\widetilde{\Delta}_j u + [\Delta_q, \Delta_{-1}v\cdot\nabla]\widetilde{\Delta}_{-1}u := J_1+J_2. \qquad (3.163)
$$

利用中值定理与卷积型表示公式 (见 (3.162) 的估计)

$$
\|J_2\|_p \leqslant 2^{-q}\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty\|\widetilde{\Delta}_{-1}u\|_p \leqslant \|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty\|u\|_p. \qquad (3.164)
$$

利用 Bernstein 不等式, 可见

$$
\begin{aligned}
\|J_1\|_p &\leqslant C\sum_{j\geqslant q-4} 2^q\|\Delta_j v\|_\infty\|\widetilde{\Delta}_j u\|_p \\
&\leqslant C\|u\|_p\sum_{j\geqslant q-4} 2^{q-j}\|\Delta_j\omega\|_\infty \\
&\leqslant C\|u\|_p\|\omega\|_\infty. \qquad (3.165)
\end{aligned}
$$

综合 (3.161)~(3.165) 可以推出交换子估计 (3.158). 这样由常规方法可推出频段层次上的正则性估计 (光滑效应), 见命题 3.10. □

近年来, 分数阶的对流扩散方程引人注目, 下面通过 Fourier 局部化方法给出分数阶的对流扩散方程的正则性估计. 在 $\mathbb{R}^d$ 上考虑下面分数阶的对流扩散方程:

$$
\begin{cases}
\partial_t u + v\cdot\nabla u + \nu\Lambda^\alpha u = f, \\
u(x,0) = u_0(x),
\end{cases} \qquad (\mathrm{TD})_{\nu,\alpha}
$$

这里 v 是给定的向量场 (可以不满足自由散度条件), u_0 表示初始函数, f 表示给定的外力项, $\nu\geqslant 0$ 表示黏性系数, $0\leqslant\alpha\leqslant 2$.

定理 3.12　设 $1\leqslant\rho_1\leqslant\rho\leqslant\infty$, $1\leqslant p\leqslant p_1\leqslant\infty$ 及 $1\leqslant r\leqslant\infty$. 假设 $s\in\mathbb{R}$ 满足下面条件:

$$s < 1 + \frac{d}{p_1}, \quad 或\ s \leqslant 1 + \frac{d}{p_1},\ 若\ r = 1;$$

$$s > -d\min\Big(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p'}\Big), \quad 或\ s > -1 - d\min\Big(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p'}\Big),\ 若\ \mathrm{div} v = 0.$$

存在常数 $C = C(d, s, p, p_1, r) > 0$ 满足对于具有黏性输运方程 $(\mathrm{TD})_{\nu,\alpha}$ $(\nu \geqslant 0)$ 的任意光滑解 u, 有如下的先验估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_T^\rho \dot{B}_{p,r}^{s+\frac{\alpha}{\rho}}} \leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{\rho_1}\dot{B}_{p,r}^{s-\alpha+\frac{\alpha}{\rho_1}}}\Big), \tag{3.166}$$

这里 $Z(T) := \displaystyle\int_0^T \|\nabla v(t)\|_{\dot{B}_{p_1,\infty}^{\frac{N}{p_1}} \cap L^\infty} dt.$

进而, 如果 $u = v$, 则对于所有的 $s > 0(s > -1,\ 若\ \mathrm{div} v = 0)$, 令 $Z(T) = \displaystyle\int_0^T \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt$, 估计 (3.166) 仍然成立.

注记 3.8 这个定理源于 Miao-Wu 的文章, 它是定理 1.3($\alpha = 2$) 的推广形式. 证明的方法仍然是 Fourier 局部化、Lagrange 坐标变换及交换子估计.

证明 仅仅考虑 $\alpha \in [0, 2)$, $\alpha = 2$ 的情形参见定理 1.3. 令

$$u_q := \dot{\Delta}_q u, \quad f_q := \dot{\Delta}_q f.$$

用 $\dot{\Delta}_q$ 作用到方程 $(\mathrm{TD})_{\nu,\alpha}$ 两边, 就得

$$\partial_t u_q + \dot{S}_{q-1} v \cdot \nabla u_q + \nu\Lambda^\alpha u_q = f_q + R_q,$$

其中 $R_q := (\dot{S}_{q-1} v - v) \cdot \nabla u_q - [\dot{\Delta}_q, v \cdot \nabla] u$.

记 ψ_q 是正则化向量场 $\dot{S}_{q-1} v$ 所决定的粒子轨道映射,

$$\bar{u}_q := u_q \circ \psi_q, \quad \bar{f}_q := f_q \circ \psi_q, \quad \bar{R}_q := R_q \circ \psi_q,$$

则有

$$\partial_t \bar{u}_q + \nu\Lambda^\alpha \bar{u}_q = \bar{f}_q + \bar{R}_q + \nu G_q, \tag{3.167}$$

其中 $G_q := \Lambda^\alpha(u_q \circ \psi_q) - (\Lambda^\alpha u_q) \circ \psi_q$.

采用二次局部化的过程, 即用 $\dot{\Delta}_j$ 作用到方程 (3.167) 两边, 取 L^p 范数, 并且利用半群的局部化估计就得

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j \bar{u}_q(t)\|_{L^p} \lesssim{} & e^{-\kappa\nu t 2^{j\alpha}}\|\dot{\Delta}_j u_{0,q}\|_{L^p} + \int_0^t e^{-\kappa\nu(t-\tau)2^{j\alpha}} \\ & \times \big(\|\dot{\Delta}_j \bar{f}_q\|_{L^p} + \|\dot{\Delta}_j \bar{R}_q\|_{L^p} + \nu\|\dot{\Delta}_j G_q\|_{L^p}\big) d\tau.\end{aligned} \tag{3.168}$$

利用引理 2.7, 有

$$\|\dot{\Delta}_j G_q(t)\|_{L^p} \leqslant Ce^{CV(t)} V^{1-\frac{\alpha}{2}}(t) 2^{q\alpha}\|u_q\|_{L^p}. \tag{3.169}$$

根据 Bernstein 估计、局部化引理 2.2, 容易推出

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_j\bar{f}_q(t)\|_{L^p} &\lesssim 2^{-j}\|\nabla\dot{\Delta}_j\bar{f}_q\|_{L^p}\\ &\lesssim 2^{-j}\|(\nabla f_q)\circ\psi_q\|_{L^p}\|\nabla\psi_q\|_{L^\infty}\\ &\lesssim 2^{-j}\|\nabla f_q\|_{L^p}\|J_{\psi_q^{-1}}\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}}\|\nabla\psi_q\|_{L^\infty}\\ &\lesssim e^{CV(t)}2^{q-j}\|f_q\|_{L^p}.\end{aligned}\tag{3.170}$$

类似于 (3.170) 的证明, 也有

$$\|\dot{\Delta}_j\bar{R}_q(t)\|_{L^p}\lesssim e^{CV(t)}2^{q-j}\|R_q\|_{L^p}.$$

利用广义的交换子估计 (引理 2.4), 直接推出

$$\|\dot{\Delta}_j\bar{R}_q(t)\|_{L^p}\lesssim e^{CV(t)}2^{q-j}c_q(t)2^{-qs}Z'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}^s_{p,r}},\tag{3.171}$$

这里 $\|c_q(t)\|_{\ell^r}=1$.

将估计 (3.169), (3.170) 及 (3.171) 代入 (3.168), 并在 $[0,t]$ 上取 L^ρ 范数, 然后在所得的方程两边同乘以 $\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}$, 就得

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}\|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q\|_{L^\rho_tL^p} \lesssim\ & 2^{\frac{(q-j)\alpha}{\rho}}(1-e^{-\kappa\nu\rho t2^{j\alpha}})^{\frac{1}{\rho}}2^{qs}\|\dot{\Delta}_ju_{0,q}\|_{L^p}\\ &+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{(q-j)(1+\frac{\alpha}{\rho}+\frac{\alpha}{\rho_1'})}e^{CV(t)}2^{q(s-\frac{\alpha}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L^{\rho_1}_tL^p}\\ &+\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}2^{(q-j)\alpha}e^{CV(t)}V^{1-\frac{\alpha}{2}}(t)\|u_q\|_{L^\rho_tL^p}\\ &+2^{(q-j)(1+\frac{\alpha}{\rho})}\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)e^{CV(\tau)}\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau.\end{aligned}\tag{3.172}$$

令 $M_0\in\mathbb{Z}$ 是待定常数. 对于 u_q 进行高–低频分解, 就是

$$u_q=\dot{S}_{q-M_0}\bar{u}_q\circ\psi_q^{-1}+\sum_{j\geqslant q-M_0}\dot{\Delta}_j\bar{u}_q\circ\psi_q^{-1},$$

则对于任意的 $t\in[0,T]$, 就得

$$\|u_q\|_{L^\rho_tL^p}\leqslant e^{CV(t)}\big(\|\dot{S}_{q-M_0}\bar{u}_q\|_{L^\rho_tL^p}+\sum_{j\geqslant q-M_0}\|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q\|_{L^\rho_tL^p}\big).\tag{3.173}$$

根据局部化引理 2.1, 有

$$\|\dot{S}_{q-M_0}\bar{u}_q\|_{L^p}\lesssim\|J_{\psi_q^{-1}}\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p}}(2^{-q}\|\nabla J_{\psi_q^{-1}}\|_{L^\infty}\|J_{\psi_q}\|_{L^\infty}+2^{-M_0}\|\nabla\psi_q^{-1}\|_{L^\infty})\|u_q\|_{L^p}.$$

结合粒子轨道映射引理 3.1 及 Bernstein 估计, 就可以推出

$$\|\dot{S}_{q-M_0}\bar{u}_q\|_{L^\rho_tL^p}\lesssim e^{CV(t)}(e^{CV(t)}-1+2^{-M_0})\|u_q\|_{L^\rho_tL^p}.\tag{3.174}$$

注意到正交性 $\dot{\Delta}_j u_{0,q}=0$, $|j-q|>1$, 从 (3.172) 就推出

$$\begin{aligned}&\sum_{j\geqslant q-M_0}\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}\|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q\|_{L_t^\rho L^p}\\&\lesssim(1-e^{-\kappa\nu\rho t2^{q\alpha}})^{\frac{1}{\rho}}2^{qs}\|u_{0,q}\|_{L^p}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{M_0(1+\alpha)}e^{CV(t)}2^{q(s-\frac{\alpha}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}L^p}\\&\quad+\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{M_0\alpha}e^{CV(t)}V^{1-\frac{\alpha}{2}}(t)2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho L^p}\\&\quad+2^{M_0(1+\alpha)}\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)e^{CV(\tau)}\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau.\end{aligned}\tag{3.175}$$

现将 (3.174) 及 (3.175) 代入 (3.173), 就得

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho L^p}\leqslant{}&C(1-e^{-\kappa\nu\rho t2^{q\alpha}})^{\frac{1}{\rho}}2^{qs}\|u_{0,q}\|_{L^p}\\&+Ce^{CV(t)}\Big(\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{M_0(1+\alpha)}2^{q(s-\frac{\alpha}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}L^p}\\&+\big(2^{-M_0}+2^{M_0\alpha}V^{1-\frac{\alpha}{2}}(t)\big)\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho L^p}\\&+2^{M_0(1+\alpha)}\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big).\end{aligned}$$

选取整数 M_0 满足 $2C2^{-M_0}\in\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4}\right]$, T_1 是满足

$$T_1\leqslant T \text{ 和 } CV(T_1)\leqslant C_0,\quad \text{其中 } C_0=\min\left(\log 2,\Big(\frac{2^{-M_0\alpha}}{8C^{\frac{\alpha}{2}}}\Big)^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)$$

的最大实数. 那么对于 $t\in[0,T_1]$, 存在常数 C_1 满足

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{q(s+\frac{\alpha}{\rho})}\|u_q\|_{L_t^\rho L^p}\leqslant C_1\Big(&(1-e^{-\kappa\nu\rho t2^{q\alpha}})^{\frac{1}{\rho}}2^{qs}\|u_{0,q}\|_{L^p}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{q(s-\frac{\alpha}{\rho_1'})}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}L^p}\\&+\int_0^t c_q(\tau)Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big).\end{aligned}$$

两边再取 ℓ^r 范数, 就得

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_t^\rho\dot{B}^{s+\frac{\alpha}{\rho}}_{p,r}}\leqslant C_1\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}_t^{\rho_1}\dot{B}^{s-\frac{\alpha}{\rho_1'}}_{p,r}}+\int_0^t Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big).\tag{3.176}$$

现将 $[0,T]$ 分解成 m 个子区间, $[0,T_1]$, $[T_1,T_2]$, $\cdots$, $[T_{m-1},T_m]$, 满足

$$C\int_{T_k}^{T_{k+1}}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}dt\approx C_0.$$

类似于 (3.176) 的推导过程, 对于任意的 $t\in[T_k,T_{k+1}]$,

$$\begin{aligned}\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^\rho_{[T_k,t]}\dot{B}^{s+\frac{\alpha}{\rho}}_{p,r}}\leqslant C_1\Big(&\|u(T_k)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}_{[T_k,t]}\dot{B}^{s-\frac{\alpha}{\rho_1'}}_{p,r}}\\&+\int_{T_k}^t Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau\Big).\end{aligned}$$

根据标准的归纳方法, 容易看出

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_t^\rho \dot{B}_{p,r}^{s+\frac{\alpha}{\rho}}} \leqslant C_1^{k+1}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}_t^{\rho_1}\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{\alpha}{\rho_1'}}} + \int_0^t Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}_{p,r}^s}d\tau\Big).$$

注意到子区间的个数 $m \approx CV(T)C_0^{-1}$, 在不计常数 C 改变的前提下, 就可以推出

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}_T^\rho \dot{B}_{p,r}^{s+\frac{\alpha}{\rho}}} \leqslant Ce^{CV(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{\rho_1}\dot{B}_{p,r}^{s-\frac{\alpha}{\rho_1'}}} + \int_0^T Z'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}_{p,r}^s}dt\Big). \tag{3.177}$$

当然, 上面不等式对于任意的 $\rho \in [\rho_1, \infty]$ 均成立. 这样, 首先在 (3.177) 中选取 $\rho = \infty$, 利用 Gronwall 不等式就推出

$$\|u\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{B}_{p,r}^s} \leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{\rho_1}\dot{B}_{p,r}^{s-\alpha+\frac{\alpha}{\rho_1}}}\Big). \tag{3.178}$$

最后, 将 (3.178) 代入到 (3.177) 就得对于一般的 ρ 对应的估计 (3.166).

对于 $u = v$ 的情形的证明, 请看注记 2.2(2).

2.4　具有对流项的线性 Stokes 方程的正则性估计

考虑

$$\begin{cases} \partial_t u + v\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \nabla\pi = f, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u(0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

我们的主要结果如下:

定理 4.1　*设 $1 \leqslant p \leqslant p_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant \rho_1, r \leqslant \infty$, s 满足 (1.1), 即*

$$\begin{cases} s < 1 + \dfrac{d}{p_1}, \quad \text{或 } s \leqslant 1 + \dfrac{d}{p_1}, \text{ 若 } r = 1; \\ s > -1 - \min\Big(\dfrac{d}{p_1}, \dfrac{d}{p'}\Big). \end{cases}$$

那么存在常数 $C = C(d, r, s, p, p_1)$ 使得对于 (4.1) 的任意光滑解 (u, π), 满足如下估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^\rho(I;\dot{B}_{p,r}^{s+\frac{2}{\rho}})} \leqslant Ce^{CZ(T)}\Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|\mathcal{P}f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;\dot{B}_{p,r}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}})}\Big), \tag{4.2}$$

$$\|\nabla\pi - \mathcal{Q}f\|_{\mathcal{L}^1(I;\dot{B}_{p,r}^s)} \leqslant (e^{CZ(T)} - 1)\Big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|\mathcal{P}f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;\dot{B}_{p,r}^{s-2+\frac{2}{\rho_1}})}\Big), \tag{4.3}$$

这里

$$\rho \in [\rho_1, +\infty), \quad I = [0, T], \quad Z(T) = \int_0^T \|\nabla v(t)\|_{\dot{B}_{p_1,\infty}^{\frac{d}{p_1}}\cap L^\infty}dt, \tag{4.4}$$

$\mathcal{P}$ 是自由向量场上的投影算子, $\mathcal{Q}$ 是位势场上的投影算子.

证明 由 Helmholtz 分解$(L^p)^d = E^p \oplus G^p$, 容易看出, 若

$$\nabla\pi \longrightarrow \nabla\pi - \mathcal{Q}f,$$

则无妨假设 $\mathcal{Q}f \equiv 0$(等价于假设 $\mathcal{P}f = f$).

令

$$\begin{cases} u_q := \dot{\Delta}_q u, \quad \pi_q := \dot{\Delta}_q \pi, \quad f_q := \dot{\Delta}_q f, \\ R_q := (\dot{S}_{q-1}v - v)\cdot\nabla u_q - [\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u. \end{cases} \tag{4.5}$$

应用 $\dot{\Delta}_q$ 于 (4.1) 两边, 可以将 (4.1) 局部化成如下方程:

$$\partial_t u_q + \dot{S}_{q-1}v\cdot\nabla u_q - \nu\Delta u_q + \nabla\pi_q = f_q + R_q. \tag{4.6}$$

引入由光滑向量场 $\dot{S}_{q-1}v$ 所决定的流函数 ψ_q 及 $\phi_q \triangleq \psi_q^{-1}$. 通过变量替换

$$\begin{cases} \bar{u}_q := u_q\circ\psi_q, \quad \overline{\nabla\pi}_q := \nabla\pi_q\circ\psi_q, \quad \bar{f}_q := f_q\circ\psi_q, \\ \bar{R}_q := R_q\circ\psi_q, \quad T_q := \Delta u_q\circ\psi_q - \Delta\bar{u}_q, \end{cases} \tag{4.7}$$

(4.6) 就变成了新的扩散方程

$$\partial_t\bar{u}_q - \nu\Delta\bar{u}_q = \bar{f}_q + \bar{R}_q + \nu T_q - \overline{\nabla\pi}_q. \tag{4.8}$$

采用 Fourier 局部化技术, 可见

$$\partial_t\dot{\Delta}_j\bar{u}_q - \nu\Delta\dot{\Delta}_j\bar{u}_q = \dot{\Delta}_j\bar{f}_q + \dot{\Delta}_j\bar{R}_q + \nu\dot{\Delta}_j T_q - \dot{\Delta}_j\overline{\nabla\pi}_q, \quad q, j\in\mathbb{Z}^2. \tag{4.9}$$

采用算子半群的局部化估计, 可见

$$\begin{aligned} \|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q(t)\|_p \lesssim & e^{-\kappa\nu t2^{2j}}\|\dot{\Delta}_j u_{0,q}\|_p + \int_0^t e^{-\kappa\nu(t-\tau)2^{2j}}\Big(\|\dot{\Delta}_j\bar{f}_q\|_p + \|\dot{\Delta}_j\bar{R}_q\|_p \\ & + \nu\|\dot{\Delta}_j T_q\|_p + \|\dot{\Delta}_j\overline{\nabla\pi}_q\|_p\Big)d\tau. \end{aligned} \tag{4.10}$$

注意到

$$\begin{aligned} \|\dot{\Delta}_j\overline{\nabla\pi}_q\|_p &\lesssim 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j\nabla\overline{\nabla\pi}_q\|_p \\ &= 2^{-j}\|\dot{\Delta}_j((D\nabla\pi_q)\circ\psi_q\cdot D\psi_q)\|_p \\ &\lesssim 2^{q-j}e^{CV(t)}\|\nabla\pi_q\|_p, \end{aligned} \tag{4.11}$$

及 (3.20), (3.22), (3.24) 就可以推出

$$\begin{aligned} \nu^{\frac{1}{\rho}}2^{\frac{2j}{\rho}}\|\dot{\Delta}_j\bar{u}_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)} \lesssim & \|\dot{\Delta}_j u_{0,q}\|_p + 2^{(q-j)}\nu^{-\frac{1}{\rho_1'}}2^{-\frac{2j}{\rho_1'}}e^{CV(t)}\|f_q\|_{L_t^{\rho_1}(I;L^p)} \\ & + 2^{2(q-j)}\nu^{\frac{1}{\rho}}2^{\frac{2j}{\rho}}(e^{CV(t)}-1)\|u_q\|_{L_t^\rho(I;L^p)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2^{q-j}e^{CV(t)}\|\nabla\pi_q\|_{L_t^1(I;L^p)}\\
&+2^{(q-j)}\int_0^t c_q(\tau)2^{-qs}Z'(\tau)e^{CV(\tau)}\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

下面仅需要给出压力项的估计. 用 $\mathcal{Q}$ 作用于方程 (4.6) 的两边 (请牢记假设 $\mathcal{Q}f=0$), 就是

$$
\nabla\pi_q=\mathcal{Q}R_q-\mathcal{Q}(\dot{S}_{q-1}v\cdot\nabla u_q). \tag{4.13}
$$

注意到

$$
R_q=\partial_t u_q+\dot{S}_{q-1}v\cdot\nabla u_q-\nu\Delta u_q+\nabla\pi_q-f_q
$$

及 (4.13) 右边项的 Fourier 变换支撑在一个环形域上, 自然 $(R_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ 的 Fourier 变换就是支撑在环形区域列上. 因此, 利用引理 2.4 就得

$$
\|\mathcal{Q}R_q(t)\|_p\leqslant C\|R_q(t)\|_p\leqslant C'c_q(t)2^{-qs}Z'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}, \tag{4.14}
$$

这里 C 与 C' 均不依赖于 $p\in[1,\infty]$.

其次, 由于 $\mathrm{div}u=0$ 蕴含 $\mathcal{Q}u_q=0$, 由交换子估计 (2.41) 可见

$$
\|\mathcal{Q}(\dot{S}_{q-1}v\cdot\nabla u_q)\|_p=\|[\mathcal{Q},\dot{S}_{q-1}v^k]\partial_k\dot{\Delta}_q u\|_p\leqslant C\|\nabla\dot{S}_{q-1}v\|_\infty\|\dot{\Delta}_q u\|_p. \tag{4.15}
$$

综合 (4.14) 与 (4.15) 可见

$$
\|\nabla\pi_q\|_p\leqslant c_q(t)2^{-qs}Z'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.16}
$$

由此可见, (4.12) 右边的第 4、第 5 项均被

$$
2^{(q-j)}e^{CV(t)}\int_0^t c_q(\tau)2^{-qs}Z'(\tau)\|u(\tau)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}d\tau
$$

控制. 这样, 与 (3.25) 类似的估计成立. 完全相同的推导即得定理 4.1 中的估计 (4.2) 的证明. 最后, 来证明 (4.3). 事实上, 首先将估计 (4.16) 变形, 然后利用混合时空 Besov 空间的定义及估计 (4.2) 的特款 ($\rho=\infty$) 就可得到估计 (4.3) 的证明.□

下面在非齐次 Besov 空间中研究输运扩散方程解的正则性估计. 当 $q\geqslant 0$ 时, 与齐次空间完全类似地估计, 可以估计 $\Delta_q u$, $\Delta_q\nabla\pi$. 采用证明定理 4.1 和定理 3.2 的估计 (处理 $\Delta_{-1}\nabla\pi$ 作为源项). 可以获得估计

$$
\begin{aligned}
\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^\rho(I;B^{s+\frac{2}{\rho}}_{p,r})}\leqslant &Ce^{C(1+\nu T)^{\frac{1}{\rho}}Y(T)}\Big((1+\nu T)^{\frac{1}{\rho}}(\|u_0\|_{B^s_{p,r}}+\|\Delta_{-1}\nabla\pi\|_{L_t^1L^p})\\
&+(1+\nu T)^{1+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}}\nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;B^{s-\alpha+\frac{2}{\rho_1}}_{p,r})}\Big),
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

这里 Y 同前面的定义.

主要困难是给出 $\|\Delta_{-1}\nabla\pi\|_p$ 的估计. 注意到

$$\Delta_{-1}(\nabla\pi - \mathcal{Q}f) = -\mathcal{Q}\Delta_{-1}(v\cdot\nabla u). \tag{4.18}$$

因此, 由于 $\mathcal{Q}u = 0$, 有

$$\Delta_{-1}(\nabla\pi - \mathcal{Q}f) = \Delta_{-1}[\Delta_{-1}v, \mathcal{Q}]\nabla u + \mathcal{Q}\Delta_{-1}((\Delta_{-1}v - v)\cdot\nabla u). \tag{4.19}$$

如果 $1 < p < \infty$, 则可以利用奇异积分算子在 L^p 上的有界性来处理算子 $\mathcal{Q}$. 类同于定理 4.1 就有

$$\|\Delta_{-1}\nabla\pi(t)\|_p \lesssim Y'(t)\|u(t)\|_{\dot{B}^s_{p,r}}. \tag{4.20}$$

将上式代入 (4.17), 容易推出在 $p \neq \infty$ 情形下的估计.

注意到 $\mathcal{Q}$ 不是 $L^\infty \to L^\infty$ 有界线性算子. 故 $p = \infty$ 的情形更加复杂. 如果进一步假设 $\mathrm{div}v = 0$, 同时注意到

$$\nabla\Delta_{-1}\pi = -\mathcal{Q}\partial_j\Delta_{-1}(v^j u). \tag{4.21}$$

Chemin[Chem2] 证明了 $\mathcal{Q}$ 是 $C^r \longrightarrow C^r$ 有界, $r \in (0,1)$. 由于 $\Delta_{-1}\pi$ 的支集性质, 可以保证

$$\|\nabla\Delta_{-1}\pi\|_\infty \leqslant \|\partial_j\Delta_{-1}(v^j u)\|_\infty. \tag{4.22}$$

根据 Besov 空间中的乘积估计, 可见当 $s > -1$ 时, 有

$$\|\nabla\Delta_{-1}\pi\|_\infty \leqslant \|v\|_{B^1_{\infty,\infty}}\|u\|_{B^s_{\infty,\infty}}. \tag{4.23}$$

定理 4.2 设 $s > -1$, $1 \leqslant \rho_1, r \leqslant \infty$, 假设 $\mathrm{div}v = 0$. 存在常数 $C = C(d,r,s)$ 使得对于 (4.1) 的任意光滑解 (u,π), 满足如下先验估计:

$$\nu^{\frac{1}{\rho}}\|u\|_{\mathcal{L}^\rho(I;B^{s+\frac{2}{\rho}}_{\infty,r})} \leqslant Ce^{CX(T)}\Big(\|u_0\|_{B^s_{\infty,r}} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|\mathcal{P}f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;B^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{\infty,r})}\Big), \tag{4.24}$$

$$\|\nabla\pi - \mathcal{Q}f\|_{\mathcal{L}^1(I;B^s_{\infty,r})} \leqslant (e^{CX(T)} - 1)\Big(\|u_0\|_{B^s_{\infty,r}} + \nu^{\frac{1}{\rho_1}-1}\|\mathcal{P}f\|_{\mathcal{L}^{\rho_1}(I;B^{s-2+\frac{2}{\rho_1}}_{\infty,r})}\Big), \tag{4.25}$$

这里

$$X(T) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \|v(t)\|_{\mathrm{Lip}}dt, & 若\ -1 < s < 1, \\ \displaystyle\int_0^T \|v(t)\|_{B^s_{\infty,r}}dt, & 若\ s > 1\ \ 或\ \ s \geqslant 1\ \ 和\ \ r = 1. \end{cases}$$

注记 4.1 (1) 可以将定理 4.2 陈述成 $p \neq \infty$ 的情形;

(2) 可以将前面得到的一系列正则性估计推广到频段层次或其他改进形式 (见 Hmidi 与 Keraani 的文章 [HK1]), 研究 N-S 方程与 Euler 更顺手.

第 3 章　不可压 Euler 方程的数学理论

考虑理想不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\partial_t v + v\cdot\nabla v = -\nabla\pi, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+,\\ \mathrm{div} v = 0,\\ v(0)=v^0,\end{cases} \tag{E}$$

经典的研究结果主要涉及如下三个方面:

(1) 利用正则化技术、能量方法及紧致性原理, 容易证明 (E) 存在唯一的局部光滑解, 即存在 $T=T(\|u_0\|_{H^m})>0$, (E) 存在唯一的光滑解 $u(t)\in C([0,T);H^m(\mathbb{R}^d))$, 这里整数 $m>\dfrac{d}{2}+1$. 当然, 也可以直接利用迭代方法结合交换子估计在一般的位势 Sobolev 空间中证明局部适定性, 即存在 $T=T(\|u_0\|_{W^{s,p}})>0$ 使得 (E) 存在唯一温和解 $u(t)\in C([0,T);W^{s,p}(\mathbb{R}^d))$, $W^{s,p}=(1-\Delta)^{-\frac{s}{2}}L^p(\mathbb{R}^d)$, $s>\dfrac{d}{p}+1$, $p\in(1,\infty)$. 详见 Kato [Kato1] 及 Kato-Ponce [KP1].

(2) 利用粒子轨道映射、常微分方程的 Picard 逐次逼近方法及 Biot-Savart 定律, 容易建立 (E) 在 Hölder 型空间 $C^{1,\gamma}$ 中局部光滑解的存在唯一性. 详见 Majda-Bertozzi [Ma-B].

(3) Blow-up 准则. 记 $\omega=\nabla\times u$, 设 $m>\dfrac{d}{2}+1$ 或 $s>\dfrac{d}{p}+1$. 则有如下光滑解或温和解的 Blow-up 准则:

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\|u(t)\|_{H^m}=\infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*}\|\omega\|_\infty dt=\infty \quad \text{(Beale-Kato-Majda)},$$

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\|u(t)\|_{W^{s,p}}=\infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*}\|\omega\|_\infty dt=\infty \quad \text{(Beale-Kato-Majda)},$$

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\|u(t)\|_{H^m}=\infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*}\|\omega\|_{\mathrm{BMO}} dt=\infty \quad \text{(Kozono-Taniuch)},$$

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\|u(t)\|_{W^{s,p}}=\infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*}\|\omega\|_{\mathrm{BMO}} dt=\infty \quad \text{(Kozono-Taniuch)}.$$

3.1 不可压 Euler 方程在 Besov 空间中的局部适定性与 Blow-up 准则

本节在 Besov 空间的框架下, 给出 d 维空间不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题 (E) 的局部适定性与 Blow-up 准则.

定理 1.1 (Besov 的框架下的局部适定性与 Blow-up 准则) 设

$$s > \frac{d}{p} + 1, \quad p \in (1, \infty), \quad r \in (1, \infty], \qquad \text{(情形 A)}$$

或

$$s = \frac{d}{p} + 1, \quad p \in (1, \infty), \quad r = 1. \qquad \text{(情形 B)}$$

则有如下局部适定性与 Blow-up 准则:

(i) **局部适定性**. 设 $u_0(x) \in B^s_{p,r}$ 满足 $\operatorname{div} v = 0$, 则存在 $T = T(\|u_0\|_{B^s_{p,r}}) > 0$ 使得问题 (E) 存在唯一的解 $u(t) \triangleq u(t,x) \in C([0,T); B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))$.

(ii) **Blow-up 准则 (情形 A)**. 设 $0 < T^* < \infty$, $[0,T^*)$ 是 $u(t) \in C([0,T^*); B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d))$ 的极大生命区间, 则

$$\limsup_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{B^s_{p,r}} = \infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*} \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} dt = \infty.$$

(iii) **Blow-up 准则 (情形 B)**. 设 $0 < T^* < \infty$, $[0,T^*)$ 是 $u(t) \in C([0,T^*); B^{\frac{d}{p}+1}_{p,1})$ 的极大生命区间, 则

$$\limsup_{t \nearrow T^*} \|u(t)\|_{B^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}} = \infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*} \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} dt = \infty.$$

注记 1.1 (1) 由于 $B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d) = C^{0,s}(\mathbb{R}^d)$, 根据 Sobolev 嵌入定理, 从上面结果就可以导出 Hölder 空间上的局部存在性及 Blow-up 准则.

(2) 当 $d = 2$, 由于涡度满足自由的输运方程, $\|\omega(t)\|_\infty = \|\omega_0\|_\infty$, 因此, 利用 Sobolev 嵌入关系 $L^\infty \hookrightarrow \dot{B}^0_{\infty,\infty}$ 及 Blow-up 准则 (情形 A) 就可以导出光滑解的整体存在性, 即

$$u(t) \in C([0,\infty); B^s_{p,r})(\mathbb{R}^2), \qquad s > \frac{2}{p} + 1, \quad p \in (1,\infty), \quad r \in (1, \infty].$$

证明 第一步 (预备估计). 证明见第 1 章与第 2 章.

(i) log-型不等式

$$\|f\|_\infty \lesssim 1 + \|f\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \log\left(\|f\|_{B^s_{p,r}} + e\right), \quad s > \frac{d}{p}, \quad p, r \in [1, \infty]. \tag{1.1}$$

(ii) Moser 型不等式

$$\|fg\|_{B^s_{p,r}} \lesssim \|f\|_{p_1}\|g\|_{B^s_{p_2,r}} + \|g\|_{q_1}\|f\|_{B^s_{q_2,r}}, \tag{1.2}$$

$$\|fg\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \lesssim \|f\|_{p_1}\|g\|_{\dot{B}^s_{p_2,r}} + \|g\|_{q_1}\|f\|_{\dot{B}^s_{q_2,r}}, \tag{1.3}$$

这里 $s>0,\ p,p_1,p_2,q_1,q_2,r\in[1,\infty]$ 且

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}.$$

(iii) 广义交换子估计的特例

$$2^{qs}\|R_q\|_p \leqslant Cc_q\|\nabla u\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}},\quad s>0\quad (\text{或 } s>-1,\ \text{若 } \mathrm{div}u=0), \tag{1.4}$$

这里

$$R_q := (S_{q-1}u\cdot\nabla)u_q - \Delta_q((u\cdot\nabla)u),\quad \|c_q\|_{\ell^q}=1,\quad u_q=\Delta_q u.$$

第二步 (Fourier 局部化). 首先将局部化算子 Δ_j 作用于 (E) 两边, 整理可见

$$\partial_t\Delta_j u + (S_{j-1}u\cdot\nabla)\Delta_j u = (S_{j-1}u\cdot\nabla)\Delta_j u - \Delta_j((u\cdot\nabla)u) - \nabla\Delta_j\pi. \tag{1.5}$$

注意到不可压条件 $\mathrm{div}u=0$, 利用由光滑向量场 $S_{j-1}u$ 所决定的粒子轨道映射的保测性, 两边取 L^p 范数就得

$$\|\Delta_j u\|_p \leqslant \|\Delta_j u_0\|_p + \int_0^t \Big[\big\|(S_{j-1}u\cdot\nabla)u_j - \Delta_j((u\cdot\nabla)u)\big\|_p + \|\nabla\Delta_j\pi\|_p\Big]dt.$$

利用 Besov 空间的定义与广义交换子估计 (1.4), 就得

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|\nabla\pi\|_{B^s_{p,r}}dt + C\int_0^t \|\nabla u\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}dt. \tag{1.6}$$

注意到

$$\pi = \sum_{i,j=1}^d (-\Delta)^{-1}[\partial_i u_j\partial_j u_i] \Longrightarrow \partial_k\partial_l\pi = \sum_{i,j=1}^d R_kR_l[\partial_i u_j\partial_j u_i],$$

及 $1<p<\infty$, 利用 C-Z 有界性和 Moser 型估计就得

$$\|\nabla\pi\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \lesssim \sum_{i,j=1}^d \Big\|R_kR_l[\partial_i u_j\partial_j u_i]\Big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}} \lesssim \sum_{i,j=1}^d \Big\|\partial_i u_j\partial_j u_i\Big\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}} \lesssim \|\nabla u\|_\infty\|u\|_{B^s_{p,r}}, \tag{1.7}$$

$$\|\nabla\pi\|_p \lesssim \sum_{j=1}^d \Big\|\nabla\partial_j(-\Delta)^{-1}\{(u\cdot\nabla)u_j\}\Big\|_p \leqslant C\|(u\cdot\nabla)u\|_p \leqslant C\|\nabla u\|_\infty\|u\|_p. \tag{1.8}$$

组合 (1.6)~(1.8), 就得

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + C\int_0^t \|\nabla u\|_\infty \|u\|_{B^s_{p,r}} dt. \tag{1.9}$$

第三步 (迭代过程与存在性). 在定理 1.1 的条件情形 A 或情形 B 下, 利用 Sobolev 嵌入定理, $B^{s-1}_{p,r} \hookrightarrow L^\infty$, 则 (1.6) 就意味着

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + C\int_0^t \|u\|_{B^s_{p,r}} \|u\|_{B^s_{p,r}} dt. \tag{1.10}$$

这就为我们在 Besov 空间中求解提供了有力的保证. 构造工作空间

$$X^s_T = C([0,T]; B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)).$$

从 (1.10) 就可以推出

$$\|u\|_{X^s_T} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + CT\|u\|^2_{X^s_T}. \tag{1.11}$$

设 $u^{(0)} = 0$, $\pi^{(0)} = 0$, 构造迭代序列 $\{u^{(m)}\}$ 如下:

$$\begin{aligned}
&\partial_t u^{(m)} + (u^{(m-1)} \cdot \nabla)u^{(m)} = -\nabla\pi^{(m-1)}, \quad m = 1, 2, \cdots,\\
&\mathrm{div} v^{(m)} = 0, \qquad v^{(m)}(0) = S_m u_0(x),\\
&\pi^{(m)} = \sum_{i,j=1}^d (-\Delta)^{-1}\big(\partial_i u_j^{(m)} \partial_j u_i^{(m)}\big), \quad m = 1, 2, \cdots.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

对迭代方程进行局部化, 就是

$$\begin{aligned}
\partial_t \Delta_j u^{(m)} + (S_{j-1}u^{(m-1)} \cdot \nabla)\Delta_j u^{(m)} =& (S_{j-1}u^{(m-1)} \cdot \nabla)\Delta_j u^{(m)}\\
&- \Delta_j((u^{(m-1)} \cdot \nabla)u^{(m)}) - \nabla\Delta_j \pi^{(m-1)}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

完全类似于 (1.11) 的证明, 就得

$$\|u^{(m)}\|_{X^s_T} \leqslant \|S_m u_0\|_{B^s_{p,r}} + CT\|u^{(m-1)}\|^2_{X^s_T} \leqslant C_0\|u_0\|_{B^s_{p,r}} + C_0 T\|u^{(m-1)}\|^2_{X^s_T}. \tag{1.14}$$

归纳可见

$$\|u^{(m)}\|_{X^s_T} \leqslant 2C_0\|u_0\|_{B^s_{p,r}}, \quad m \geqslant 0, \quad T \in [0, T_0], \quad T_0 = \frac{1}{8C_0^2\|u_0\|_{B^s_{p,r}}}. \tag{1.15}$$

考虑相差方程与局部化形式

$$\begin{aligned}
&\partial_t[u^{(m+1)} - u^{(m)}] + (u^{(m)} \cdot \nabla)[u^{(m+1)} - u^{(m)}]\\
=&([u^{(m-1)} - u^{(m)}] \cdot \nabla)u^{(m)} - \nabla[\pi^{(m)} - \pi^{(m-1)}], \quad m = 1, 2, \cdots,\\
&\mathrm{div} u^{(m)} = 0, \qquad [u^{(m+1)} - u^{(m)}](0) = \Delta_{m+1}u_0(x),
\end{aligned} \tag{1.16}$$

对 (1.16) 进行局部化, 就是

$$\begin{aligned}&\partial_t\Delta_j[u^{(m+1)}-u^{(m)}]+(S_{j-1}u^{(m)}\cdot\nabla)\Delta_j[u^{(m+1)}-u^{(m)}]\\=&(S_{j-1}u^{(m)}\cdot\nabla)\Delta_j[u^{(m+1)}-u^{(m)}]-\Delta_j\{(u^{(m)}\cdot\nabla)[u^{(m+1)}-u^{(m)}]\}\\&+\Delta_j\{([u^{(m-1)}-u^{(m)}]\cdot\nabla)u^{(m)}\}-\nabla\Delta_j(\pi^{(m)}-\pi^{(m-1)}).\end{aligned}\tag{1.17}$$

注意到 $\text{div}S_{j-1}u^{(m)}=0$, 由光滑向量场 $S_{j-1}u$ 所决定的保测粒子轨道映射, 两边取 $\dot{B}^{s-1}_{p,r}$ 范数得

$$\begin{aligned}&\|u^{(m+1)}-u^{(m)}\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}\\\leqslant&\|\Delta_{m+1}u_0\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}+\int_0^T\bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{rj(s-1)}\Big\|(S_{j-1}u^{(m)}\cdot\nabla)\Delta_j[u^{(m+1)}-u^{(m)}]\\&-\Delta_j\{(u^{(m)}\cdot\nabla)[u^{(m+1)}-u^{(m)}]\}\Big\|_p^r\bigg)^{\frac{1}{r}}\mathrm{d}t\\&+\int_0^T\|[u^{(m-1)}-u^{(m)}]\cdot\nabla u^{(m)}\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}dt+\int_0^T\|\nabla(\pi^{(m)}-\pi^{(m-1)})\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}dt\\\triangleq&I_1+I_2+I_3+I_4.\end{aligned}\tag{1.18}$$

利用 Bernstein 估计、广义交换子估计 (1.4) 及 Moser 型估计, 容易推出

$$\begin{aligned}I_1\leqslant&C2^{-m}\|\Delta_{m+1}u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}\leqslant C2^{-m}\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}},\\I_2\leqslant&\int_0^T\|\nabla u^{(m)}\|_\infty\|u^{(m+1)}-u^{(m)}\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}dt\leqslant\int_0^T\|u^{(m)}\|_{B^s_{p,r}}\|u^{(m+1)}-u^{(m)}\|_{B^{s-1}_{p,r}}dt,\\I_3\leqslant&\int_0^T\Big[\|u^{(m-1)}-u^{(m)}\|_\infty\|\nabla u^{(m)}\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}+\|u^{(m-1)}-u^{(m)}\|_{\dot{B}^{s-1}_{p,r}}\|\nabla u^{(m)}\|_\infty\Big]dt\\\leqslant&\int_0^T\|u^{(m)}\|_{B^s_{p,r}}\|u^{(m-1)}-u^{(m)}\|_{B^{s-1}_{p,r}}dt.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{j=1}^d\partial_ju_j^{(m-1)}=\sum_{j=1}^d\partial_j(u_j^{(m)}-u_j^{(m-1)})=0,$$

直接验证

$$\begin{aligned}&\nabla\pi^{(m)}-\nabla\pi^{(m-1)}\\=&\sum_{i,j=1}^d(-\Delta)^{-1}\nabla\partial_i\Big[(u_j^{(m)}-u_j^{(m-1)})\partial_ju_i^{(m)}+u_j^{(m-1)}\partial_j(u_i^{(m)}-u_i^{(m-1)})\Big]\\=&\sum_{i,j=1}^d(-\Delta)^{-1}\nabla\Big[\partial_i\{(u_j^{(m)}-u_j^{(m-1)})\partial_ju_i^{(m)}\}+\partial_j\{(\partial_iu_j^{(m-1)})(u_i^{(m)}-u_i^{(m-1)})\}\Big].\end{aligned}$$

从而, 由 Moser 型估计及 C-Z 算子的有界性, 就得

$$I_4 \lesssim \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^T \left[\|(u_j^{(m)} - u_j^{(m-1)})\partial_j u_i^{(m)}\|_{\dot{B}_{p,r}^{s-1}} + \|\partial_i u_j^{(m-1)}(u_i^{(m)} - u_i^{(m-1)})\|_{\dot{B}_{p,r}^{s-1}} \right] dt$$

$$\leqslant C \int_0^T (\|u^{(m)}\|_{B_{p,r}^s} + \|u^{(m-1)}\|_{B_{p,r}^s}) \|u^{(m-1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} dt.$$

因此, 综合 $I_1 \sim I_4$ 的估计, 就得

$$\begin{aligned} &\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{\dot{B}_{p,r}^{s-1}} \\ \lesssim& 2^{-m}\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \int_0^T \|u^{(m)}\|_{B_{p,r}^s} \|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} dt \\ &+ \int_0^T (\|u^{(m)}\|_{B_{p,r}^s} + \|u^{(m-1)}\|_{B_{p,r}^s}) \|u^{(m-1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} dt, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{1.19}$$

同理, 在 L^p- 层次, 也有估计

$$\|\nabla\pi^{(m)} - \nabla\pi^{(m-1)}\|_p \leqslant C\big(\|\nabla u^{(m-1)}\|_\infty + \|\nabla u^{(m)}\|_\infty\big)\|u^{(m)} - u^{(m-1)}\|_p,$$

因此

$$\begin{aligned} &\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_p \\ \leqslant& \|\Delta_{m+1} u_0\|_p + \int_0^T \|(u^{(m)} \cdot \nabla)[u^{(m+1)} - u^{(m)}]\|_p dt \\ &+ \int_0^T \|([u^{(m-1)} - u^{(m)}] \cdot \nabla) u^{(m)}\|_p dt + \int_0^T \|\nabla(\pi^{(m)} - \pi^{(m-1)})\|_p dt \\ \lesssim& 2^{-m}\|u_0\|_p + \int_0^T \|\nabla u^{(m)}\|_p \|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_\infty dt \\ &+ \int_0^T (\|\nabla u^{(m)}\|_\infty + \|\nabla u^{(m-1)}\|_\infty) \|u^{(m-1)} - u^{(m)}\|_p dt, \quad \forall t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{1.20}$$

根据估计 (1.19) 与 (1.20), 就得

$$\begin{aligned} &\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} \\ \leqslant& 2^{-m} C\|u_0\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + C\int_0^T \|u^{(m)}\|_{B_{p,r}^s} \|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} dt \\ &+ C\int_0^T (\|u^{(m)}\|_{B_{p,r}^s} + \|u^{(m-1)}\|_{B_{p,r}^s}) \|u^{(m-1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} dt \\ \leqslant& 2^{-m} C_1 + C_1 T \sup_{t\in[0,T]} \|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{B_{p,r}^{s-1}} + C_1 T \sup_{t\in[0,T]} \|u^{(m)} - u^{(m-1)}\|_{B_{p,r}^{s-1}}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

这里

$$T \in (0, T_0], \quad C_1 = C_1(\|u_0\|_{B^s_{p,r}}).$$

因此, 取 $C_1 T < \frac{1}{2}$, 则

$$\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{X_T^{s-1}} \leqslant 2^{-m+1} C_1 + 2C_1 T \|u^{(m)} - u^{(m-1)}\|_{X_T^{s-1}}. \tag{1.22}$$

进而, 当 $C_1 T < \frac{1}{4}$, 归纳求和就知

$$\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{X_T^{s-1}} \leqslant C 2^{-m}. \tag{1.23}$$

所以, 对于 $T_1 \leqslant \min\left\{T_0, \frac{1}{4C_1}\right\}$, 序列 $\{u^{(m)}\}$ 在 $X_{T_1}^{s-1}$ 收敛, 相应的极限函数

$$u(t) \in X_{T_1}^s = C([0, T_1]; B^s_{p,r})$$

就是 Euler 方程的 Cauchy 问题 (E) 的解, 并且满足

$$\sup_{t \in [0, T_1]} \|u(t)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant 2C_0 \|u_0\|_{B^s_{p,r}}, \tag{1.24}$$

这里 C_0 同 (1.15).

第四步 (唯一性). 设 (u, π_1), (v, π_2) 是 (E) 在 $C([0, T_1]; B^s_{p,r})$ 中分别具有初值 u_0 与 v_0 的解, 则 $w = u - v$ 满足:

$$\begin{cases} \partial_t w + (v \cdot \nabla) w = -(w \cdot \nabla) u - \nabla(\pi_1 - \pi_2), \\ \operatorname{div} w = 0, \qquad w(0) = u_0(x) - v_0(x), \end{cases} \tag{1.25}$$

因此, 类似于上面的推导, 存在充分小的 $T_2 > 0$ 和 $C_2 = C_2(\|u_0\|_{B^s_{p,r}}, \|v_0\|_{B^s_{p,r}})$, 使得对于 $T \in (0, T_2]$, 成立

$$\|w\|_{X_T^{s-1}} = \|u - v\|_{X_T^{s-1}} \leqslant \|u_0 - v_0\|_{B^{s-1}_{p,r}} + C_2 T \|u - v\|_{X_T^{s-1}}. \tag{1.26}$$

由于唯一性是局部性质, 只要取 $T_3 = \min\left\{T_1, T_2, \frac{1}{2C_2}\right\} > 0$ 充分小, 上式就可推出解的唯一性.

第五步 (Blow-up 准则 (情形 A)). 注意到 $u(t)$, $\omega(t)$ 满足椭圆方程组

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad \operatorname{curl} u = \omega(t).$$

因此, 利用 Calderón 算子代数的理论, 流体速度的梯度与涡度之间满足如下关系:

$$\nabla u = \mathcal{P}(\omega) + C_3 \omega, \tag{1.27}$$

这里 $\mathcal{P}$ 是 C-Z 奇异积分算子, C_3 是一个常数矩阵. 利用 C-Z 奇异积分算子在齐次 Besov 空间的有界性与 log-型不等式, 就推出

$$\|\nabla u\|_\infty \leqslant C\Big[1+\|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\log\big(\|u\|_{B^s_{p,r}}+e\big)\Big] \leqslant C\Big[1+\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}\log\big(\|u\|_{B^s_{p,r}}+e\big)\Big], \tag{1.28}$$

这里 $s>\dfrac{d}{p}+1$. 将它代入 (1.9), 就得

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + C\int_0^t (\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}+1)\log\big(\|u\|_{B^s_{p,r}}+e\big)\|u\|_{B^s_{p,r}}d\tau. \tag{1.29}$$

因此, 利用 Gronwall 不等式, 就推出

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}}\exp\Big[C_4\exp\Big[C_5\int_0^t(\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}+1)d\tau\Big]\Big], \tag{1.30}$$

这里 C_4 与 C_5 是固定常数.

另一方面, 注意到 $s>\dfrac{d}{p}+1$, Sobolev 嵌入定理就意味着

$$\int_0^T \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}}d\tau \leqslant T\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,\infty}} \leqslant CT\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|u\|_{B^s_{p,r}}. \tag{1.31}$$

因此, 结合 (1.30) 及 (1.31) 就得 Blow-up 准则情形 A.

第六步 (Blow-up 准则 (情形 B)). 利用 Sobolev 嵌入定理

$$\|\nabla u\|_\infty \leqslant C\|\nabla u\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}},$$

(1.9) 可以改写成

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}} + C\int_0^t \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}\|u\|_{B^s_{p,r}}dt. \tag{1.32}$$

直接利用 Gronwall 不等式, 就得

$$\|u\|_{B^s_{p,r}} \leqslant \|u_0\|_{B^s_{p,r}}\exp\Big[C\int_0^t \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}d\tau\Big]. \tag{1.33}$$

另一方面, 利用流体速度的梯度与涡度之间的关系、Sobolev 嵌入定理就可推出

$$\int_0^T \|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}d\tau \leqslant T\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|\omega\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant CT\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T}\|u\|_{B^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}}. \tag{1.34}$$

因此, 结合 (1.33) 及 (1.34) 就得 Blow-up 准则情形 B. □

1. 经典研究方法介绍 (I)—— 能量方法

第一步 (双正则化技术). 先考虑 Euler 方程 (E) 的正则化形式

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + J_\varepsilon[(J_\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla(J_\varepsilon u^\varepsilon)] + \nabla p^\varepsilon = 0, \\ \mathrm{div} u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \tag{1.35}$$

定义散度为零的管向量空间如下:

$$E^m = \{v \in H^m(\mathbb{R}^d), \mathrm{div} v = 0\}.$$

用 Leray 算子 $\mathbb{P}$ 作用于 (1.35) 的两边, 就是

$$u_t^\varepsilon + \mathbb{P}J_\varepsilon[(J_\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla(J_\varepsilon u^\varepsilon)] = 0.$$

于是, 问题 (1.35) 就转化成 Banach 空间 $E^m(\mathbb{R}^d)$ 上的常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{du^\varepsilon}{dt} = F_\varepsilon(u^\varepsilon), \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0(x) \in H^m(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{1.36}$$

这里

$$F_\varepsilon(u^\varepsilon) = -\mathbb{P}J_\varepsilon[(J_\varepsilon u^\varepsilon)\cdot\nabla(J_\varepsilon u^\varepsilon)]. \tag{1.37}$$

注记 1.2　(1) 在 $\mathbb{R}^d$ 中, 光滑子 J_ε 是卷积算子

$$\begin{cases} J_\varepsilon u = \rho_\varepsilon(x) * u = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)dy, \quad \rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\rho\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big), \\ \rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \rho(x) \geqslant 0, \quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1. \end{cases} \tag{1.38}$$

通常, 在考虑 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上的初边值问题时, 无法定义卷积, 此时可以用形如

$$J_\varepsilon u = (I - \varepsilon\Delta)^{-1}u, \quad \forall\varepsilon > 0$$

这一“万能光滑子”来代替卷积型算子.

(2) 无限维 Banach 空间中 ODE 与 $\mathbb{R}^d$ 中的 ODE 的主要区别在于解的连续性. 然而, 对于自治的非线性项 $F(u)$(不显含 t), 解的连续性在其存在范围内是保持的, 即

Banach 空间中的自治 ODE 的 Segal 型定理　设 $X \subset B$ 是 Banach 空间 B 上的开集, $F: X \mapsto B$ 是局部 Lip 连续算子, 则 $\exists T > 0$ 使得

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad u|_{t=0} = u_0(x) \in X$$

存在唯一解 $u(t) \in \mathcal{C}^1([0,T];X)$, 并且满足如下二择性结果:

(i) $T=\infty$ (整体解的存在性); 或

(ii) $T<\infty$, 当 $t\to T$ 时, $u(t)\notin X$.

命题 1.2 设 $u_0(x)\in E^m(\mathbb{R}^d)$, $m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$, $\varepsilon>0$, 则 (1.36) 存在唯一的整体解

$$u^\varepsilon(t)\in C^1([0,\infty);E^m(\mathbb{R}^d)). \tag{1.39}$$

证明概要 由抽象空间上的 Picard 方法, 存在 $T_\varepsilon>0$, 使得

$$u^\varepsilon\in C^1([0,T_\varepsilon);E^m),\quad T_\varepsilon=T(\|u_0\|_{H^m},\varepsilon)$$

是 (1.35) 的唯一解, 并且满足

$$\sup_{0\leqslant t<T}\|u^\varepsilon\|_2\leqslant\|u_0\|_2,\quad \forall T\leqslant T_\varepsilon. \tag{1.40}$$

由能量方法与交换子估计, 容易看出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^m}&\leqslant C\|J_\varepsilon\nabla u^\varepsilon\|_\infty\|u^\varepsilon\|_{H^m}\leqslant C(\|u^\varepsilon\|_2,\varepsilon,d)\|u^\varepsilon\|_{H^m}\\&\leqslant C(\|u_0\|_2,\varepsilon,d)\|u^\varepsilon\|_{H^m}.\end{aligned}\tag{1.41}$$

利用 Gronwall 不等式, 就得

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^m}\leqslant Ce^{CT}.$$

这样, Segal 二择性定理就意味着 $T_\varepsilon=\infty$. 也就是说, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 正则化问题 (1.35) 在 E^m 中整体适定. □

第二步. Euler 方程的 Cauchy 问题 (E) 解的局部存在性. 在条件

$$m>\frac{d}{2}+2\quad(\text{可以放宽, 目的是得到点态意义下的光滑解})$$

下, 证明存在区间 $[0,T]$ 及子序列 $\{u^\varepsilon\}$, 使得

$$u^\varepsilon\longrightarrow u\in C([0,T];C^2(\mathbb{R}^d))\cap C^1([0,T];C(\mathbb{R}^d))$$

是 Euler 方程的解, 这里用到嵌入 $H^m\hookrightarrow C^2$, $m>\frac{d}{2}+2$. 具体地说, 有如下两个命题:

命题 1.3 (局部适定性) 设 $u_0(x)\in E^m(\mathbb{R}^d)$, $m>\frac{d}{2}+2$, 则

(i) 存在 $T>0$, 满足

$$T\leqslant\frac{1}{C_m\|u_0\|_{H^m}}$$

及问题 (E) 的唯一解 $u(t)$ 满足

$$u \in C([0,T];C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T];C(\mathbb{R}^d)),$$

其中 u 是 $\{u^\varepsilon\}$ 子序列的极限.

(ii) 正则化问题的解 u^ε 与 u 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon\|_{H^m} \leqslant \frac{\|u_0\|_{H^m}}{1-C_mT\|u_0\|_{H^m}},$$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u\|_{H^m} \leqslant \frac{\|u_0\|_{H^m}}{1-C_mT\|u_0\|_{H^m}}.$$

(iii) $u^\varepsilon, u \in L^\infty([0,T];H^m(\mathbb{R}^d)) \cap \mathrm{Lip}([0,T];H^{m-2}(\mathbb{R}^d)) \cap C_w([0,T];H^m(\mathbb{R}^d))$ 且一致有界 (关于 ε).

命题 1.4 (高阶范数的连续性) 设 u 是命题 1.2 所获得的解, 则

$$u(t) \in C([0,T];E^m) \cap C^1([0,T];E^{m-2}), \quad m > \frac{d}{2}+2.$$

利用 Sobolev 嵌入定理, 自然有

$$u(t) \in C([0,T];C^2(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0,T];C(\mathbb{R}^d)).$$

注意到这里容易误解的问题是与 Navier-Stokes 方程的正则性搞混乱.

第三步. (证明思路). 利用能量方法, 容易看出

$$\frac{d}{dt}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^m} \leqslant C_m\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2, \quad \left\|\frac{du^\varepsilon}{dt}\right\|_{H^{m-2}} \leqslant C_m\|u^\varepsilon\|_{H^m}^2. \tag{1.42}$$

由此推出, 存在 $T>0$ 满足 (i), (ii) 中关于 u^ε 的估计. 与此同时, 采用部分压缩迭代技术, 即对于

$$u^\varepsilon(x,t) \in C([0,T];E^m) \cap C^1([0,T];E^{m-2}(\mathbb{R}^d))$$

中的一致有界列, 证明它是 $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$ 中的收敛的 Cauchy 列, 满足

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon'}\|_2 \leqslant C\max(\varepsilon,\varepsilon'), \qquad C = C(\|u_0\|_{H^m},T). \tag{1.43}$$

利用插值定理, 可以推出对于任意 $0<s<m$,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon'}\|_{H^s} \leqslant C\max(\varepsilon,\varepsilon')^{1-\frac{s}{m}}, \qquad C = C(\|u_0\|_{H^m},T). \tag{1.44}$$

记相应的极限函数是 $u(t)$, 则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon-u\|_2\leqslant C\varepsilon,\quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon-u\|_{H^s}\leqslant C\varepsilon^{1-\frac{s}{m}}. \tag{1.45}$$

特别, $u(t)\in C([0,T];H^s)$, $0\leqslant s<m$.

另一方面, 估计 (1.42) 意味着

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^m}\leqslant M,\quad \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\frac{du^\varepsilon}{dt}\right\|_{H^{m-2}}\leqslant M_1. \tag{1.46}$$

由此就可以推出

$$u\in L^2([0,T];E^m(\mathbb{R}^d))\cap L^\infty([0,T];E^m(\mathbb{R}^d)).$$

利用弱连续性的定义及 $u(t)\in C([0,T];H^s)$, $0\leqslant s<m$, 就可以推出

$$u\in C_w([0,T];E^m(\mathbb{R}^d)).$$

最后, 通过证明 $\|u(t)\|_m$ 在 $t=0$ 处的连续性及平行四边形原理就得

$$u\in C([0,T];E^m)\cap C^1([0,T];E^{m-2}(\mathbb{R}^d)).$$

2. Blow-up 机制

对于 Euler 方程的光滑解, 除了自然的点态 Blow-up 准则

$$T^*<\infty\Rightarrow\|u(t)\|_{H^m(\mathbb{R}^d)}\to\infty,\quad t\to T^* \tag{1.47}$$

之外, 类似于 Besov 空间框架下的讨论, 从估计 (1.41) 就可以导出积分形式的 Blow-up 准则.

Blow-up 准则 I 设 $u(t)\in C([0,T];E^m(\mathbb{R}^d))$ 是 Euler 方程的极大光滑解, 如果 $T<\infty$, 则

$$\int_0^T\|\nabla u\|_\infty dt=\infty. \tag{1.48}$$

采用 log-型不等式就可以得到用涡度刻画的 Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则.

Blow-up 准则 II 设 $u(t)\in C([0,T];E^m(\mathbb{R}^d))$ 是 Euler 方程的极大光滑解, 如果 $T<\infty$, 则

$$\int_0^T\|\omega\|_\infty dt=\infty,\quad \omega=\mathrm{curl}u. \tag{1.49}$$

3. 经典研究方法介绍 (II)—— 粒子轨道方法

第一步. 基本定理.

命题 1.5　设 $v(x,t)$ 是一个光滑向量场 (不要求 $\mathrm{div}v=0$), 记 $X(\alpha,t)$ 是由 $v(x,t)$ 所决定的粒子轨道映射, 即

$$\begin{cases}\dfrac{dX(\alpha,t)}{dt}=v(X(\alpha,t),t),\\ X(\alpha,0)=\alpha\in\mathbb{R}^d.\end{cases}\tag{1.50}$$

则 ω 是满足

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+(v\cdot\nabla)\omega=\omega\cdot\nabla v,\quad 或\ \frac{D\omega}{Dt}=\omega\cdot\nabla v\tag{1.51}$$

的光滑向量场的充分必要条件是

$$\omega(X(\alpha,t),t)=\nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha).\tag{1.52}$$

证明概要　用 ∇ 作用于 (1.50) 可见

$$\frac{d}{dt}\nabla_\alpha X(\alpha,t)=(\nabla v)|_{(X(\alpha,t),t)}\nabla_\alpha X(\alpha,t).\tag{1.53}$$

两边同乘以 $\omega_0(\alpha)$, 可得

$$\frac{d}{dt}\nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha)=(\nabla v)|_{(X(\alpha,t),t)}\nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha).\tag{1.54}$$

注意到

$$\frac{d}{dt}\omega(X(\alpha,t),t)=(\nabla v)|_{(X(\alpha,t),t)}\omega(X(\alpha,t),t),\tag{1.55}$$

并且

$$\begin{cases}\omega(X(\alpha,t),t)|_{t=0}=\omega_0(X(\alpha,0))=\omega_0(\alpha),\\ \nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha)\Big|_{t=0}=\omega_0(\alpha).\end{cases}\tag{1.56}$$

故就推出命题 1.5 成立. □

命题 1.6　设 $v(x,t)$ 是一个光滑不可压向量场($\mathrm{div}v=0$), 记 $X(\alpha,t)$ 是由 $v(x,t)$ 所决定的粒子轨道映射, 即问题 (1.50) 决定的解映射

$$X(\alpha,t)=\alpha+\int_0^t v(\tau,X(\alpha,\tau))d\tau.\tag{1.57}$$

记粒子轨道映射 $X(\alpha,t)$ 的 Jacobi 行列式

$$J(\alpha,t)=\det(\nabla_\alpha X(\alpha,t)).$$

对于任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, 定义

$$X(\Omega, t) = \{X(\alpha, t) : \alpha \in \Omega\}.$$

则下面三个条件相互等价:

(i) $v(x,t)$ 是不可压的光滑向量场, 即对于任意 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 及 $t \geqslant 0$, 成立 $\mathrm{vol}(\Omega) = \mathrm{vol}(X(\Omega, t))$.

(ii) $\mathrm{div} v(x,t) = 0$.

(iii) $J(\alpha, t) = 1$.

证明概要 容易看出, 上面的命题可以归结为证明如下的两个等式:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = (\mathrm{div}_x v)\Big|_{X(\alpha,t)} J(\alpha, t), \tag{1.58}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{X(\Omega,t)} f(x,t)dx = \int_{X(\Omega,t)} [f_t + \mathrm{div}_x(fv)]dx, \tag{1.59}$$

其中 $f = f(x,t)$ 是一个任意的光滑函数.

(1.58) 的证明 由于行列式关于行或列是多线性的, 直接计算

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\det\left[\frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}(\alpha, t)\right] = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant d} A_i^j \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}(\alpha, t),$$

这里 A_i^j 是矩阵 $\nabla_\alpha X$ 中元素 $\dfrac{\partial X^i}{\partial \alpha_j}$ 对应的代数余子式. 根据代数余子式的基本性质有

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant d} \frac{\partial X^k}{\partial \alpha_j} A_i^j = \delta_i^k J, \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases} \tag{1.60}$$

利用粒子轨道所满足的方程 (1.50), 就得

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial X^k}{\partial \alpha_j} A_i^j v_{x_k}^i = \sum_{i,k} v_{x_k}^i \delta_i^k J = J\mathrm{div} v. \tag{1.61}$$

(1.59) 的证明 作积分变换 $\alpha \longmapsto X(\alpha, t)$, 则在区域 $X(\Omega, t)$ 上的积分就转化成固定区域 Ω 上的积分, 即

$$\frac{d}{dt}\int_{X(\Omega,t)} f(x,t)dx = \int_\Omega f(X(\alpha,t),t)J(\alpha,t)d\alpha, \tag{1.62}$$

两边关于 t 求导, 并利用方程 (1.50), 就得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{X(\Omega,t)} f(x,t)dx &= \int_{\Omega}\Big[\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{dX}{dt}\cdot\nabla f\Big)J+f\frac{\partial J}{\partial t}\Big]d\alpha \\ &= \int_{\Omega}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+v\cdot\nabla f+f\mathrm{div}_x v\Big)Jd\alpha \\ &= \int_{X(\Omega,t)}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}+\mathrm{div}_x(fv)\Big)dx,\end{aligned}$$

这样就证明了 (1.59). □

第二步. 对于不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题 (E) 的两边取涡度, 可见

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}+(v\cdot\nabla)\omega=\omega\cdot\nabla v,\\ \omega|_{t=0}=\omega_0(x),\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{cases}\dfrac{D\omega}{Dt}=\omega\cdot\nabla v,\\ \omega|_{t=0}=\omega_0(x).\end{cases}\tag{1.63}$$

由 Biot-Savart 定律可见

$$\begin{cases}v(x,t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}K_d(x-y)\omega(y,t)dy, & x\in\mathbb{R}^d,\\ K_2(x)=\dfrac{1}{2\pi}\Big(\dfrac{-x_2}{|x|^2},\dfrac{x_1}{|x|^2}\Big), & d=2,\\ K_3(x)h=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{x\times h}{|x|^3}, & d=3.\end{cases}\tag{1.64}$$

记 $X(\alpha,t)$ 是由不可压向量场 $v(x,t)$ 所决定的粒子轨道映射, 即

$$\frac{dX(\alpha,t)}{dt}=v(X(\alpha,t),t),\qquad X(\alpha,t)|_{t=0}=\alpha.\tag{1.65}$$

则由基本定理

$$\omega(X(\alpha,t),t)=\nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha),\tag{1.66}$$

就是涡度方程 (1.63) 的解, 代入 Biot-Savart 定律可见 (用到 $y=X(\alpha',t)$ 的保测性)

$$v(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}K_3(x-X(\alpha',t))\nabla_\alpha X(\alpha',t)\omega_0(\alpha')d\alpha'.\tag{1.67}$$

重新回归到粒子轨道方程 (1.63) 就转化成

$$\begin{cases}\dfrac{dX(\alpha,t)}{dt}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}K_3(X(\alpha,t)-X(\alpha',t))\nabla_\alpha X(\alpha',t)\omega_0(\alpha')d\alpha',\\ X(\alpha,t)|_{t=0}=\alpha.\end{cases}\tag{1.68}$$

当 $d=2$ 时, 由于 $\omega\cdot\nabla v=0$, 即无伸展项, 故自由输运方程 (1.63) 的解就可以简单地表示成

$$\omega(x,t)=\omega_0(X^{-1}(x,t)).$$

从而

$$v(x,t)=\int_{\mathbb{R}^2}K_2(x-X(\alpha',t))\omega_0(\alpha')d\alpha'. \tag{1.69}$$

代入输运方程就可推出

$$\begin{cases}\dfrac{dX(\alpha,t)}{dt}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}K_2(X(\alpha,t)-X(\alpha',t))\omega_0(\alpha')d\alpha',\\ X(\alpha,t)|_{t=0}=\alpha.\end{cases} \tag{1.70}$$

故可以通过求解常微分方程 (1.68), (1.70) 来实现研究 (E) 的目的. 一般来说, 所选择合适的 Banach 空间是 Hölder 型的空间, 这方面的工作详见 [Chem2] 或 [Ma-B]. 作为粒子轨道映射方法的基础, 我们在光滑解层次上介绍等价性定理.

命题 1.7 (光滑解层次的等价性) 设 $u_0(x)$ 光滑且满足 $\mathrm{div}v_0(x)=0$, $\omega_0(x)=\mathrm{curl}v_0$, 设 $X(\alpha,t)$ 是 (1.68), 即

$$\begin{cases}\dfrac{dX(\alpha,t)}{dt}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}K_3(X(\alpha,t)-X(\alpha',t))\nabla_\alpha X(\alpha',t)\omega_0(\alpha')d\alpha',\\ X(\alpha,t)|_{t=0}=\alpha\end{cases}$$

所决定的粒子轨道映射. 定义

$$v(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}K_3(x-X(\alpha',t))\nabla_\alpha X(\alpha',t)\omega_0(\alpha')d\alpha'.$$

则 (1.68) 所决定的粒子轨道的存在性等价于 3 维 Euler 方程的具充分衰减的涡度场的光滑解的存在性.

证明 粒子轨道方程 (1.68) 的推导表明, 如果 $v(x,t)$ 是 3 维 Euler 方程的光滑解, 则由光滑向量场 $v(x,t)$ 所确定的光滑的粒子轨道 $X(\alpha,t)$,

$$\frac{dX(\alpha,t)}{dt}=v(X(\alpha,t),t),\qquad X(\alpha,t)|_{t=0}=\alpha,$$

恰好是微分积分方程 (1.68) 的解.

下面证明相反的部分. 众所周知, Biot-Savart 定律意味着 3 维 Euler 方程 (E) 等价于相应的涡度流形式 (1.63). 因此, 仅需证明 $v(x,t)$ 与 $\omega(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{curl}v(x,t)=\omega(x,t),\qquad \mathrm{div}v=0,\\ \dfrac{D\omega}{Dt}=\omega\cdot\nabla v,\qquad \omega\Big|_{t=0}=\omega_0(x).\end{cases} \tag{1.71}$$

假设 $X(\alpha,t)$ 是粒子轨道方程 (1.68) 的解, 则 $X(\alpha,t)$ 是 1-1 的与映上的, 且存在逆变换 $X^{-1}(\cdot,t)$. 定义 $\omega(x,t)$ 如下:

$$\omega(x,t)=\nabla_\alpha X(\alpha,t)\omega_0(\alpha)\Big|_{\alpha=X^{-1}(x,t)}. \tag{1.72}$$

由命题 1.5 就知道上面定义的 $\omega(x,t)$ 是方程

$$\begin{cases}\dfrac{D\omega}{Dt}=\omega\cdot\nabla v, \\ \omega|_{t=0}=\omega_0(x),\end{cases}\qquad v(x,t)=K_3*\omega \tag{1.73}$$

的解, 且满足 (1.73) 中的初始条件. 直接验证

$$v(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}K_3(x-X(\alpha',t))\nabla_\alpha X(\alpha',t)\omega_0(\alpha')d\alpha'$$

满足 $\mathrm{div}v=0$. 下面仅需证明 $\mathrm{curl}v(x,t)=\omega(x,t)$. 事实上, 直接验证: 若向量场 h 满足

$$\frac{Dh}{Dt}=h\cdot\nabla v,\quad \mathrm{div}v=0,$$

则 $\mathrm{div}h=0$. 令 $h=\omega$, 则

$$\frac{D\mathrm{div}\omega}{Dt}=0.$$

另一方面, 注意到

$$\omega_0=\mathrm{curl}v_0,\quad \mathrm{div}v_0=0\Longrightarrow\mathrm{div}\omega_0=0,$$

从而, 利用常微分方程的 Cauchy 问题的唯一性定理, 就推出 $\mathrm{div}\omega=0$. 下面说明此就意味着 $\omega=\mathrm{curl}v$.

事实上, 根据 $\mathrm{div}v=0$ 就推出 $\nabla_\alpha X=Id$, 这样

$$v(x,t)=\int_{\mathbb{R}^d}K_3(x-y)\omega(y,t)dy,\quad x\in\mathbb{R}^3.$$

利用 Hodge 分解定理(见 [Ma-B] Proposition 2.16) 就推出 $\mathrm{div}\omega=0$ 的充要条件是 $\omega=\mathrm{curl}v$. □

3.2 二维不可压 Euler 方程的整体可解性

本节研究 $\mathbb{R}^2$ 上不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\partial_t u+u\cdot\nabla u+\nabla p=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+, \\ \mathrm{div}u=0, \\ u(0)=u_0(x)\end{cases}\tag{E}$$

光滑解的整体适定性及在临界空间中的整体适定性. 从中可以体会 Littlewood-Paley 理论在研究流体动力学方程解的适定性理论中所起的重要作用. 与此同时, 我们着重分析 Euler 方程的光滑解 (工作空间属次临界空间)、低正则性解 (临界空间) 的 Blow-up 机制及区别, 在此基础上研究 (E) 的整体可解性. 当然, Blow-up 准则及弱解的正则性准则也是许多数学家研究的热门问题.

1. 求解空间的分析

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla\pi = 0, \quad x\in\mathbb{R}^d, t\geqslant 0,\\ \mathrm{div}u = 0,\\ u|_{t=0} = u_0(x),\end{cases} \tag{E^d}$$

这里 u 表示流场的速度, $u\cdot\nabla = \sum_{j=1}^{d} u^j\partial_j$ 就表示对流项, π 表示压力. 当流场 u 已知, 则压力 π 可以表示成

$$\pi = (-\Delta)^{-1}\mathrm{div}(u\cdot\nabla u).$$

无论是能量方法还是粒子轨道映射方法, 起码的条件是要求初值函数所属的空间 $X(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$X(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d). \tag{2.1}$$

注意到

$$\|\nabla u_0\|_\infty \leqslant \sum_{j=-1}^{\infty} \|\nabla\Delta_j u_0\|_\infty \leqslant \sum_{j=-1}^{\infty} 2^j\|\Delta_j u_0\|_\infty \leqslant \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{j(\frac{d}{p}+1)}\|\Delta_j u_0\|_p.$$

从而推出

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^{\frac{d}{p}+1}_{p,1} \hookrightarrow B^1_{\infty,1} \hookrightarrow \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d), \quad s > \frac{d}{p}+1, \quad 1\leqslant p,r\leqslant\infty.$$

由此看来, 形如 $B^{1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$ 应是研究 Euler 方程适定性起码的工作空间 (相应的齐次空间具有相同的度), 通常定义为临界空间; 当 $s > \frac{d}{p}+1$, $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d)$ 对应着恰当的可解空间. 特别, $H^s(\mathbb{R}^d)$ $\left(s > \frac{d}{2}+1\right)$ 就是经典研究中常用的空间.

2. 局部适定性

(E) 在 $B^{1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$ 上是局部适定的. 当然, 对于 $X(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^{1+\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^d)$ 的局部适定性是自然的, 它本质上等价于一个正则性问题.

3. 研究方法的选择

基于 Littlewood-Paley 理论的 Fourier 局部化方法、线性化技术、频段层次的能量估计和紧致性方法适用于所有的可解函数空间 (临界与次临界空间). 能量方法及粒子轨道方法是研究 Euler 方程光滑解的适定性的基本方法, 例如, $X(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > \frac{d}{2}+1$. 详见 [Maj].

4. 经典存在性定理的回忆

定理 2.1 ([Kato1]) 设 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{div} u_0(x) = 0$, $s > \frac{d}{2} + 1$, 存在 (E) 的极大解 $u \in C([0, T^*); H^s(\mathbb{R}^d))$ 满足如下二择性:

(i) $T^* = \infty$, 或

(ii)

$$T^* < \infty, \qquad \lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \infty. \tag{2.2}$$

另外, 还有如下的积分型 Blow-up 准则 (从 H^s- 能量估计直接导出)

$$T^* < \infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_\infty dt = +\infty. \tag{2.3}$$

定理 2.2 设 $u_0(x) \in B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathrm{div} u_0(x) = 0$, 则 (E) 存在唯一的极大解

$$u \in C([0, T^*); B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)),$$

并且满足如下二择性:

(i) $T^* = \infty$, 或

(ii)

$$T^* < \infty, \qquad \lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}(\mathbb{R}^d)} = \infty. \tag{2.4}$$

另外, 亦有形如 (2.3) 的积分型 Blow-up 准则.

注记 2.1 定理 2.1 中光滑解的 Blow-up 准则是标准的能量方法的直接结果. 事实上,

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^s} \leqslant C\|\nabla u\|_\infty \|u\|_{H^s},$$

即

$$\|u(t)\|_{H^s} \leqslant \|u_0\|_{H^s} + C\int_0^t \|\nabla u\|_\infty \|u\|_{H^s} d\tau.$$

当然, 在 Besov 框架下, 由 3.1 节中的 Fourier 局部化方法, 也有

$$\|u\|_{B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} \leqslant \|u_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} + C\int_0^t \|\nabla u\|_\infty \|u\|_{B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} dt.$$

对上面两式分别利用 Gronwall 不等式, 就可以直接推出

$$\|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} e^{C\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau},$$

$$\|u(t)\|_{B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} \lesssim \|u_0\|_{B_{p,1}^{1+\frac{d}{p}}} e^{C\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau}.$$

定理 2.3 (Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则)　设 $s > \frac{d}{2} + 1$, $u \in C([0, T^*); H^s(\mathbb{R}^d))$ 是 (E) 方程的极大光滑解, $\omega = \text{curl}u$ 表示涡度, 则

$$T^* < \infty \Longleftrightarrow \int_0^{T^*} \|\omega(\tau)\|_\infty d\tau = +\infty. \tag{2.5}$$

注记 2.2　此 Blow-up 准则表明: 速度场在 $t = T^*$ 产生 Blow-up 是由于涡度的聚积而产生的.

定理 2.3 的证明概要　(1) 能量估计

$$\|u(t)\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s} e^{C\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau}. \tag{2.6}$$

(2) log-型不等式

$$\|\nabla u\|_\infty \lesssim 1 + \|\omega\|_\infty \log(e + \|u\|_{H^s}). \tag{2.7}$$

事实上

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_\infty &\leqslant \|\nabla\Delta_{-1}u\|_\infty + \sum_{j=0}^{N-1} \|\nabla\Delta_j u\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty} \|\nabla\Delta_j u\|_\infty \\
&\leqslant \|\nabla\Delta_{-1}u\|_2 + \sum_{j=0}^{N-1} \|\Delta_j\omega\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty} 2^j \|\Delta_j u\|_\infty \\
&\leqslant \|u\|_2 + N\|\omega\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty} 2^j 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty})j} \|\Delta_j u\|_2 \\
&\leqslant \|u_0(x)\|_2 + N\|\omega\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty} 2^{(1+\frac{d}{2}-s)j} 2^{sj} \|\Delta_j u\|_2 \\
&\leqslant \|u_0(x)\|_2 + N\|\omega\|_\infty + 2^{-(s-\frac{d}{2}-1)N} \|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

线性化 N, 令

$$2^{-\alpha N}(\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + e) = 1, \quad \alpha = s - \frac{d}{2} - 1 > 0,$$

即

$$N \cong [\log(\|u\|_{H^s} + e)/\alpha] + 1.$$

由此可见

$$\|\nabla u\|_\infty \leqslant C(1 + \|u_0\|_2) + C\|\omega\|_\infty \log(e + \|u(t)\|_{H^s}). \tag{2.9}$$

此就是 log-型不等式 (2.7).

现将 (2.7) 代入能量估计式的微分形式

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^s} \leqslant C\|\nabla u\|_{\infty}\|u\|_{H^s}, \tag{2.10}$$

就可以推得

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{H^s} \leqslant C(1+\|u_0\|_2+\|\omega\|_{\infty})\log(e+\|u(t)\|_{H^s})\|u\|_{H^s}.$$

自然有

$$\frac{d}{dt}[\|u\|_{H^s}+e] \leqslant C(1+\|u_0\|_2+\|\omega\|_{\infty})\log(e+\|u(t)\|_{H^s})(\|u\|_{H^s}+e). \tag{2.11}$$

因此

$$\|u\|_{H^s}<\infty \Longleftrightarrow \int_0^t \|\omega(\tau)\|_{\infty}d\tau<\infty. \tag{2.12}$$

□

将 Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则应用到 $\mathbb{R}^2$ 上的 Euler 方程的 Cauchy 问题, 就得如下整体适定性结论:

推论 2.4　设 $d=2$, 则 (E) 方程存在唯一整体光滑解

$$u(t)\in C(\mathbb{R}^+;H^s(\mathbb{R}^2)),\quad s>2.$$

证明概要　记 $[0,T^*)$ 是 (E) 方程的极大存在区间. 由于 $\omega=\nabla\times u$ 满足自由的输运方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega+(u\cdot\nabla)\omega=0, \quad \mathrm{div}u=0,\\ \omega(0,x)=\omega_0(x)\end{cases}$$

利用不可压向量场 u 所定义的粒子轨道映射的保测性, 就得

$$\|\omega(t,x)\|_{\infty}=\|\omega_0(x)\|_{\infty},\quad \forall t\in[0,\infty).$$

因此 $T^*=\infty$.　□

注记 2.3　(1) $d=3$ 时, $\omega=\mathrm{curl}u=\nabla\times u$ 满足

$$\partial_t\omega+(u\cdot\nabla)\omega=\omega\cdot\nabla u, \tag{2.13}$$

此出现了伸展项, 这是研究不可压流体中最困难的项. 因此, 三维 Euler 方程的整体可解性是公开的问题. 然而, 我们将在下一节研究具有轴对称结构的三维 Euler 方程的整体可解性.

(2) 对于定常向量场, 输运或对流方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega+(B\cdot\nabla)\omega=0,\\ \omega(0,x)=\omega_0(x)\end{cases}$$

的解可以表示成 $\omega=\omega_0(x-Bt)$, 它自然是一个保测粒子轨道映射.

(3) 伸展项具有膨胀与扩张的性质, 对于定常伸展方程,

$$\begin{cases}\partial_t\omega=\lambda\omega, \quad \lambda>0,\\ \omega(0,x)=\omega_0(x).\end{cases}$$

它的解 $\omega(t)=e^{\lambda t}\omega_0(x)$ 明显的起着膨胀作用.

(4) $d=2$, 由

$$\begin{cases}\partial_t\omega+(u\cdot\nabla)\omega=0,\\ \omega(0,x)=\omega_0(x)\end{cases}$$

可以推出

$$\|\omega(t)\|_p=\|\omega_0\|_p, \quad 0\leqslant t<\infty, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{2.14}$$

不仅如此, 还可以证明

$$\|u\|_p\lesssim(1+t\|\omega_0\|_\infty)e^{Ct}, \quad 1<p\leqslant\infty. \tag{2.15}$$

事实上, 考虑 (E) 的积分形式:

$$u(t)=u_0(x)+\int_0^t\mathbb{P}(u\cdot\nabla)ud\tau.$$

由奇异积分在 $L^p(1<p<\infty)$ 中的有界性,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}&\lesssim\|u_0(x)\|_p+\int_0^t\|u\|_\infty\|\nabla u\|_pd\tau\\&\lesssim\|u_0\|_p+\int_0^t\|u\|_\infty\|\omega\|_pd\tau\\&\lesssim\|u_0\|_p+\int_0^t\|u\|_\infty\|\omega_0\|_pd\tau\\&\lesssim C\Big(1+\int_0^t\|u(\tau)\|_\infty d\tau\Big), \quad 1<p<\infty.\end{aligned} \tag{2.16}$$

而

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &\leqslant \|\Delta_{-1}u\|_\infty + \sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j u\|_\infty \leqslant \|u\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}2^j\|\Delta_j u\|_\infty \\ &\leqslant \|u\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\|\Delta_j\nabla u\|_\infty \leqslant \|u\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\|\Delta_j\omega\|_\infty \\ &\leqslant \|u\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\|\omega\|_\infty \leqslant \|u\|_p + \|\omega\|_\infty,\end{aligned}$$

特别

$$\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_p + \|\omega_0\|_\infty, \qquad d = 2. \tag{2.17}$$

因此

$$\|u\|_p \lesssim 1 + \int_0^t (\|u\|_p + \|\omega_0\|_\infty)d\tau \lesssim (1 + t\|\omega_0\|_\infty) + \int_0^t \|u\|_p d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式, 就可以推出

$$\|u\|_p \lesssim (1 + t\|\omega_0\|_\infty)e^{Ct}.$$

代入 (2.17), 就可以导出估计 (2.15) 在 $p = \infty$ 时亦成立.

问题 当 $u_0(x) \in B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)$ 时, 2 维 Euler 方程的 Cauchy 问题 (E) 的局部解 $u(t) \in C([0,T^*); B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1})$ 是否可以延拓成整体解?

Vishik[Vi] 证明了 $1 < p < \infty$ 时的整体适定性. 事实上, $p = \infty$ 时相应的结果仍然成立.

困难分析 在临界空间中, Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则不再成立, 因此

$$\|\omega\|_\infty = \|\omega_0(x)\|_\infty < \infty$$

不足以保证整体适定性!

事实上, 观察

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_\infty &\leqslant \|\Delta_{-1}u\|_\infty + \sum_{j=0}^{N-1}\|\nabla\Delta_j u\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty}\|\nabla\Delta_j u\|_\infty \\ &\leqslant \|u_0\|_2 + N\|\omega\|_\infty + \sum_{j=N}^{\infty}2^{2j}\|\Delta_j u\|_2.\end{aligned}$$

如果 $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s = 2 + \varepsilon$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{j=N}^{\infty}2^{(s-\varepsilon)j}\|\Delta_j u\|_2 &\leqslant \sum_{j=N}^{\infty}2^{-\varepsilon j}(2^{sj}\|\Delta_j u\|_2) \leqslant \Big(\sum_{j=N}^{\infty}2^{-2\varepsilon j}\Big)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \\ &\leqslant 2^{-\varepsilon N}\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \qquad (H^s\text{是非临界空间}).\end{aligned}$$

采用线性化 N 的技术, 就可以利用 Beale-Kato-Majda 准则导出整体解. 然而, 对于 $u \in B^2_{2,1}$ 而言, 上述方法是失效的. 这就要求我们寻求新的方法, 获得

$$\int_0^T \|\nabla u(t)\|_\infty dt < \infty, \quad \forall T > 0$$

的估计 (即 $u(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \text{Lip}(\mathbb{R}^2))$).

5. **寻求涡度所需的必要估计**

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_\infty &\leqslant \|\nabla \Delta_{-1} u\|_\infty + \sum_{j=0}^\infty \|\nabla \Delta_j u\|_\infty \\
&\leqslant C \left(\|u_0\|_2 + \sum_{j=0}^\infty \|\Delta_j \omega\|_\infty \right) \\
&\lesssim \|u_0\|_2 + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

因此, 我们需要给出更好的先验估计

$$\|\omega\|_{B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)} < \infty. \tag{2.19}$$

6. **经典估计的可行性分析**

考虑线性输运方程

$$\begin{cases} \partial_t a + (u \cdot \nabla) a = f, \quad \text{div} u = 0, \quad u(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \text{Lip}(\mathbb{R}^d)), \\ a|_{t=0} = a_0(x) \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{2.20}$$

根据第 2 章的命题 3.5, 有如下经典的线性估计:

命题 2.5 (Besov 空间正则性的保持) 设 $s \in (-1, 1)$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, 则

$$\|a(t)\|_{B^s_{p,r}} \leqslant C\Big(\|a_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\Big) e^{\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau}. \tag{2.21}$$

如果将上面经典的线性估计应用到二维 Euler 方程所对应的涡度方程

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega = 0, \\ \omega(0) = \omega_0(x). \end{cases} \tag{2.22}$$

则

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant C \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} e^{\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau}. \tag{2.23}$$

将此代入到 (2.18), 可见

$$\|\nabla u\|_\infty \leqslant \|u_0\|_2 + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant \|u_0\|_2 + C\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} e^{\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau}. \tag{2.24}$$

我们没有获得任何东西, 失败!

寻求新的研究工具 我们从保测变换 (实际上也可以从一般的变换如共形变换等出发来考虑问题) 出发, 考虑正交性在保测变换的破坏与形变等特征, 在此基础上建立线性输运方程、线性耗散方程及输运扩散方程解的 log-型先验估计, 从而为研究流体动力学方程的适定性 (特别是在临界空间中的适定性) 提供强有力的研究工具.

问题与类比 设 $\psi:\mathbb{R}^d\longmapsto\mathbb{R}^d$ 是保测变换, 那么 $\|f\circ\psi\|_p=\|f\|_p$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 我们的问题: 是否成立

$$\|f\circ\psi\|_{B^0_{p,r}}\leqslant\|f\|_{B^0_{p,r}}(1\leqslant p,r\leqslant\infty)?\quad 特别\ \|f\circ\psi\|_{B^0_{\infty,1}}\leqslant\|f\|_{B^0_{\infty,1}}?\tag{2.25}$$

回答是否定的, 但是成立如下 Vishik log-型不等式 (证明见第 2 章局部化定理):

$$\|f\circ\psi^{-1}\|_{B^0_{p,r}}\leqslant C(1+\log(\|\psi\|_{Lip}\|\psi^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}))\|f\|_{B^0_{p,r}},\quad 1\leqslant p,r\leqslant\infty.\tag{2.26}$$

这就牵涉到局部化的基本思想. 由于保测变换 ψ 并非是共形变换, 因此诸如

$$\Delta_q(\Delta_j f)=0,\quad |j-q|\geqslant 2$$

的几乎正交原理在保测变换 ψ 下将并不保持. 然而, 有 Vishik- 衰减型的正交原理

$$\|\Delta_q((\Delta_j f)\circ\psi)\|_p\leqslant C2^{-|j-q|}\|\nabla\psi^{\varepsilon(j,q)}\|_\infty\|\Delta_j f\|_p,\tag{2.27}$$

这里 $\varepsilon(j,q)=\mathrm{sign}(j-q)$. 证明可见第 2 章引理 2.2.

7. 新型的先验估计 ——log-型先验估计

记 $\psi(t,x)$ 是由光滑的不可压向量场所确定的粒子轨道映射,

$$\psi(t,x)=x+\int_0^t u(\tau,\psi(x,\tau))d\tau.\tag{2.28}$$

满足

$$\frac{dJ(\psi(t,x))}{dt}=\mathrm{div}u\cdot J=0\Longrightarrow J(\psi)=1,$$

及

$$\|\nabla\psi^{\pm}\|_\infty\leqslant e^{V(t)},\quad V(t)=\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau.$$

将复合函数估计 (2.26) 应用到线性输运方程 (2.20) 的光滑解

$$a(t,x)=a_0(\psi^{-1}(x,t)+\int_0^t f(\psi^{-1}(x,\tau),\tau)d\tau,\tag{2.29}$$

直接导出 Vishik-log-型不等式:

命题 2.6 设 $s=0$, $a(t,x)$ 是输运方程 (2.20) 的解, $1\leqslant p,r\leqslant\infty$, 则

$$\|a(t)\|_{B^0_{p,r}}\leqslant C\Big(\|a_0\|_{B^0_{p,r}}+\int_0^t\|f(\tau)\|_{B^0_{p,r}}d\tau\Big)\Big(1+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau\Big). \tag{2.30}$$

8. Euler 方程在临界空间 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}(\mathbb{R}^2)$ 中的整体适定性

将 log 型线性估计应用到 (E) 的涡度形式

$$\begin{cases}\partial_t\omega+(u\cdot\nabla)\omega=0,\\ \omega(t,x)|_{t=0}=\omega_0(x).\end{cases}$$

注意到 $\omega(x,t)=\omega_0(\psi^{-1}(x,t))$, 就可以推出

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}}\leqslant C\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}\Big(1+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau\Big). \tag{2.31}$$

将此代入到 (2.18), 可见

$$\|\nabla u\|_\infty\leqslant C_0\Big(1+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau\Big). \tag{2.32}$$

由 Gronwall 不等式, 可得

$$\|\nabla u\|_\infty\leqslant C_0e^{C_0t}. \tag{2.33}$$

注记 2.4 (log-型估计的思想与延拓) (i) 在与经典的线性 Besov 空间中的估计比较中, $e^{\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau}$ 被换成了

$$\Big(1+\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau\Big)$$

Taylor 展式中的前两项, 相当于取 log.

(ii) 对于输运扩散方程

$$\begin{cases}\partial_t a+(u\cdot\nabla)a-\Delta a=0,\\ a|_{t=0}=a_0(x),\end{cases} \tag{2.34}$$

上面的证明方法失效! 但结果可以通过二次微局部化等过程来实现, 详见第 2 章 2.3 节的讨论.

9. log-型线性估计的一个特例的证明

$$\begin{cases}\partial_t a+(u\cdot\nabla)a=0,\\ a|_{t=0}=a_0(x)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\psi(t,x)=x+\displaystyle\int_0^t u(t,\psi(\tau,x))d\tau,\\ a(t,x)=a_0(\psi^{-1}(t,x)),\end{cases}$$

满足

$$\frac{dJ(\psi(t,x))}{dt}=\mathrm{div}u\cdot J=0,\quad \|\nabla\psi^{\pm}\|_{\infty}\leqslant e^{V(t)},\quad V(t)=\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{\infty}d\tau.$$

直接验算

$$\begin{aligned}\|a(t)\|_{B^0_{p,1}}&=\|a_0(\psi^{-1}(t,x))\|_{B^0_{p,1}}\\&=\sum_{j,q}\|\Delta_j((\Delta_q a_0)\circ\psi^{-1}(t,x))\|_p\\&=\left(\sum_{|j-q|\leqslant N-1}+\sum_{|j-q|\geqslant N}\right)\|\Delta_j((\Delta_q a_0)\circ\psi^{-1}(t,x))\|_p\\&:=I+II.\end{aligned}$$

先来估计 I,

$$I\leqslant\sum_{|j-q|\leqslant N-1}\|\Delta_q a_0\|_p\leqslant 2N\sum_q\|\Delta_q a_0\|_p\leqslant 2N\|a_0\|_{B^0_{p,1}}.$$

再来估计 II,

$$II\leqslant\sum_{|j-q|\geqslant N}2^{-|j-q|}e^{V(t)}\|\Delta_q a_0\|_p\leqslant 2^{-N}e^{V(t)}\|a_0\|_{B^0_{p,1}}.$$

线性化 N, 取 $2^{-N}e^{V(t)}=1$, 即得

$$\|a(t)\|_{B^0_{p,1}}\leqslant C\|a_0\|_{B^0_{p,1}}(1+V(t)).$$

3.3 三维轴对称 Euler 方程的整体适定性

本节以 $\mathbb{R}^3$ 上的不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\partial_t u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=0,\quad x\in\mathbb{R}^3,\quad t\geqslant 0,\\ \mathrm{div}u=0,\\ u|_{t=0}=u_0(x)\end{cases}\tag{E}$$

为例, 来讲述 Fourier 局部化技术在研究三维轴对称无旋流体的整体适定性中的作用, 从中可以体会 Littlewood-Paley 分解、Bony 的仿积估计、正交性条件、几何结构条件、交换子估计与消失性条件的使用在偏微分方程研究中的重要性. 作为开始, 先回忆几个众所周知的经典结果.

Kato 局部适定性 设 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{div}u_0(x) = 0$, $s > \frac{3}{2} + 1$, 则 (E) 存在唯一的极大解 $u \in C([0, T^*); H^s(\mathbb{R}^3))$ 满足如下二择性:

$$T^* = \infty, \qquad \text{或} \quad T^* < \infty, \quad \lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{H^s} = \infty.$$

临界空间中的局部适定性 设 $u_0 \in B^{1+\frac{3}{p}}_{p,1}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\mathrm{div}u_0(x) = 0$, 则 (E) 存在唯一的极大解 $u \in C([0, T^*); B^{1+\frac{3}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^3))$ 满足如下二择性:

$$T^* = \infty, \quad \text{或} \quad T^* < \infty, \quad \lim_{t \uparrow T^*} \|u(t)\|_{B^{1+\frac{3}{p}}_{p,1}} = \infty.$$

经典的 Blow-up 准则 对上述两个局部适定性, 如果 $T^* < \infty$ 是极大存在区间的右端点, 则

$$\int_0^{T^*} \|\nabla u\|_\infty dt = \infty.$$

Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则 设 $u \in C([0, T^*); H^s)$ 是方程 (E) 的极大解, $s > \frac{3}{2} + 1$, 则当 $T^* < \infty$ 时, 就有

$$\int_0^{T^*} \|\omega(t)\|_\infty dt = \infty \quad (\text{见 3.1 节的证明}).$$

意义 涡度的聚积可以导致解的 Blow-up 现象.

公开问题 如何将局部解拓展成整体解? 这是一个著名的公开问题! 退一步讲, 小初值问题是否有整体解亦是著名的公开问题! 3 维不可压流体的主要困难在于其涡度形式中出现了所谓的涡度伸展 (涡度伸展) 项. 理解涡度伸展项 $\omega \cdot \nabla u$ 如何影响流体是解决问题的关键.

对于具有一定几何结构的流体, 例如, 具有轴对称无旋流体, 可以证明它是整体适定的. 借助于 $\frac{\omega}{r}$ 满足自由输运方程

$$\partial_t \left(\frac{\omega}{r}\right) + v \cdot \nabla \left(\frac{\omega}{r}\right) = 0 \Longrightarrow \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_p = \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

及 Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则就可证明问题 (E) 是整体适定的. 然而, 当初值 $\varphi(x) \in B^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}(\mathbb{R}^3)$ 时, Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则失效, 这就需要利用涡度的新的分解、轴对称流体的特殊的几何结构.

3.3.1 预备知识

定义 3.1 称 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 是轴对称 (axisymmetric) 无旋向量场, 如果

$$u(t, x) = u^r(r, z)e_r + u^z(r, z)e_z, \quad x = (x_1, x_2, z), \tag{3.1}$$

这里 $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $u^\theta = 0$ 表示无旋(without swirl).

特点 在柱坐标系下, $u^\theta \equiv 0$ 并且 u^r, u^z 仅依赖于 r 与 z.

1. 柱坐标系

$$\begin{cases} e_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = \left(\dfrac{x_1}{r}, \dfrac{x_2}{r}, 0\right), \\ e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \left(-\dfrac{x_2}{r}, \dfrac{x_1}{r}, 0\right), \\ e_z = (0,0,1) = (0,0,1). \end{cases} \tag{3.2}$$

直接验证

$$\begin{cases} \dfrac{de_r}{d\theta} = e_\theta, \quad \dfrac{de_\theta}{d\theta} = -e_r, \quad \dfrac{de_\theta}{dr} = \dfrac{de_r}{dr} = 0, \\ e_r = e_\theta \times e_z, \quad e_\theta = e_z \times e_r, \quad e_z = e_r \times e_\theta. \end{cases}$$

2. 柱坐标系与直角坐标系的转化

直接验算

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u^r(r,\theta,z)e_r + u^\theta(r,\theta,z)e_\theta + u^z(r,\theta,z)e_z \\ &= \left(\frac{x_1u^r - x_2u^\theta}{r}, \frac{x_2u^r + x_1u^\theta}{r}, u^z\right), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{x_1}{r}u^r - \dfrac{x_2}{r}u^\theta, \\ u_2 = \dfrac{x_2}{r}u^r + \dfrac{x_1}{r}u^\theta, \\ u_3 = u^z, \end{cases} \iff \begin{cases} u^r = \dfrac{x_1u_1 + x_2u_2}{r}, \\ u^\theta = \dfrac{x_1u_2 - x_2u_1}{r}, \\ u^z = u_3. \end{cases} \tag{3.3}$$

注意到

$$\omega = \nabla \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).$$

从而推出 (由转化公式 (3.3))

$$\begin{cases} \omega^r = \dfrac{x_1}{r}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \dfrac{x_2}{r}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right), \\ \omega^\theta = \dfrac{x_1}{r}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - \dfrac{x_2}{r}\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}\right), \\ \omega^z = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}. \end{cases} \tag{3.4}$$

如果流体是轴对称流体 $u = u(r,z)$, 则

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}\partial_r u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r}\partial_r u_j, \quad \frac{\partial u_j}{\partial x_3} = \frac{\partial u_j}{\partial z}, \qquad j = 1,2,3.$$

从而

$$\begin{cases} \omega^r = \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{x_2u_1 - x_1u_2}{r}\right) = -u^\theta_{x_3}, \\ \omega^\theta = \dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{x_1u_1 + x_2u_2}{r}\right) - \dfrac{\partial u_3}{\partial r} = (u^r_{x_3} - u^z_r), \\ \omega^z = \dfrac{x_1}{r}\dfrac{\partial u^2}{\partial r} - \dfrac{x_2}{r}\dfrac{\partial u^1}{\partial r} = \dfrac{1}{r}(ru^\theta)_r. \end{cases} \tag{3.5}$$

如果 u 是轴对称无旋流体, 则 $u^\theta = 0$. $u = (u^r, 0, u^z)$ 对应的涡度场在柱坐标系下可以表示成

$$\begin{cases} \omega^r = 0, \\ \omega^\theta = (u^r_{x_3} - u^z_r), \implies \omega = (u^r_{x_3} - u^z_r)e_\theta, \\ \omega^z = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

因此

$$\begin{cases} \omega \parallel e_\theta, \quad \omega \times e_\theta = 0, \\ u \perp \omega, \quad u \cdot \omega = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

3. 场论中的常用算子在柱坐标下的表示方法

$$\begin{cases} \text{grad}a = \nabla a = \dfrac{\partial a}{\partial r}e_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a}{\partial \theta}e_\theta + \dfrac{\partial a}{\partial z}e_z, & a \text{ 是数量函数}, \\ \Delta a = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial a}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a}{\partial \theta}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(r\dfrac{\partial a}{\partial z}\right)\right), & a \text{ 是数量函数}, \\ \text{div}u = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(ru^r)}{\partial r} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial(ru^z)}{\partial z}\right), & u = u^re_r + u^\theta e_\theta + u^ze_z, \\ \text{curl}u = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u^z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial u^\theta}{\partial z}\right)e_r + \left(\dfrac{\partial u^r}{\partial z} - \dfrac{\partial u^z}{\partial r}\right)e_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(ru^\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial u^r}{\partial \theta}\right)e_z, & \\ & u = u^re_r + u^\theta e_\theta + u^ze_z, \\ u \cdot \nabla = u^r\partial_r + \dfrac{u^\theta}{r}\partial_\theta + u^z\partial_z, & u = u^re_r + u^\theta e_\theta + u^ze_z. \end{cases}$$

对于轴对称函数或轴对称无旋向量场, 上式就是

$$\begin{cases} \nabla a = \dfrac{\partial a}{\partial r}e_r + \dfrac{\partial a}{\partial z}e_z, & a = a(r,z), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \Delta a = \left[\partial_r^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r + \partial_z^2\right]a, & a = a(r,z), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \text{div}u = \partial_ru^r + \dfrac{u^r}{r} + \partial_zu^z, & u = u^r(r,z)e_r + u^z(r,z)e_z, \\ \text{curl}u = \left(\dfrac{\partial u^r}{\partial z} - \dfrac{\partial u^z}{\partial r}\right)e_\theta, & u = u^r(r,z)e_r + u^z(r,z)e_z, \\ u \cdot \nabla = u^r\partial_r + u^z\partial_z, & u = u^r(r,z)e_r + u^z(r,z)e_z. \end{cases}$$

4. 轴对称流体的几何性质

命题 3.1　设 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 是光滑的轴对称无旋向量场, 则

(1) $\omega=\nabla\times u=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 满足 $\omega\times e_\theta=(0,0,0)$. 特别, 对任意 $(x_1,x_2,z)\in\mathbb{R}^3$, 有

$$\omega_3=0,\quad x_1\omega_1(x_1,x_2,z)+x_2\omega_2(x_1,x_2,z)=0 \tag{3.8}$$

并且

$$\omega_1(x_1,0,z)=\omega_2(0,x_2,z)=0. \tag{3.9}$$

当然, 亦可推出

$$u^\theta=0\Longrightarrow x_2u_1-x_1u_2=0, u_1(0,x_2,z)=u_2(x_1,0,z)=0.$$

(2) 对任意 $q\geqslant-1$, $\Delta_q u$ 亦是轴对称无旋向量场, 并且

$$(\Delta_q u_1)(0,x_2,z)=(\Delta_q u_2)(x_1,0,z)=0. \tag{3.10}$$

证明　(1) 的证明由于 $e_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$, 从而

$$\omega=\begin{pmatrix}\sin\theta\partial_r u^z-\sin\theta\partial_3 u^r\\ \cos\theta\partial_3 u^r-\cos\theta\partial_r u^z\\ 0\end{pmatrix}=(\partial_3 u^r-\partial_r u^z)e_\theta. \tag{3.11}$$

因此

$$\begin{aligned}x_1\omega_1(x_1,x_2,z)+x_2\omega_2(x_1,x_2,z)&=r\cos\theta\omega_1+r\sin\theta\omega_2\\&=r(\partial_3 u^r-\partial_r u^z)e_r\cdot e_\theta\\&=0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

进而, 取 $x_1\neq0$, $x_2=0$, 可以推出 $\omega_1(0,x_2,z)=0$. 取 $x_1=0$, $x_2\neq0$, (3.12) 意味着 $\omega_1(x_2,0,z)=0$.

(2) 的证明　第一步. 证明 $(\Delta_q u)^\theta=0$.

根据欧氏坐标与柱坐标的关系, 它可以归结为证明

$$x_2\Delta_q u_1-x_1\Delta_q u_2=0. \tag{3.13}$$

事实上, 对 (3.13) 取 Fourier 变换可见

$$\partial_{\xi_2}\widehat{\Delta_q u_1}-\partial_{\xi_1}\widehat{\Delta_q u_2}=0.$$

因此

$$\partial_{\xi_2}\widehat{\Delta_q u_1} - \partial_{\xi_1}\widehat{\Delta_q u_2} = \varphi(2^{-q}|\xi|)(\partial_{\xi_2}\widehat{u_1} - \partial_{\xi_1}\widehat{u_2}) + 2^{-q}|\xi|^{-1}\varphi'(2^{-q}|\xi|)(\xi_2\widehat{u_1} - \xi_1\widehat{u_2}). \tag{3.14}$$

由于 $u^\theta = 0$, 它等价于 $x_1u_2 - x_2u_1 = 0$, 即

$$\partial_{\xi_1}\widehat{u_2} - \partial_{\xi_2}\widehat{u_1} = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_2}\widehat{\Delta_q u_1} - \partial_{\xi_1}\widehat{\Delta_q u_2} &= 2^{-q}|\xi|^{-1}\varphi'(2^{-q}|\xi|)(\xi_2\widehat{u_1} - \xi_1\widehat{u_2})\\ &= -2^{-q}i|\xi|^{-1}\varphi'(2^{-q}|\xi|)\widehat{\omega_3}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

第二步. 第一步的结果意味着

$$\Delta_q u = (\Delta_q u)^r e_r + (\Delta_q u)^z e_z. \tag{3.16}$$

因此, 仅需证明

$$(\Delta_q u)^r(R_\eta x) = (\Delta_q u)^r(x), \quad (\Delta_q u)^z(R_\eta x) = (\Delta_q u)^z(x),$$

这里 R_η 是以轴 Oz 旋转 η 所对应的旋转变换.

事实上, 根据 (3.16), 可见

$$(\Delta_q u)^r(x) = 2^{3q}\int_{\mathbb{R}^3} h(2^q(x-y))u^r(y)e_r(y)\cdot e_r(x)dx.$$

利用 $u^r(x)$ 的轴对称性就可以推出

$$\begin{aligned}(\Delta_q u)^r(R_\eta x) &= 2^{3q}\int_{\mathbb{R}^3} h(2^q(R_\eta x - y))\big[u^r e_r\big](y)\cdot e_r(R_\eta x)dy\\ &= 2^{3q}\int_{\mathbb{R}^3} h(2^q R_\eta(x-y))u^r(R_\eta y)e_r(R_\eta y)\cdot e_r(R_\eta x)dy\\ &= 2^{3q}\int_{\mathbb{R}^3} h(2^q(x-y))u^r(R_\eta y)e_r(y)\cdot e_r(x)dy\\ &= (\Delta_q u)^r(x).\end{aligned} \tag{3.17}$$

同理可证

$$(\Delta_q u)^z(R_\eta x) = (\Delta_q u)^z(x).$$

□

命题 3.2　考虑

$$
\begin{cases}
\partial_t\Omega + (u\cdot\nabla)\Omega = \Omega\cdot\nabla u, \\
\mathrm{div}u = 0, \\
\Omega|_{t=0} = \Omega_0.
\end{cases}
\tag{3.18}
$$

设 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^3))$ 是轴对称无旋向量场, $\Omega(t)$ 是 (3.18) 的整体光滑解, 则

(1) $\mathrm{div}\Omega_0 = 0, \Longrightarrow \mathrm{div}\Omega(t) = 0, \forall t\in\mathbb{R}^+$.

(2) $\Omega_0\times e_\theta = (0,0,0)$, 则

$$
\Omega(t)\times e_\theta = (0,0,0), \quad \forall t\in\mathbb{R}^+.
$$

进而 $\Omega_1(t,x_1,0,z) = \Omega_2(t,0,x_2,z) = 0$, 并且

$$
\partial_t\Omega + (u\cdot\nabla)\Omega = \frac{u^r}{r}\Omega.
\tag{3.19}
$$

证明　整体解的存在性、唯一性可以通过粒子轨道映射的方法获得. 事实上, 设 ψ 是与速度场 u 对应的流函数, 即

$$
\psi(t,x) = x + \int_0^t u(\tau,\psi(\tau,x))d\tau.
\tag{3.20}
$$

由于 $u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^3))$, 从而由常微分方程的适定性理论, (3.20) 存在唯一的整体解 $\psi(t,x)$. 令

$$
\widetilde{\Omega}(t,x) = \Omega(t,\psi(t,x)), \qquad A(t,\psi^{-1}(t,x)) := (\partial_j u_i)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}.
$$

(3.18) 就等价于

$$
\partial_t\widetilde{\Omega} = A(t,x)\widetilde{\Omega}.
\tag{3.21}
$$

由 Cauchy-Lipschitz 定理, (3.21) 整体可解. 因此 (3.18) 亦整体可解.

(1) 用 div 作用于方程 (3.18), 并注意到 $\mathrm{div}u = 0$, 则

$$
\partial_t\mathrm{div}\Omega + u\cdot\nabla\mathrm{div}\Omega = 0.
$$

说明 $\mathrm{div}\Omega$ 是上式自由输运方程的解. 因此, 由 $\mathrm{div}\Omega_0 = 0$ 就推出

$$
\mathrm{div}\Omega(t) = \mathrm{div}\Omega_0(\psi^{-1}(x,t)) = 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}^+.
$$

(2) 记

$$
\Omega = \Omega^r e_r + \Omega^\theta e_\theta + \Omega^z e_z \Longrightarrow \Omega^r = \Omega\cdot e_r.
$$

由 $u\cdot\nabla$ 的柱坐标形式

$$u\cdot\nabla = u^r\partial_r + \frac{1}{r}u^\theta\partial_\theta + u^z\partial_z = u^r\partial_r + u^z\partial_z, \tag{3.22}$$

就推出

$$(u\cdot\nabla)\Omega\cdot e_r = u^r\partial_r\Omega\cdot e_r + u^z\partial_z\Omega\cdot e_r = (u^r\partial_r + u^z\partial_z)(\Omega\cdot e_r) = (u\cdot\nabla)\Omega^r.$$

另一方面, 利用正交性, 直接计算

$$\begin{aligned}(\Omega\cdot\nabla u)\cdot e_r &= \Omega^r\partial_r u\cdot e_r + \frac{1}{r}\Omega^\theta\partial_\theta u\cdot e_r + \Omega^z\partial_z u\cdot e_r\\ &= \Omega^r\partial_r u^r + \Omega^z\partial_z u^r.\end{aligned}$$

用 e_r 乘以 (3.18), 可见 Ω^r 满足如下方程

$$\partial_t\Omega^r + (u\cdot\nabla)\Omega^r = \Omega^r\partial_r u^r + \Omega^z\partial_z u^r. \tag{3.23}$$

由初始条件 $\Omega_0\times e_\theta = (0,0,0)$ 知 $\Omega_0 \parallel e_\theta$. 因此

$$\Omega_0^r(x) = \Omega_0^z(x) = 0,$$

$$\|\Omega^r(t)\|_\infty \leqslant \int_0^t (\|\Omega^r(\tau)\|_\infty + \|\Omega^z(\tau)\|_\infty)\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{3.24}$$

同样的推导有

$$\partial_t\Omega^z + u\cdot\nabla\Omega^z = \Omega^z\partial_z u^z + \Omega^r\partial_r u^z, \tag{3.25}$$

$$\|\Omega^z(t)\|_\infty \leqslant \int_0^t (\|\Omega^z(\tau)\|_\infty + \|\Omega^r(\tau)\|_\infty)\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{3.26}$$

由 (3.24) 和 (3.26) 可见

$$\|\Omega^r(t)\|_\infty + \|\Omega^z(t)\|_\infty \leqslant 2\int_0^t (\|\Omega^z(\tau)\|_\infty + \|\Omega^r(\tau)\|_\infty)\|\nabla u(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{3.27}$$

因此, 根据 Gronwall 不等式, 就可以推出

$$\Omega^r(t) = \Omega^z(t) = 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}^+. \tag{3.28}$$

进而, 直接计算伸展项, 就有如下表示

$$\begin{aligned}\Omega\cdot\nabla u &= \Omega^r\partial_r u + \frac{1}{r}\Omega^\theta\partial_\theta u + \Omega^z\partial_z u\\ &= \frac{1}{r}\Omega^\theta\partial_\theta(u^r e_r + u^\theta e_\theta + u^z e_z)\\ &= \frac{1}{r}\Omega^\theta\partial_\theta(u^r e_r) = \frac{1}{r}\Omega^\theta u^r e_\theta\\ &= \frac{u^r}{r}\Omega = \frac{\Omega}{r}u^r,\end{aligned}$$

因此

$$\partial_t \Omega + (u \cdot \nabla)\Omega = \frac{u^r}{r}\Omega. \qquad \square$$

3.3.2 应用——经典结果的证明

考虑 $\mathbb{R}^3$ 上 Euler 方程的涡度形式

$$\begin{cases} (\partial_t + u \cdot \nabla)\omega = \omega \cdot \nabla u, \quad \mathrm{div} u = 0, \\ \omega|_{t=0} = \omega_0. \end{cases} \tag{3.29}$$

注意到 u 是轴对称的无旋向量场, 则

$$u = (u^r, 0, u^z), \quad \omega \cdot \nabla u = u^r \frac{\omega}{r}.$$

因此, (3.29) 中的方程可以表示成

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\omega = (\partial_t + u^r \partial_r + u_z \partial_z)\omega = u^r \frac{\omega}{r}. \tag{3.30}$$

另一方面, 注意到

$$\frac{u^r}{r}\partial_r \omega - u^r \frac{\omega}{r^2} = u^r \partial_r \left(\frac{\omega}{r}\right),$$

可以推出 $\frac{\omega}{r}$ 满足如下自由输运方程

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\left(\frac{\omega}{r}\right) = 0, \quad \frac{\omega}{r}\Big|_{t=0} = \frac{\omega_0}{r}. \tag{3.31}$$

由极值原理就得

$$\left\|\frac{\omega(t)}{r}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_p, \quad \forall 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{3.32}$$

定理 3.3 ([UY]) *设 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ 是轴对称无旋的向量场, $s > \frac{7}{2}$. 则 $\mathbb{R}^3$ 上的 Euler 方程 (E) 存在唯一整体解.*

证明 由 B-K-M 准则, 仅需建立涡度场的先验估计. 事实上, 由 (3.30) 和 (3.32) 有

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_\infty &\leqslant \|\omega_0\|_\infty + \int_0^t \|u\|_\infty \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_\infty d\tau \\ &\leqslant \|\omega_0\|_\infty + \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_\infty \int_0^t \|u\|_\infty d\tau. \end{aligned} \tag{3.33}$$

另一方面, 利用 Bernstein 估计, 容易推出

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &\leqslant \|\Delta_{-1}u\|_\infty + \sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j u\|_\infty \\ &\lesssim \|\Delta_{-1}u\|_2 + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\|\nabla\Delta_j u\|_\infty \\ &\lesssim \|u\|_2 + \sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}\|\Delta_j\omega\|_\infty \\ &\lesssim \|u_0\|_2 + \|\omega\|_\infty. \end{aligned} \tag{3.34}$$

将 (3.34) 代入 (3.33), 可见

$$\|\omega(t)\|_\infty \lesssim 1 + t + \int_0^t \|\omega(\tau)\|_\infty d\tau. \tag{3.35}$$

进而, Gronwall 不等式就意味着

$$\|\omega(t)\|_\infty \leqslant C(t) < \infty. \tag{3.36}$$

□

注记 3.1 Yudovich 证明整体适定性时要求的可积性条件是

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \omega_0(x), \frac{\omega_0}{r} \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{3.37}$$

显然, 当 $s > \dfrac{7}{2}$ 时, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ 可以保证 (3.37) 成立.

定理 3.4 ([Sh-Y]) 设 $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $s > \dfrac{5}{2}$, u_0 是散度为 0 的无旋的轴对称向量, 则 Euler 方程 (E) 存在唯一的整体解 $u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^3))$.

证明概要 第一步. 由 (3.30) 可见

$$\|\omega(t)\|_\infty \leqslant \|\omega_0\|_\infty + \int_0^t \left\|\frac{u^r}{r}\right\|_\infty \|\omega\|_\infty d\tau. \tag{3.38}$$

利用 Gronwall 不等式, 容易看出

$$\|\omega(t)\|_\infty \leqslant \|\omega_0\|_\infty e^{\int_0^t \left\|\frac{u^r}{r}\right\|_\infty d\tau}. \tag{3.39}$$

第二步. Shirota 建立了如下关键的点态估计:

$$\left|\frac{u^r}{r}\right| \lesssim \frac{1}{|\cdot|^2} * \left|\frac{\omega}{r}\right|. \tag{3.40}$$

事实上, Biot-Savart 定律给出了用涡度表示流场的精确表示式:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)\times\omega(y)}{|x-y|^3}dy.$$

引入记号

$$r \triangleq (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r' \triangleq (y_1^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x=(x_1,x_2,x_3), \quad y=(y_1,y_2,y_3).$$

注意到 $r'-r \leqslant |x-y|$, 直接验证

$$|x-y| \leqslant r \Longrightarrow r' \leqslant r+|x-y| \leqslant 2r,$$
$$|x-y| \geqslant r \Longrightarrow r'-r+r \leqslant 2|x-y|.$$

注意到 Shirota 估计 $|u^r(x)| \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} \min\left(1, \frac{r}{|x-y|}\right)\frac{|w(y)|}{|x-y|^2}dy$, $\forall x\in\mathbb{R}^d$. 利用 Biot-Savart 定律, 直接估计就得

$$\begin{aligned}
|u^r(x)| &\lesssim \int_{|y-x|\leqslant r}\frac{|\omega(t,y)|}{|x-y|^2}dy + r\int_{|y-x|\geqslant r}\frac{|\omega(t,y)|}{|x-y|^3}dy \quad \text{(Shirota 估计)}\\
&\leqslant \int_{|y-x|\leqslant r}\frac{|\omega(t,y)|}{r'}\cdot\frac{r'}{|x-y|^2}dy + r\int_{|y-x|\geqslant r}\frac{|\omega(t,y)|}{r'}\cdot\frac{r'-r+r}{|x-y|^3}dy\\
&\lesssim r\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\omega(t,y)|}{r'}\cdot\frac{1}{|x-y|^2}dy. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

即得点态估计 (3.40).

第三步. 对任意 $p<3<q$ 且 p,q 充分接近于 3, 有

$$\left\|\frac{u^r}{r}\right\|_\infty \leqslant \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L^p\cap L^q} = \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^p\cap L^q}. \qquad (3.42)$$

事实上

$$\frac{1}{|x|^2}*\left|\frac{\omega}{r}\right| = \frac{1}{|x|^2}\chi_{|x|\leqslant 1}(x)*\left|\frac{\omega}{r}\right| + \frac{1}{|x|^2}\chi_{|x|\geqslant 1}(x)*\left|\frac{\omega}{r}\right|,$$

从而

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u^r}{r}\right\|_\infty &\leqslant \left\|\frac{1}{|x|^2}\chi_{|x|\leqslant 1}(x)\right\|_{q'}\left\|\frac{\omega}{r}\right\|_q + \left\|\frac{1}{|x|^2}\chi_{|x|\geqslant 1}(x)\right\|_{p'}\left\|\frac{\omega}{r}\right\|_p\\
&\leqslant \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L^p\cap L^q} = \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^p\cap L^q} < \infty.
\end{aligned}$$

□

注记 3.2　注意到对任意 $p<3<q$ 且 p,q 充分接近于 3, 由 Hardy 不等式有

$$\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^p\cap L^q} \leqslant \|\nabla\omega_0\|_{L^p\cap L^q} \leqslant \|\omega_0\|_{H^{s-1}} \leqslant \|u_0\|_{H^s}, \qquad (3.43)$$

此处要求

$$s-1-\frac{3}{2} > 1-\frac{3}{p} \Longleftrightarrow s > \frac{5}{2}.$$

定理 3.5 (Yudovich 定理的推广形式 [Dan7]) 设 $u_0(x)$ 是具有旋度 $\omega^0(x)e_\theta$ 的轴对称无旋的向量场, 初始旋度满足

$$\omega_0(x) \in L^\infty \cap L^{3,1}(\mathbb{R}^3), \quad \frac{\omega_0}{r} \in L^{3,1}(\mathbb{R}^3).$$

则 Euler 方程 (E) 存在唯一的整体解 $u \in C_w(\mathbb{R}; \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d))$, $p(x) \in C(\mathbb{R}; C^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^d))$, $\forall \varepsilon > 0$, 且满足

$$\omega \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L^{3,1}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad \left\|\frac{\omega(t)}{r}\right\|_{L^{3,1}} = \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}}.$$

这里 $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d))$ 是 Zygmund 空间.

证明概要 完全类同于 Shirota-Yanagisawa 的证明过程, 利用

$$\frac{1}{|x|^2} \in L^{\frac{3}{2},\infty}$$

及 Sobolev-Young 不等式

$$\left\|\frac{u^r}{r}\right\|_\infty \leqslant \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)} \left\|\frac{1}{r^2}\right\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} \lesssim \left\|\frac{\omega}{r}\right\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)} \lesssim \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)}, \tag{3.44}$$

就得定理 3.5. 这里用到

$$\left\|\frac{\omega(t)}{r}\right\|_{L^p} = \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^p}, \qquad [L^{p_0}, L^{p_1}]_{(\theta,1)} = L^{p,1}.$$

□

注记 3.3 (i) Lorentz 空间的定义 (分布表示)

$$L^{p,q}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \big| \|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)} < \infty \right\},$$

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 1 \leqslant q < \infty, \\ \sup\limits_t t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & q = \infty. \end{cases} \tag{3.45}$$

(ii) Lorentz 空间的插值表示

$$L^{p,q}(\mathbb{R}^d) = (L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta,q}, \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{3.46}$$

(iii)

$$B^{\frac{d}{p}-1}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{d,1}(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leqslant p < d. \tag{3.47}$$

事实上, 取 $1 \leqslant p < d \leqslant r \leqslant \infty$, 由 Sobolev 嵌入定理可见

$$B^{\frac{d}{p}-\frac{d}{r}}_{p,1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^0_{r,1} \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d), \qquad B^0_{p,1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d).$$

因此

$$\left[B_{p,1}^{\frac{d}{p}-\frac{d}{r}}(\mathbb{R}^d), B_{p,1}^0(\mathbb{R}^d)\right]_\theta \hookrightarrow [L^r(\mathbb{R}^d), L^p(\mathbb{R}^d)]_{\theta,1},$$

其中

$$\frac{1}{d} = \frac{\theta}{r} + \frac{1-\theta}{p}.$$

从而

$$B_{p,1}^{\theta(\frac{d}{p}-\frac{d}{r})}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{d,1}(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leqslant p < d.$$

故

$$B_{p,1}^{\frac{d}{p}-1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{d,1}(\mathbb{R}^d). \tag{3.48}$$

(iv) 对于 $1 \leqslant p < 3$, 有

$$\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\nabla\omega_0\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\nabla\omega_0\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|u_0\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}(\mathbb{R}^3)}. \tag{3.49}$$

事实上, 根据 Sobolev 嵌入

$$B_{p,1}^{\frac{3}{p}} \hookrightarrow B_{\infty,1}^0 \hookrightarrow C^0, \tag{3.50}$$

说明 ω 是光滑向量场. 由 (3.9) 式可见

$$\omega_0(0,0,z) = 0. \tag{3.51}$$

由标准的正则化技术, 无妨设 ω 充分光滑, 这样

$$\omega_0(x_1,x_2,z) = \int_0^1 (x_1\partial_{x_1}\omega_0(\tau x_1,x_2,z) + x_2\partial_{x_2}\omega(0,\tau x_2,z))d\tau. \tag{3.52}$$

由 Lorentz 空间的伸缩变换, 可以推出

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)} &\lesssim \int_0^1 \|\nabla\omega_0(\tau\cdot,\tau\cdot,\cdot)\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)}d\tau \\ &\lesssim \|\nabla\omega_0\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)}\int_0^1 \tau^{-\frac{2}{3}}d\tau \\ &\lesssim \|\nabla\omega_0\|_{L^{3,1}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned} \tag{3.53}$$

根据广义的 Hardy 不等式 (3.49), 定理 3.5 意味着当 $1 \leqslant p < 3$ 时, (E) 具有整体解, 即 $u \in C_w(\mathbb{R}; \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d))$, $p(x) \in C(\mathbb{R}; C^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^d))$, $\forall\varepsilon > 0$, 且满足

$$\omega \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^{3,1}(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad \left\|\frac{\omega(t)}{r}\right\|_{L^{3,1}} = \left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}}.$$

其意义在于无需假设 $\frac{\omega_0}{r} \in L^{3,1}$ 的条件, 但是否意味着 (E) 在临界空间 $B_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}$ $(1 \leqslant p \leqslant 3)$ 整体适定, 即

$$u_0(x) \in B_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3) \Longrightarrow u(t) \in C(\mathbb{R}^+; B_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)), \quad 1 \leqslant p \leqslant 3,$$

是一个正则性问题. 进而, 还有如下进一步的问题:

问题 能否在 $B_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)(3 \leqslant p \leqslant \infty)$ 中建立轴对称 Euler 方程 (E) 的整体适定性? 下面考虑解决这个问题.

3.3.3 临界空间 $B_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)$ 中的整体适定性

定理 3.6 ([AHK]) 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $u_0(x)$ 是轴对称无旋的自由散度向量场, 满足

$$u_0(x) \in B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}(\mathbb{R}^3), \quad \frac{\omega_0}{r} \in L^{3,1}(\mathbb{R}^3). \tag{3.54}$$

则 Euler 方程 (E) 存在唯一的整体解

$$u(t) \in C(\mathbb{R}^+; B_{p,1}^{1+\frac{3}{p}}(\mathbb{R}^3)). \tag{3.55}$$

注记 3.4 (1) 当 $p < 3$ 时, 由于 Sobolev 嵌入定理可见

$$\nabla u_0 \in B_{p,1}^{\frac{3}{p}} \Longrightarrow \frac{\omega_0}{r} \in B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{3,1}(\mathbb{R}^3)$$

及

$$\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}} \leqslant \|\nabla\omega_0\|_{L^{3,1}} \leqslant \|\nabla\omega_0\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}} \leqslant \|\nabla u_0\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}}}.$$

故条件 (3.54) 可简化成 $u_0(x) \in B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}(\mathbb{R}^3)(1 \leqslant p < 3)$.

(2) 当 $p \geqslant 3$ 时, 方程 (E) 去掉 $\frac{\omega_0}{r} \in L^{3,1}(\mathbb{R}^3)$ 是一个公开问题!

证明 注意在临界空间 $B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}(\mathbb{R}^3)$ 中, Beale-Kato-Majda 型 Blow-up 准则失效, 因此需要建立更细致的估计. 换言之, 需要建立如下形式的估计:

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} + \|u(t)\|_{B^1_{\infty,1}} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0 t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \tag{3.56}$$

$$\|u(t)\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}} \leqslant C_0 e^{e^{\exp(C_0 t)}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.57}$$

为此, 我们分下面几步来进行:

第一步. 流场与涡度场的点态先验估计.

命题 3.7 设 $u(t)$ 是 (E) 的轴对称无旋的整体解, 则对 $t \in \mathbb{R}^+$, 有如下估计:

(i) Biot-Savart 定律:

$$\left\|\frac{u^r(t)}{r}\right\|_\infty \leqslant \left\|\frac{\omega_0(x)}{r}\right\|_{L^{3,1}}. \tag{3.58}$$

(ii) 涡度场的估计:

$$\|\omega(t)\|_\infty \lesssim \|\omega_0\|_\infty e^{Ct\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}}}. \tag{3.59}$$

(iii) 速度场的估计:

$$\|u(t)\|_\infty \lesssim (\|u_0\|_\infty + \|\omega_0\|_\infty) e^{\exp\left(Ct\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}}\right)}. \tag{3.60}$$

证明　(i) 根据

$$\left|\frac{u^r}{r}\right| \leqslant \frac{1}{|\cdot|^2} * \left|\frac{\omega}{r}\right|, \qquad \frac{1}{|x|^2} \in L^{\frac{3}{2},\infty}$$

及

$$\partial_t\left(\frac{\omega}{r}\right) + u\cdot\nabla\left(\frac{\omega}{r}\right) = 0,$$

利用广义 Young 不等式就得

$$\left\|\frac{u^r(t)}{r}\right\|_\infty \lesssim \left\|\frac{\omega(t)}{r}\right\|_{L^{3,1}} \lesssim \left\|\frac{\omega_0(x)}{r}\right\|_{L^{3,1}}.$$

(ii) 由 ω 满足方程

$$\partial_t\omega + (u\cdot\nabla)\omega = \frac{u^r}{r}\omega,$$

可见

$$\|\omega(t)\|_\infty \leqslant \|\omega_0\|_\infty + \int_0^t \left\|\frac{u^r}{r}\right\|_\infty \|\omega\|_\infty d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式及估计 (3.58), 容易推出

$$\|\omega(t)\|_\infty \lesssim \|\omega_0\|_\infty e^{Ct\left\|\frac{\omega_0}{r}\right\|_{L^{3,1}}}.$$

(iii) 采用 Serfati 关于速度场的估计技术 (已用过多次),

$$\|u(t)\|_\infty \leqslant \|\dot{S}_{-N}u\|_\infty + \sum_{q\geqslant -N}\|\dot{\Delta}_q u\|_\infty, \tag{3.61}$$

其中 N 待定正整数. 由 Bernstein 估计可见

$$\sum_{q\geqslant -N}\|\dot{\Delta}_q u\|_\infty = \sum_{q\geqslant -N} 2^{-q}2^q\|\dot{\Delta}_q u\|_\infty \lesssim 2^N\|\omega\|_\infty. \tag{3.62}$$

另一方面, 用低频算子 $\dot{S}_{-N}$ 作用于积分方程两边, 可见

$$
\begin{aligned}
\|\dot{S}_{-N}u\|_\infty &\leqslant \|\dot{S}_{-N}u_0\|_\infty + \int_0^t \|\dot{S}_{-N}(\mathbb{P}((u\cdot\nabla)u))\|_\infty d\tau \\
&\lesssim \|u_0\|_\infty + \sum_{j\leqslant -N}\int_0^t \|\dot{\Delta}_j(\mathbb{P}((u\cdot\nabla)u))\|_\infty d\tau \\
&\lesssim \|u_0\|_\infty + 2^{-N}\int_0^t \|u\|_\infty^2 d\tau.
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

将 (3.62), (3.63) 代入 (3.61), 可见

$$
\|u\|_\infty \lesssim \|u_0\|_\infty + 2^N\|\omega(t)\|_\infty + 2^{-N}\int_0^t \|u\|_\infty^2 d\tau. \tag{3.64}
$$

选取

$$
2^{2N} \approx 1 + \|\omega(t)\|_\infty^{-1}\int_0^t \|u\|_\infty^2 d\tau,
$$

就推出

$$
\|u\|_\infty^2 \lesssim \|u_0\|_\infty^2 + \|\omega\|_\infty^2 + \|\omega\|_\infty \int_0^t \|u(\tau)\|_\infty^2 d\tau.
$$

因此

$$
\|u(t)\|_\infty^2 \leqslant C(\|u_0\|_\infty^2 + \|\omega\|_\infty^2)e^{C\|\omega\|_\infty t}.
$$

从而

$$
\|u(t)\|_\infty \leqslant C(\|u_0\|_\infty + \|\omega_0\|_\infty)e^{\exp(Ct\|\frac{\omega_0}{r}\|_{L^{3,1}})}. \tag{3.65}
$$

□

第二步. 涡度场 ω 新分解公式.

命题 3.8 *存在涡度场 ω 的一个分解 $\{\widetilde{\omega}_q\}_{q=-1}^\infty$, 满足*

(i) $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\omega(t) = \sum_{q\geqslant -1}\widetilde{\omega}_q(x,t)$.

(ii) $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{div}\widetilde{\omega}_q(x,t) = 0$.

(iii) $\forall q\geqslant -1$, *有* $\|\widetilde{\omega}_q\|_\infty \lesssim \|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{Ct\|\frac{\omega_0}{r}\|_{L^{3,1}}}$.

(iv) *对* $j,q\geqslant -1$, *成立*

$$
\|\Delta_j\widetilde{\omega}_q(x,t)\|_\infty \leqslant C2^{-|j-q|}e^{CU(t)}\|\Delta_q\omega_0\|_\infty, \tag{3.66}
$$

这里

$$
U(t) = \|u\|_{L_t^1 B_{\infty,1}^1}.
$$

我们留在最后证明这一命题.

第三步. 定理的证明. 利用第 2 章建立的输运方程解在 Besov 空间的保持正则性, 即

引理 3.9 设 $s \in (-1,1)$, $1 \leqslant p,r \leqslant \infty$, u 是满足 $\mathrm{div} u = 0$ 的光滑向量场. 设 f 是如下输运方程:

$$\begin{cases} \partial_t f + (u \cdot \nabla) f = g, \quad g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^s_{p,r}(\mathbb{R}^3)), \\ f|_{t=0} = f_0 \in B^s_{p,r}(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{3.67}$$

的光滑解, 则

$$\|f(t)\|_{L^\infty_t B^s_{p,r}} \leqslant Ce^{CU_1(t)}\Big(\|f_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-CU_1(\tau)}\|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\Big), \tag{3.68}$$

这里

$$U_1(t) = \int_0^t \|\nabla u\|_\infty d\tau.$$

进而, 对于端点情形

$$s = -1, \quad r = \infty, \quad p \in [1,\infty], \quad \text{或 } s = 1, \quad r = 1, \quad p \in [1,\infty]$$

均有估计

$$\|f(t)\|_{L^\infty_t B^s_{p,r}} \leqslant Ce^{CU(t)}\Big(\|f_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-CU(\tau)}\|g(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\Big), \tag{3.69}$$

这里

$$U(t) = \int_0^t \|u\|_{B^1_{\infty,1}} d\tau = \|u\|_{L^1_t B^1_{\infty,1}}. \tag{3.70}$$

(3.56) 的证明 取 N 是待定常数, 由涡度 ω 的新的分解公式

$$\omega = \sum_{q \geqslant -1} \widetilde{\omega}_q(x,t),$$

可以推出

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} &\leqslant \sum_j \Big\|\Delta_j \sum_{q\geqslant -1} \widetilde{\omega}_q(x,t)\Big\|_\infty \\ &= \sum_{|j-q|\geqslant N} \|\Delta_j \widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty + \sum_{|j-q|\leqslant N} \|\Delta_j \widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty \\ &= I + II. \end{aligned} \tag{3.71}$$

利用渐近几乎正交原理 (见第二步, 涡度分解)

$$I \lesssim \sum_{|j-q|\geqslant N} 2^{-|j-q|} e^{CU(t)} \|\Delta_q \omega_0\|_\infty \lesssim 2^{-N} e^{CU(t)} \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}. \tag{3.72}$$

由命题 3.8(iii), 可见

$$II \lesssim \sum_{|j-q|\leqslant N} \|\widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty \lesssim \sum_{|j-q|\leqslant N} \|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{Ct\|\frac{\omega_0}{r}\|_{L^{3,1}}}$$
$$\lesssim e^{C_0t} \sum_{|j-q|\leqslant N} \|\Delta_q\omega_0\|_\infty \lesssim e^{C_0t}N\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}. \tag{3.73}$$

因此

$$\|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim (2^{-N}e^{CU(t)} + Ne^{C_0t})\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}. \tag{3.74}$$

取

$$N = [CU(t)] + 1,$$

可得

$$\|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim C(CU(t)+1)e^{C_0t}. \tag{3.75}$$

另一方面

$$\|u(t)\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|u\|_\infty + \|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim C_0e^{\exp C_0t} + C_0e^{C_0t}\int_0^t \|u\|_{B^1_{\infty,1}}d\tau. \tag{3.76}$$

由 Gronwall 不等式, 即可推出

$$\|u\|_{B^1_{\infty,1}} \leqslant C_0e^{\exp C_0t} \Longrightarrow \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant C_0e^{\exp C_0t}. \tag{3.77}$$

(3.57) 的证明 应用经典的时空估计于涡度形式的方程, 可见

$$e^{-CU_1(t)}\|\omega(t)\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} \leqslant \|\omega_0\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} + \int_0^t e^{-CU_1(\tau)}\|\omega\cdot\nabla u\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}}d\tau. \tag{3.78}$$

注意, 当 $\omega = \mathrm{curl}u$ 时,

$$\|\omega\cdot\nabla u\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} \lesssim \|\nabla u\|_\infty\|\omega\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}}. \tag{3.79}$$

因此

$$e^{-CU_1(t)}\|\omega(t)\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} \leqslant \|\omega_0\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} + \int_0^t e^{-CU_1(\tau)}\|\omega\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}}\|\nabla u\|_\infty d\tau. \tag{3.80}$$

利用 Gronwall 不等式, 容易推出

$$\|\omega(t)\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} \leqslant \|\omega_0\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}} e^{C\int_0^t\|\nabla u\|_\infty d\tau} \leqslant C_0e^{e^{\exp(C_0t)}}. \tag{3.81}$$

下面利用标准的高低频分解来估计 $\|u\|_{B^{1+\frac{3}{p}}_{p,1}}$:

$$\|u\|_{B^{1+\frac{3}{p}}_{p,1}} \lesssim \|\Delta_{-1}u\|_p + \sum_{q\in\mathbb{N}} 2^{q\frac{3}{p}} 2^q \|\Delta_q u\|_p \lesssim \|u(t)\|_p + \|\omega(t)\|_{B^{\frac{3}{p}}_{p,1}}. \tag{3.82}$$

关键是估计 $\|u(t)\|_p$. 对于 $1 < p < \infty$, 由 Riesz 变换在 L^p 上有界性可见

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_p &\lesssim \|u_0\|_p + C\int_0^t \|u\cdot\nabla u\|_p d\tau \\ &\lesssim \|u_0\|_p + C\int_0^t \|u\|_p \|\nabla u\|_\infty d\tau.\end{aligned}$$

于是, Gronwall 不等式就意味着

$$\|u(t)\|_p \leqslant \|u_0\|_p e^{\int_0^t \|\nabla u\|_\infty d\tau} \leqslant C_0 e^{e^{\exp(C_0 t)}}. \tag{3.83}$$

将 (3.81) 与 (3.83) 代入 (3.82), 就得估计 (3.57).

最后, 考虑 $p = 1$ 的情形. 直接验证

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^1} &\leqslant \|\dot{S}_0 u(t)\|_{L^1} + \sum_{q\geqslant 0} \|\dot{\Delta}_q u\|_{L^1} \\ &\leqslant \|\dot{S}_0 u(t)\|_{L^1} + \sum_{q\geqslant 0} 2^{-q} \|\dot{\Delta}_q \nabla u\|_{L^1} \\ &\leqslant \|\dot{S}_0 u(t)\|_{L^1} + \|\omega\|_{L^1}.\end{aligned}$$

从方程

$$\partial_t\omega + (u\cdot\nabla)\omega - \omega\cdot\nabla u = 0,$$

直接推出

$$\|\omega(t)\|_{L^1} \leqslant \|\omega_0\|_{L^1} e^{\int_0^t \|\nabla u\|_\infty d\tau}. \tag{3.84}$$

另一方面, 用 $\dot{S}_0$ 作用 Euler 方程 (E) 的两边, 可见

$$\begin{aligned}\|\dot{S}_0 u(t)\|_{L^1} &\lesssim \|\dot{S}_0 u_0\|_{L^1} + \int_0^t \sum_{q\leqslant -1} \|\dot{\Delta}_q \mathbb{P}(u\cdot\nabla)u(\tau)\|_{L^1} d\tau \\ &\lesssim \|u_0\|_{L^1} + \sum_{q\leqslant -1} \int_0^t 2^q \|\dot{\Delta}_q (u\otimes u)\|_{L^1} d\tau \\ &\lesssim \|u_0\|_{L^1} + \sum_{q\leqslant -1} 2^q \int_0^t \|u(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \\ &\lesssim \|u_0\|_{L^1} + t\|u_0\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

从而

$$\|u(t)\|_{L^1} \leqslant C_0 e^{e^{\exp(C_0 t)}}.$$

□

命题 3.8 的证明 对任意 $q \geqslant -1$, 记 $\widetilde{\omega}_q$ 是如下线性输运方程:

$$\begin{cases} (\partial_t + u\cdot\nabla)\widetilde{\omega}_q = \widetilde{\omega}_q \cdot \nabla u, \\ \widetilde{\omega}_q|_{t=0} = \Delta_q \omega_0 \end{cases} \tag{3.85}$$

的唯一解. 由于

$$\mathrm{div}\Delta_q \omega_0 = 0,$$

则根据命题 3.2 知 $\mathrm{div}\widetilde{\omega}_q = 0$.

另一方面, 利用方程 (3.85) 是线性方程的特点及解的唯一性知

$$\omega(x,t) = \sum_{q\geqslant -1} \widetilde{\omega}_q(x,t). \tag{3.86}$$

由于 $\Delta_q\omega_0 = \mathrm{curl}\Delta_q u_0$, $\Delta_q u_0$ 是轴对称无旋向量场, 说明

$$\Delta_q \omega_0 \times e_\theta = 0.$$

从命题 3.2 就可以推出 $\widetilde{\omega}_q(t)\times e_\theta = (0,0,0)$ 且满足

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{\omega}_q + (u\cdot\nabla)\widetilde{\omega}_q = \dfrac{u^r}{r}\widetilde{\omega}_q, \\ \widetilde{\omega}_q|_{t=0} = \Delta_q \omega_0. \end{cases} \tag{3.87}$$

利用极值原理与涡度先验估计, 推出

$$\|\widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty \leqslant \|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{\int_0^t \|\frac{u^r(t)}{r}\|_\infty d\tau} \leqslant \|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{Ct\|\frac{\omega_0}{r}\|_{L^{3,1}}}.$$

最后, 证明具衰减性特征的几乎正交原理 (3.66). 容易看出, (3.66) 可以归结于证明

$$\|\Delta_j \widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty \leqslant C2^{j-q} e^{CU(t)} \|\Delta_q\omega_0\|_\infty, \tag{3.88}$$

$$\|\Delta_j \widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty \leqslant C2^{q-j} e^{CU(t)} \|\Delta_q\omega_0\|_\infty. \tag{3.89}$$

(3.88) 的证明 应用引理 3.9 中基本的线性估计于方程 (3.85), 就得

$$e^{-CU(t)}\|\widetilde{\omega}_q(t)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}} \lesssim \|\Delta_q\omega_0\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}} + \int_0^t e^{-CU(\tau)}\|\widetilde{\omega}_q\cdot\nabla u(\tau)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}} d\tau. \tag{3.90}$$

由 Bony 的仿积分解

$$\|\widetilde{\omega}_q\cdot\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\leqslant\|T_{\widetilde{\omega}_q}\cdot\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}+\|T_{\nabla u}\cdot\widetilde{\omega}_q\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}+\|R(\widetilde{\omega}_q\cdot\nabla,u)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}.$$

注意到

$$T_{\widetilde{\omega}_q}\cdot\nabla u=\sum_j S_{j-1}\widetilde{\omega}_q\cdot\Delta_j\nabla u,\quad T_{\nabla u}\cdot\widetilde{\omega}_q=\sum_j S_{j-1}\nabla u\cdot\Delta_j\widetilde{\omega}_q,$$

且

$$\mathrm{supp}\mathcal{F}\Big[S_{j-1}\widetilde{\omega}_q\cdot\Delta_j\nabla u\Big]\subset C'_j,\quad \mathrm{supp}\mathcal{F}\Big[S_{j-1}\nabla u\cdot\Delta_j\widetilde{\omega}_q\Big]\subset C'_j.$$

则利用 Besov 空间的等价范数及 Sobolev 嵌入 $B^{-1}_{\infty,1}\hookrightarrow B^{-1}_{\infty,\infty}$, 容易推出

$$\begin{aligned}\|T_{\widetilde{\omega}_q}\cdot\nabla u\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}&\leqslant\sum_{j\geqslant-1}2^{-j}\|S_{j-1}\widetilde{\omega}_q\cdot\Delta_j\nabla u\|_\infty\\&\leqslant\sum_{j\geqslant-1}2^{-j}\|S_{j-1}\widetilde{\omega}_q\|_\infty\|\nabla u\|_\infty\\&=\|\widetilde{\omega}_q\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\|\nabla u\|_\infty,\\ \|T_{\nabla u}\cdot\widetilde{\omega}_q\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}&\leqslant\sum_{j\geqslant-1}2^{-j}\|S_{j-1}\nabla u\cdot\Delta_j\widetilde{\omega}_q\|_\infty\\&\leqslant\|\nabla u\|_\infty\sum_{j\geqslant-1}2^{-j}\|\Delta_j\widetilde{\omega}_q\|_\infty\\&\leqslant\|\widetilde{\omega}_q\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\|\nabla u\|_\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|R(\widetilde{\omega}_q\cdot\nabla,u)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}&=\|\mathrm{div}R(\widetilde{\omega}_q\otimes,u)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\\&\leqslant\sup_k 2^{-k}\Big\|\Delta_k\mathrm{div}\sum_j(\Delta_j\widetilde{\omega}_q\otimes\widetilde{\Delta}_j u)\Big\|_\infty\\&\leqslant\sup_k\Big\|\Delta_k\sum_j\Delta_j\widetilde{\omega}_q\otimes\widetilde{\Delta}_j u\Big\|_\infty\\&\leqslant\sup_k\sum_{j\geqslant k-3}\|\Delta_j\widetilde{\omega}_q\|_\infty\|\widetilde{\Delta}_j u\|_\infty\\&\leqslant\|\widetilde{\omega}_q\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\|u\|_{B^1_{\infty,1}}.\end{aligned}$$

因此, 将上面的估计代入 (3.90), 就得

$$e^{-CU(t)}\|\widetilde{\omega}_q(t)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\lesssim\|\Delta_q\omega_0\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}+\int_0^t\|u(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}}e^{-CU(\tau)}\|\widetilde{\omega}_q\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}d\tau.\quad(3.91)$$

由 Gronwall 不等式, 直接推出

$$\|\widetilde{\omega}_q(t)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\leqslant C\|\Delta_q\omega_0\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}e^{CU(t)}.\quad(3.92)$$

由于 $\Delta_q\Delta_j\omega_0=0$, $|q-j|\geqslant 2$, 可见

$$\|\widetilde{\omega}_q(t)\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}\leqslant C2^{-q}\|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{CU(t)},$$

即

$$\sup_j 2^{-j}\|\Delta_j\widetilde{\omega}_q\|_\infty\leqslant C2^{-q}\|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{CU(t)}. \tag{3.93}$$

因此

$$\|\Delta_j\widetilde{\omega}_q(t)\|_\infty\leqslant C2^{j-q}\|\Delta_q\omega_0\|_\infty e^{CU(t)}. \tag{3.94}$$

下面仅需证明 $q\leqslant j$ 的情形, 即证明 (3.89). 由于

$$\widetilde{\omega}_q(t)\times e_\theta=(0,0,0)\Longrightarrow\widetilde{\omega}_q\parallel e_\theta.$$

在 Cartesican 坐标系下,

$$\widetilde{\omega}_q(t)=(\widetilde{\omega}_q^{(1)},\widetilde{\omega}_q^{(2)},0).$$

下面仅需估计 $\widetilde{\omega}_q^{(1)}$, 另一个 $\widetilde{\omega}_q^{(2)}$ 的估计方法完全一样.

注意到 $u^\theta=0$, 从而

$$u=\Big(\frac{x_1}{r}u^r-\frac{x_2}{r}u^\theta,\frac{x_2}{r}u^r+\frac{x_1}{r}u^\theta,u^z\Big)\Longrightarrow\frac{u^r}{r}=\frac{u^{(1)}}{x_1}=\frac{u^{(2)}}{x_2}. \tag{3.95}$$

因此, $\widetilde{\omega}_q^{(1)}$ 满足如下方程

$$\begin{cases}\partial_t\widetilde{\omega}_q^{(1)}+(u\cdot\nabla)\widetilde{\omega}_q^{(1)}=\dfrac{u^{(2)}}{x_2}\widetilde{\omega}_q^{(1)},\\ \widetilde{\omega}_q^{(1)}|_{t=0}=\Delta_q\omega_0^1.\end{cases} \tag{3.96}$$

不幸的是, 输运方程在 Besov 空间中的正则性保持结果在端点 $s=1$ 处, 要求 $r=1$ 才能使用! 因此, $B^1_{\infty,\infty}$ 是不行的, 这就要求我们在 $B^1_{\infty,1}$ 中进行估计, 克服线性估计缺乏而带来的困难!

应用输运方程在 Besov 空间中的正则性, 可见

$$e^{-CU(t)}\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\|_{B^1_{\infty,1}}\lesssim\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(0)\|_{B^1_{\infty,1}}+\int_0^t e^{-CU(\tau)}\Big\|u^{(2)}\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}(\tau)\Big\|_{B^1_{\infty,1}}d\tau. \tag{3.97}$$

利用 Bony 的仿积分解, 就得

$$\Big\|u^{(2)}\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^1_{\infty,1}}\leqslant\Big\|T_{\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}}u^{(2)}\Big\|_{B^1_{\infty,1}}+\Big\|T_{u^{(2)}}\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^1_{\infty,1}}+\Big\|R(u^{(2)},\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2})\Big\|_{B^1_{\infty,1}}. \tag{3.98}$$

利用 Besov 空间的等价范数的定义, 直接估计就有

$$\left\|T_{\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}} u^{(2)}\right\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \sum_j 2^j \left\|S_{j-1}\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\right\|_\infty \|\Delta_j u^{(2)}\|_\infty \lesssim \left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\right\|_\infty \|u\|_{B^1_{\infty,1}}, \tag{3.99}$$

及

$$\begin{aligned}\left\|R\Big(u^{(2)}, \frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\right\|_{B^1_{\infty,1}} &\lesssim \sum_j 2^j \left\|\Delta_j\Big(\Delta_k u^{(2)} \widetilde{\Delta}_k\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\Big)\right\|_\infty \\ &\lesssim \sum_{k\geqslant j-3} 2^j \|\Delta_k u^{(2)}\|_\infty \left\|\widetilde{\Delta}_k\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\right\|_\infty \\ &\lesssim \sum_{k\geqslant j-3} 2^{j-k} 2^k \|\Delta_k u^{(2)}\|_\infty \left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\right\|_\infty \\ &\lesssim \left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\right\|_\infty \|u\|_{B^1_{\infty,1}}.\end{aligned} \tag{3.100}$$

$\left\|T_{u^{(2)}} \frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\right\|_{B^1_{\infty,1}}$ 的估计需要一些技术, 特别是向量场的轴对称性质.

$$\left\|T_{u^{(2)}} \frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\right\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \sum_j 2^j \left\|S_{j-1} u^{(2)} \Delta_j \Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\right\|_\infty. \tag{3.101}$$

考虑

$$\begin{aligned}S_{j-1} u^{(2)}(x) \Delta_j\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big) &= S_{j-1}u^{(2)}(x)\Delta_j \widetilde{\omega}_q^{(1)}/x_2 + S_{j-1}u^{(2)}(x)\Big[\Delta_j, \frac{1}{x_2}\Big]\widetilde{\omega}_q^{(1)} \\ &:= I_j(x) + II_j(x).\end{aligned} \tag{3.102}$$

由于 $S_{j-1}u$ 是轴对称的, 则由几何结构条件知

$$S_{j-1}u^{(2)}(x_1, 0, z) = 0. \tag{3.103}$$

由 Taylor 公式, 可见

$$\begin{aligned}\|I_j\|_\infty &\lesssim \left\|\frac{S_{j-1}u^{(2)}(x_1,x_2,z) - S_{j-1}u^{(2)}(x_1,0,z)}{x_2}\right\|_\infty \|\Delta_j \widetilde{\omega}_q^{(1)}(x)\|_\infty \\ &\lesssim \|\nabla u\|_\infty \|\Delta_j \widetilde{\omega}_q^{(1)}(x)\|_\infty.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_j 2^j \|I_j\|_\infty \lesssim \|\nabla u\|_\infty \|\widetilde{\omega}_q^{(1)}\|_{B^1_{\infty,1}}. \tag{3.104}$$

II_j 的估计. 在物理空间中, 表示公式 $II_j(x)$ 就是

$$\begin{aligned} II_j(x) &= S_{j-1}u^{(2)}(x)/x_2 2^{3j}\int_{\mathbb{R}^3} h(2^j(x-y))(x_2-y_2)\widetilde{\omega}_q^{(1)}(y)/y_2 dy \\ &= 2^{-j}\Big(\frac{S_{j-1}u^{(2)}(x)}{x_2}\Big)2^{3j}\widetilde{h}(2^j\cdot)*\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{y_2}\Big)(x), \quad \widetilde{h}=x_2h(x). \end{aligned} \tag{3.105}$$

易见

$$2^{3j}\widetilde{h}(2^j\cdot)*f=\sum_{|j-k|\leqslant 1}2^{3j}\widetilde{h}(2^j\cdot)*\Delta_k f.$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^j\|II_j\|_\infty &\lesssim \sum_{|j-k|\leqslant 1}\Big\|\frac{S_{j-1}u^{(2)}}{x_2}\Big\|_\infty\Big\|\Delta_k\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\Big\|_\infty \\ &\lesssim \sum_{|j-k|\leqslant 1}\Big\|\frac{S_{j-1}u^{(2)}(x_1,x_2,z)-S_{j-1}u^{(2)}(x_1,0,z)}{x_2}\Big\|_\infty\Big\|\Delta_k\Big(\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big)\Big\|_\infty \\ &\lesssim \|\nabla u\|_\infty\Big\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^0_{\infty,1}}. \end{aligned} \tag{3.106}$$

由 (3.104) 和 (3.106), 容易推出

$$\Big\|T_{u^{(2)}}\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\nabla u\|_\infty\Big(\big\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}\big\|_{B^1_{\infty,1}}+\Big\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^0_{\infty,1}}\Big). \tag{3.107}$$

结合 (3.99), (3.100) 和 (3.107), 就得

$$\Big\|u^{(2)}\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim \|u\|_{B^1_{\infty,1}}\Big(\big\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}\big\|_{B^1_{\infty,1}}+\Big\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big\|_{B^0_{\infty,1}}\Big). \tag{3.108}$$

因此, 将上式代入 (3.97) 式, 可见

$$\begin{aligned} e^{-CU(t)}\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\|_{B^1_{\infty,1}} \lesssim{}& \|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(0)\|_{B^1_{\infty,1}} + \int_0^t e^{-CU(\tau)}\|u(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}}\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}}d\tau \\ &+\int_0^t e^{-CU(\tau)}\|u(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}}\Big\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}(\tau)}{x_2}\Big\|_{B^0_{\infty,1}}d\tau. \end{aligned} \tag{3.109}$$

另外, 由于 $\dfrac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}$ 满足

$$\begin{cases} (\partial_t+u\cdot\nabla)\dfrac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}=0, \\ \dfrac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}}{x_2}\Big|_{t=0}=\dfrac{\Delta_q\omega_0^1}{x_2}, \end{cases} \tag{3.110}$$

因此

$$\left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant \left\|\frac{\Delta_q\omega_0^1}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}} e^{CU(t)}. \tag{3.111}$$

由 (3.109) 和 (3.111), 容易看出

$$\begin{aligned}
&e^{-CU(t)}\left[\left\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\right\|_{B^1_{\infty,1}} + \left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}}\right] \\
\leqslant &\left[\left\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(0)\right\|_{B^1_{\infty,1}} + \left\|\frac{\Delta_q\omega_0^1}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}}\right] \\
&+ \int_0^t e^{-CU(\tau)}\left[\left\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(\tau)\right\|_{B^1_{\infty,1}} + \left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}(\tau)}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}}\right]\|u(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.112}$$

根据 Gronwall 不等式及正交性 ($\Delta_q\Delta_j\omega_0 = 0, |q-j| \geqslant 2$)

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\|_{B^1_{\infty,1}} + \left\|\frac{\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}} &\leqslant e^{CU(t)}\left(\left\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(0)\right\|_{B^1_{\infty,1}} + \left\|\frac{\Delta_q\omega_0^1}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}}\right) \\
&\leqslant e^{CU(t)}\left(2^q\|\Delta_q\omega_0(x)\|_\infty + \left\|\frac{\Delta_q\omega_0^1}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}}\right).
\end{aligned} \tag{3.113}$$

引理 3.10　设 $u_0(x)$ 是轴对称的光滑向量场, 则

$$\|\Delta_q\omega_0^1/x_2\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim 2^q\|\Delta_q\omega_0\|_\infty. \tag{3.114}$$

事实上, $u_0(x)$ 轴对称意味着 $\Delta_q u_0(x)$ 的轴对称. 因此, $\Delta_q\omega_0(x) = \mathrm{curl}\Delta_q u_0(x)$ 满足 $\Delta_q\omega_0^1(x_1,0,z) = \Delta_q\omega_0^1(0,x_2,z) = 0$. 于是

$$\Delta_q\omega_0^1(x_1,x_2,z) = x_2\int_0^1 \partial_{x_2}\Delta_q\omega_0^1(x_1,\tau x_2,z)d\tau. \tag{3.115}$$

故

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\Delta_q\omega_0^1(x_1,x_2,z)}{x_2}\right\|_{B^0_{\infty,1}} &\leqslant \int_0^1 \|\partial_{x_2}\Delta_q\omega_0^1(\cdot,\tau\cdot,\cdot)\|_{B^0_{\infty,1}} d\tau \\
&\leqslant \|\partial_{x_2}\Delta_q\omega_0^1\|_{B^0_{\infty,1}}\int_0^1(1-\log\tau)d\tau \\
&\lesssim 2^q\|\Delta_q\omega_0(x)\|_\infty.
\end{aligned} \tag{3.116}$$

这就完成了引理 3.10 的证明.

现在代入到 (3.113), 就是

$$\|\widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\|_{B^1_{\infty,1}} \leqslant C2^q\|\Delta_q\omega_0(x)\|_\infty e^{CU(t)}. \tag{3.117}$$

利用 Sobolev 嵌入 $B^1_{\infty,1} \hookrightarrow B^1_{\infty,\infty}$, 就推出

$$\sup_j 2^j \|\Delta_j \widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\|_\infty \leqslant C 2^q \|\Delta_q \omega_0\|_\infty e^{CU(t)},$$

即

$$\|\Delta_j \widetilde{\omega}_q^{(1)}(t)\|_\infty \leqslant C 2^{q-j} \|\Delta_q \omega_0\|_\infty e^{CU(t)}. \tag{3.118}$$

□

下面弥补 (3.116) 证明中漏洞.

引理 3.11 设 $f \in B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^3)$, 定义各向异性的伸缩算子

$$f_\lambda(x_1, x_2, x_3) = f(\lambda x_1, x_2, x_3).$$

则存在常数 $C > 0$ 满足对 $\forall \lambda \in (0,1)$, 使得

$$\|f_\lambda\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant C(1 - \log \lambda) \|f\|_{B^0_{\infty,1}}. \tag{3.119}$$

证明 设 $q > -1$, 定义 $f_{q,\lambda} = (\Delta_q f)_\lambda$, 由 Besov 空间的定义及分解

$$f = \sum_{q \geqslant -1} \Delta_q f \Longrightarrow f_\lambda = \sum_{q \geqslant -1} (\Delta_q f)_\lambda.$$

因此

$$\|f_\lambda\|_{B^0_{\infty,1}} = \|\Delta_{-1} f_\lambda\|_\infty + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|\Delta_j f_\lambda\|_\infty \leqslant C\|f\|_\infty + \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ q \geqslant -1}} \|\Delta_j f_{q,\lambda}\|_\infty. \tag{3.120}$$

对任意 $j, q \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{\Delta_j f_{q,\lambda}} = \varphi(2^{-j}\xi)\lambda^{-1}\varphi(2^{-q}\lambda^{-1}\xi_1, 2^{-q}\xi_2, 2^{-q}\xi_3)\widehat{f}(\lambda^{-1}\xi_1, , \xi_2, \xi_3),$$

容易看出

$$\operatorname{supp}\widehat{\Delta_j f_{q,\lambda}} \subset \{(\xi_1, \xi'), |\xi_1| + |\xi'| \approx 2^j \text{ 且 } \lambda^{-1}|\xi_1| + |\xi'| \approx 2^q\} \triangleq \mathcal{A}, \tag{3.121}$$

这里 $\xi' = (\xi_2, \xi_3)$. 直接验证

$$\mathcal{A} = \varnothing, \quad \text{若} \quad 2^q \leqslant 2^j \text{ 或 } 2^{j-q} \lesssim \lambda. \tag{3.122}$$

事实上

$$2^q \leqslant 2^j \Longrightarrow \lambda^{-1}|\xi_1| + |\xi'| \approx 2^q \leqslant 2^j, \quad \text{与 } \lambda < 1 \text{ 相矛盾};$$
$$2^{j-q} \lesssim \lambda \Longrightarrow 2^j \leqslant \lambda 2^q \Longrightarrow |\xi_1| + \lambda|\xi'| \approx \lambda 2^q \geqslant 2^j, \quad \text{矛盾}.$$

于是, 当 $q=-1$, 对于任意的 $j\geqslant 0$, 均有 $\mathcal{A}=\varnothing$. 因此, 欲使 $\mathcal{A}\neq\varnothing$, 一定存在绝对常数 n_1, 使得

$$j-q\leqslant n_1,\qquad j-q\geqslant \log\lambda-n_1. \tag{3.123}$$

因此

$$\begin{aligned}
\|f_\lambda\|_{B^0_{\infty,1}} &\lesssim \|f\|_\infty+\sum_{\substack{q-n_1+\log\lambda\leqslant j\\ j\leqslant q+n_1}}\|\Delta_j f_{q,\lambda}\|_\infty\\
&\lesssim \|f\|_\infty+(n_1-\log\lambda)\sum_q\|f_{q,\lambda}\|_\infty\\
&\lesssim \|f\|_\infty+(n_1-\log\lambda)\sum_q\|f_q\|_\infty\\
&\leqslant C(1-\log\lambda)\|f\|_{B^0_{\infty,1}}.
\end{aligned}\tag{3.124}$$

□

3.4 二维 N-S 方程在 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$ 中的整体适定性及无黏性极限

本节的主旨是利用前面建立的频段层次的交换子估计、输运扩散方程 log-型估计及正则性时空估计, 建立二维不可压 Navier-Stokes 方程在 Besov 空间 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$, $p\in[1,\infty]$ 的整体存在性及 $\|u\|_{B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}}$ 关于黏性系数有一致的估计. 与此同时, 证明当黏性系数趋向于 0 时, 二维不可压 Navier-Stokes 方程的解趋向于相应的 Euler 方程的解. 关于二维不可压 Navier-Stokes 方程光滑解的无黏极限问题可以用能量估计的方法得到 [Mja]. 然而, 它不能应用于临界 Besov 空间 $B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$ 中的整体适定性及无黏性极限. 这也是我们采用 Fourier 局部化方法建立一系列改进的正则性估计的原因. 这方面的工作源于 Hmidi-Keraani [HK3].

考虑具黏性的不可压 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\partial_t v_\nu+v_\nu\cdot\nabla v_\nu-\nu\Delta v_\nu=-\nabla\pi_\nu, & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+,\\ \mathrm{div} v_\nu=0,\\ v_\nu(0)=v^0,\end{cases}\tag{NS$_\nu$}$$

及相应的理想不可压 Euler 方程的 Cauchy 问题 (Euler 方程)

$$\begin{cases}\partial_t v+v\cdot\nabla v=-\nabla\pi, & (x,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+,\\ \mathrm{div} v=0,\\ v(0)=v^0.\end{cases}\tag{E}$$

d 维空间 (NS_ν) 的经典结果 (1) Leray[Ler] 证明了至少存在一个满足能量不等式的整体弱解 (称为 Leray-Hopf 弱解), 且满足

$$u(t) \in L^\infty([0,\infty); L^2) \cap L^2((0,\infty); \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)).$$

特别, 当 $d=2$ 时, 上述的弱解是正则的, 它就是满足能量等式的唯一的物理解. 对于 $d \geqslant 3$, Leray-Hopf 弱解的唯一性及正则性是数学物理界著名的公开问题.

(2) Fujita-Kato[Fk1] 证明了 (NS_ν) 温和解的局部适定性 (利用耗散方程的正则化估计, 当 $t>0$ 时, 就是光滑的物理解), 即存在 $T>0$, (NS_ν) 存在唯一温和解 $u(t) \in C([0,T); H^s(\mathbb{R}^d))$, 这里 $s \geqslant \dfrac{d}{2}-1$. 当 $d=2$ 时, 利用 Blow-up 准则, 上述所得的局部解可以延拓成整体解 (满足能量等式的物理解). 与 Leray-Hopf 弱解的正则性类似, 对于 $d \geqslant 3$ 情形, 如何将温和解扩展成整体解是数学物理界著名的公开问题.

d 维空间 (E) 的经典结果 通过经典的能量方法, 容易证明 (E) 存在唯一的局部光滑解, 即存在 $T>0$ 使得 (E) 存在唯一的光滑解 $u(t) \in C([0,T); H^s(\mathbb{R}^d))$, 这里 $s > \dfrac{d}{2}+1$. 当 $d=2$ 时, 由于涡度不能在有限时刻产生聚积 (它满足自由输运方程), 上述所得的局部解可以延拓成整体解. 然而, 由于 Beale-Kato-Majda 的 Blow-up 准则无法使用, 如何在 Besov 空间 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$ 建立 (E) 的整体存在性也是很有意思的问题. 利用粒子轨道映射方法、log-型的正则性估计, Vishik[Vi] 证明 (E) 在 Besov 空间 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$, $p \in (1,\infty)$ 的整体存在性 (事实上, $p=\infty$ 时, 结果仍然成立). 除了上节讨论的轴对称的无旋流体, R^3 上 Euler 方程的整体存在性或在有限时刻是否产生 Blow-up 现象, 也是数学物理界著名的公开问题.

为简单起见, 我们限定在 Besov 空间 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 下陈述主要结果.

定理 4.1 *$p \in [1,\infty]$, $v^0(x)$ 满足 $\mathrm{div} v^0(x) = 0$, $v^0(x) \in B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)$, 则方程 (NS_ν) 存在唯一的整体解 $u \in C(\mathbb{R}^+; B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2))$ 满足如下一致的先验估计:*

$$\|v_\nu(t)\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}} \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}. \tag{4.1}$$

进而, (NS_ν) 的解 $(v_\nu)_{\nu>0}$ 收敛于 Euler 方程的解 v, 且具有如下收敛率:

$$\|v_\nu(t) - v(t)\|_p \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}, \quad \forall \nu \in (0,1], \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{4.2}$$

$$\|v_\nu(t) - v(t)\|_p \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}} (\nu t), \qquad \forall \nu \in (0,1], \qquad 1 \leqslant p < 2. \tag{4.3}$$

基本工具与证明步骤 3.3 节中建立了输运扩散方程所满足的时空正则性估计、频段层次的正则性估计、Vishik 的 log-型估计等, 这些基本的线性估计均是基于 Fourier 局部化技术而获得的. 具体地说:

第一步. 对方程进行 Fourier 局部化;

第二步. 建立与光滑截断向量场 $S_{q-1}v$ 相对应的流函数;

第三步. 构造保测变换, 在此变换下使对流项消失, 作为代价在非线性项中出现平坦空间中的 Laplace 算子与非平坦空间中 Laplace 算子的相差项.

第四步. 研究平坦空间中的 Laplace 算子与非平坦空间中 Laplace 算子所派生的交换子估计.

第五步. 进行二次微局部化, 通过递归与迭代, 建立涡度在频段层次的正则性估计.

引理 4.2 设 $s \in (-1,1)$, $(p,r) \in [1,\infty]$, $\mathrm{div} v = 0$, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip})$. 设 a 是 C 问题

$$\partial_t a + v\cdot\nabla a - \nu\Delta a = f, \qquad a(x,0) = a_0(x)$$

的光滑解, 则 a 满足如下先验估计:

$$\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^s_{p,r}} \leqslant Ce^{CV(t)}\Big(\|a_0\|_{B^s_{p,r}} + \int_0^t e^{-CV(\tau)}\|f(\tau)\|_{B^s_{p,r}} d\tau\Big), \tag{4.4}$$

$$\nu^{\frac{1}{q}}\|a\|_{\mathcal{L}^q_t(\mathbb{R}^+;B^{s+\frac{2}{q}}_{p,r})} \leqslant Ce^{CV(t)}(1+\nu T)^{\frac{1}{q}}\Big(\|a_0\|_{B^s_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+;B^s_{p,r})}\Big), \tag{4.5}$$

$$\|a(t)\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{p,1}} \leqslant C\big(\|a_0\|_{B^0_{p,1}} + \|f\|_{L^1_t([0,t);B^0_{p,1})}\big)\Big(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau\Big), \tag{4.6}$$

$$2^{2j}\nu\int_0^t \|\Delta_j a\|_p d\tau \lesssim \|a_0\|_p\Big(1+\int_0^t \|\nabla v\|_\infty d\tau\Big), \quad j\in\mathbb{N}, \quad f=0, \tag{4.7}$$

这里 $C = C(d)$ 不依赖于黏性系数 ν, $\mathcal{L}^q_t(I;B^{s+\frac{2}{q}}_{p,r})$ 是混合的时空 Besov 空间,

$$V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau.$$

注记 4.1 (1) 引理 4.2 中给出的四个估计分别来自于第 2 章中命题 3.5、命题 3.6、命题 3.8 及命题 3.9. 与第 2 章定理 1.3、定理 3.2 相比较, 恰好对应着 $p_1=\infty$ 的特殊情形. 特别地, 当

$$s>1 \text{ 或 } s=1, r=1$$

时, 只要取

$$V(t) = \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{B^{s-1}_{\infty,1}} d\tau,$$

相应的估计 (4.4) 及 (4.5) 仍然成立. 更一般地, 在第 2 章定理 3.2 中, 取 $p_1 \neq \infty$, 当

$$s > 1+\frac{d}{p_1}, \text{ 或 } s = 1+\frac{d}{p_1}, r=1$$

时, 只要取

$$V(t)=\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{B_{p_1,1}^{s-1}}d\tau.$$

(2) 根据输运扩散方程解的时空正则性 (见第 2 章定理 1.3), 取 $p_1=\infty$, $s=0$, $\rho=\infty$, $r=1$, $\rho_1=1$, 相应的估计就是

$$\|a\|_{\mathcal{L}^\infty(I;B_{p,1}^0)}\leqslant Ce^{\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau}\Big(\|a_0\|_{B_{p,1}^0}+\|f\|_{\mathcal{L}^1(I;B_{p,1}^0)}\Big). \tag{4.8}$$

一方面, 它也可以视为 (4.5) 在 $q\longrightarrow\infty$ 的极限形式. 另一方面, 估计 (4.6) 是它的 log-型优化形式. 事实上, (4.6) 比 (4.8) 更精确些 (相当于控制系数取 log), 主要基于

$$1+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau\leqslant e^{\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau}.$$

定理 4.1 的证明 鉴于局部适定性是众所周知的, 详见 3.1 节的讨论. 于是, 定理的证明主要涉及两个部分: 其一是利用输运方程与输运扩散方程所满足的一致估计来建立解在 Besov 空间中不依赖于黏性系数 ν 的一致性估计; 其二是研究无黏性极限问题.

第 I 部分 速度场的一致 Lip 范数的保持性.

命题 4.3 设 $v_0\in B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)$, $p\in[1,\infty]$, 则 Navier-Stokes 方程 (NS$_\nu$) 的解 v_ν 满足估计

$$\begin{cases}\|v_\nu(t)\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}\leqslant C_0e^{\exp(C_0t)}, & 2\leqslant p\leqslant\infty,\\ \|v_\nu(t)\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}\leqslant C_0e^{e^{\exp C_0t}}, & 1\leqslant p<2,\end{cases} \tag{4.9}$$

这里 C_0 仅依赖于初值函数 v_0, 但不依赖于黏性系数 ν.

证明 第一步. $\|\nabla v_\nu\|_\infty$ 的估计.

为书写方便起见, 在 v_ν 省略 ν. 由 Littlewood-Paley 分解及 Bernstein 估计, 可见

$$\|\nabla v(t)\|_\infty\leqslant\|\Delta_{-1}v(t)\|_\infty+\sum_{q\geqslant0}\|\Delta_q\nabla v(t)\|_\infty. \tag{4.10}$$

由 $v=\Delta^{-1}\nabla^\perp\omega$, 可见, 对高频部分 ($q\in\mathbb{N}$), 有

$$\|\Delta_q\nabla v\|_\infty\leqslant\|\Delta_q\omega\|_\infty.$$

因此

$$\|\nabla v(t)\|_\infty\lesssim\|\Delta_{-1}v(t)\|_\infty+\|\omega(t)\|_{B_{\infty,1}^0}. \tag{4.11}$$

由于 ω 满足输运扩散方程

$$\partial_t\omega+v\cdot\nabla\omega-\nu\Delta\omega=0,\quad \mathrm{div}v=0, \tag{4.12}$$

由正则性估计 (4.6), 并将其代入 (4.11) 就可推出

$$\|\nabla v\|_\infty \lesssim \|v\|_\infty + \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}\Big(1+\int_0^t \|\nabla v\|_\infty d\tau\Big). \tag{4.13}$$

第二步. $\|v_\nu\|_\infty$ 的估计.

其次, 采用 Serfati 的想法来证明 v 是点态有界的. 记 N 是正的待定整数, 定义

$$\Delta_{-N}=\chi(2^{N-1}D), \quad v_{-N}:=\Delta_{-N}v.$$

显然 v_{-N} 满足方程

$$\partial_t v_{-N}-\nu\Delta v_{-N}=-\Delta_{-N}\mathcal{P}(v\cdot\nabla v),$$

此处 $\mathcal{P}$ 是投影算子. 由抛物型方程的极值原理与自由向量场 v 的条件, 可见

$$\begin{aligned}\|v_{-N}(t)\|_\infty &\leqslant \|v_{-N}(0)\|_\infty+\int_0^t \|\Delta_{-N}\mathcal{P}\mathrm{div}(v\otimes v)(\tau)\|_\infty d\tau\\ &\leqslant \|v_{-N}(0)\|_\infty+\int_0^t \|\Delta_{-N}\mathcal{P}\mathrm{div}(v\otimes v)(\tau)\|_{\dot B^0_{\infty,1}} d\tau\\ &\leqslant \|v_{-N}(0)\|_\infty+2^{-N}\int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau,\end{aligned} \tag{4.14}$$

这里用到 Sobolev 嵌入 $\dot B^0_{\infty,1}\hookrightarrow L^\infty$ 及双线性估计

$$\begin{aligned}\|\Delta_{-N}\mathrm{div}(v\otimes v)\|_{\dot B^0_{\infty,1}} &= \sum_j \|\dot\Delta_j\Delta_{-N}\mathrm{div}(v\otimes v)\|_\infty\\ &\leqslant \sum_j 2^j\|\dot\Delta_j\Delta_{-N}(v\otimes v)\|_\infty\\ &\leqslant \sum_{j\leqslant -N+1} 2^j\|v\otimes v\|_\infty \lesssim 2^{-N}\|v\|_\infty^2.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\|v\|_\infty &\leqslant \|\Delta_{-N}v\|_\infty+\|(\mathrm{Id}-\Delta_{-N})v\|_\infty\\ &\leqslant \|v_{-N}\|_\infty+\|(\mathrm{Id}-\Delta_{-N})\Delta^{-1}\nabla^\perp\omega\|_\infty\\ &\leqslant \|v_{-N}\|_\infty+C2^N\|\omega\|_\infty\\ &\leqslant \|v_{-N}\|_\infty+C2^N\|\omega_0\|_\infty,\end{aligned} \tag{4.15}$$

这里用到 ω 的极值原理 $\|\omega(t)\|_\infty\leqslant\|\omega_0\|_\infty$. 将 (4.14) 代入 (4.15), 就得

$$\|v(t)\|_\infty \lesssim \|v_0\|_\infty+2^N\|\omega_0\|_\infty+2^{-N}\int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau.$$

选取

$$2^{2N} \simeq 1 + \frac{\int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau}{\|\omega_0\|_\infty},$$

容易推出

$$\|v(t)\|_\infty^2 \leqslant C\|v_0\|_\infty^2 + C\|\omega_0\|_\infty^2 + \|\omega_0\|_\infty \int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式, 就得

$$\|v(t)\|_\infty \leqslant C(\|v_0\|_\infty + \|\omega_0\|_\infty)e^{C\|\omega_0\|_\infty t}. \tag{4.16}$$

将 (4.16) 代入 (4.13) 可见

$$\|\nabla v(t)\|_\infty \leqslant C_0 e^{C_0 t} + C\|\omega^0\|_{B^0_{\infty,1}}\big(1 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau\big). \tag{4.17}$$

重新利用 Gronwall 不等式即得所需要的估计

$$\|\nabla v\|_\infty \leqslant C_0 e^{C_0 t}. \tag{4.18}$$

进而, 利用 Besov 空间的定义与 (4.16), 就得

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{B^1_{\infty,1}} &\cong \|\Delta_{-1} v(t)\|_\infty + \sum_{q\geqslant 0} \|\Delta_q \nabla v(t)\|_\infty \\
&\cong \|\Delta_{-1} v(t)\|_\infty + \|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \\
&\lesssim \|v\|_\infty + \|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}}\Big(1 + \int_0^t \|\nabla v\|_\infty d\tau\Big) \\
&\leqslant C_0 e^{C_0 t}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

自然也有

$$\|\omega(t)\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant C_0 e^{C_0 t}.$$

第三步. 输运扩散方程解在 Besov 框架下保持正则性.

考虑

$$\begin{cases}
\partial_t \omega_\nu + v_\nu \cdot \nabla \omega_\nu - \nu \Delta \omega_\nu = 0, \\
\mathrm{div} v_\nu(0) = 0, \\
\omega_\nu(0) = \nabla \times v_0.
\end{cases}$$

情形 1. $2 \leqslant p \leqslant \infty$. 利用输运扩散方程解在 Besov 框架下的先验估计, 就有

$$\|\omega_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant \|\omega_\nu\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant C\|\omega^0\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} e^{C\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{B^0_{\infty,1}} d\tau} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}. \tag{4.20}$$

这里用到了估计 (4.18). 于是

$$\|v_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}} \leqslant \|\Delta_{-1}v_\nu(t)\|_p + C\|\omega_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant C\|v_\nu(t)\|_p + C_0 e^{\exp C_0 t}. \tag{4.21}$$

情形 2. $1 \leqslant p < 2$. 取 $p^* = \dfrac{2p}{2-p}$, 利用输运扩散方程解在非齐次 Besov 框架下的先验估计 (见注记 4.1), 就有

$$\|\omega_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}-1}_{p^*,1}} \leqslant \|\omega_\nu\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^{\frac{2}{p}-1}_{p^*,1}} \leqslant C\|\omega^0\|_{B^{\frac{2}{p}-1}_{p^*,1}} e^{C\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_{B^0_{\infty,1}} d\tau} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}, \tag{4.22}$$

$$\|\omega_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant \|\omega_\nu\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant C\|\omega^0\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \exp\left\{C\int_0^t \left[\|v_\nu\|_p + \|\omega_\nu(\tau)\|_{B^{\frac{2}{p}-1}_{p^*,1}}\right] d\tau\right\}. \tag{4.23}$$

于是

$$\|v_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}} \lesssim \|v_\nu(t)\|_p + \|\omega^0\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \exp\left\{C\int_0^t \left[\|v_\nu\|_p + C_0 e^{\exp C_0 t}\right] d\tau\right\}. \tag{4.24}$$

下面来估计速度场的 L^p 估计. 仅需考虑 $p \in [1,\infty)$ ($p=\infty$) 时, 已有估计 (4.16). 利用 N-S 方程的 L^p 能量估计 (两边同乘以 $|u|^{p-2}u$) 就可推出

$$\|v_\nu(t)\|_p \leqslant \|v_\nu(0)\|_p + \int_0^t \|\mathbb{P}(v_\nu\cdot\nabla v_\nu)(\tau)\|_p d\tau. \tag{4.25}$$

利用 Riesz 算子在 L^p ($1<p<\infty$) 上的有界性, 可见

$$\|\mathbb{P}(v_\nu\cdot\nabla v_\nu)\|_p \leqslant \|v_\nu\|_p\|\nabla v_\nu\|_\infty \leqslant C_0 e^{C_0 t}\|v_\nu\|_p, \quad 1<p<\infty.$$

当 $p=1$ 时, 采用 Sobolev 嵌入定理与双线性估计可得

$$\begin{aligned}\|\mathbb{P}(v_\nu\cdot\nabla v_\nu)\|_1 \leqslant& \|\mathbb{P}(v_\nu\cdot\nabla v_\nu)\|_{\dot B^0_{1,1}} \lesssim \|v_\nu\cdot\nabla v_\nu\|_{\dot B^0_{1,1}}\\ \lesssim& \|v_\nu\|_1\|v_\nu\|_{B^1_{\infty,1}} \leqslant C_0 e^{C_0 t}\|v_\nu\|_1.\end{aligned}$$

将上面两种情形所得的结果分别代入 (4.25), 利用 Gronwall 不等式就可以推出

$$\|v_\nu(t)\|_p \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}, \quad \forall t\in\mathbb{R}^+, \quad 1\leqslant p<\infty. \tag{4.26}$$

这样, 将上式代入 (4.21) 及 (4.24), 就得估计

$$\|v_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t} \quad (p\geqslant 2), \qquad \|v_\nu(t)\|_{B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}} \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}} \quad (1\leqslant p<2). \ \square$$

注记 4.2 (1) 对于 Euler 方程的解 v, 亦有估计

$$\|v(t)\|_{B_{\infty,1}^1} \leqslant C\|v(t)\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0 t)}. \tag{4.27}$$

(2) 用 Bony 的仿积分解技术, 容易证明下面的非线性估计: 若 $\mathrm{div} v = 0$, $f \in B_{\infty,1}^1$, $v \in B_{p,1}^0$. 则

$$\|v\cdot\nabla f\|_{B_{p,1}^0} \leqslant C\|v\cdot\nabla f\|_{\dot{B}_{p,1}^0} \leqslant C\|v\|_{B_{p,1}^0}\|f\|_{B_{\infty,1}^1}. \tag{4.28}$$

特别, 当 $f=v$, 有

$$\|v\cdot\nabla v\|_{B_{p,1}^0} \leqslant C\|v\cdot\nabla v\|_{\dot{B}_{p,1}^0} \leqslant C\|v\|_p\|v\|_{B_{\infty,1}^1}. \tag{4.29}$$

事实上, 利用 Bony 的仿积公式

$$v\cdot\nabla f = T_v\cdot\nabla f + T_{\nabla f}\cdot v + R(v,\nabla f) \triangleq I_1+I_2+I_3,$$

及 Besov 空间范数的 Littlewood-Paley 等价刻画, 容易看出

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{B_{p,1}^0} =&\|T_v\cdot\nabla f\|_{B_{p,1}^0} \leqslant C\sum_{q\in\mathbb{N}}\|S_{q-1}v\|_p\|\Delta_q\nabla f\|_\infty\\ \leqslant& C\|v\|_p\sum_{q\in\mathbb{N}}2^q\|\Delta_q f\|_\infty \leqslant C\|v\|_{B_{p,1}^0}\|f\|_{\dot{B}_{\infty,1}^1},\end{aligned}$$

这里取和本应该是 $q\in\{-1\}\cup\mathbb{N}\triangleq\{-1\}\cup\{0,1,2,\cdots\}$, 但是用到了 $S_{-1}=0$. 同理

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{B_{p,1}^0} =&\|T_{\nabla f}\cdot v\|_{B_{p,1}^0} \leqslant \sum_{q\in\mathbb{N}}\|S_{q-1}\nabla f\|_\infty\|\Delta_q v\|_p\\ \leqslant& C\|\nabla f\|_\infty\sum_{q\in\mathbb{N}}\|\Delta_q v\|_p \leqslant C\|v\|_{B_{p,1}^0}\|f\|_{\dot{B}_{\infty,1}^1}.\end{aligned}$$

特别, 当 $f=v$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{B_{p,1}^0} =&\|T_{\nabla v}\cdot v\|_{B_{p,1}^0} \leqslant \sum_{q\in\mathbb{N}}\|S_{q-1}\nabla v\|_p\|\Delta_q v\|_\infty\\ \leqslant& C\sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{j\leqslant q-2}2^{j-q}\|\Delta_j v\|_p 2^q\|\Delta_q v\|_\infty\\ \leqslant& C\|v\|_p\sum_{q\in\mathbb{N}}\sum_{j\leqslant q-2}2^{j-q}2^q\|\Delta_q v\|_\infty \leqslant C\|v\|_p\|v\|_{\dot{B}_{\infty,1}^1}.\end{aligned}$$

最后, 利用不可压条件及离散的 Young 不等式, 容易看出

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{B^0_{p,1}} =&\|R(v,\nabla f)\|_{B^0_{p,1}} = \|\mathrm{div}R(v,f)\|_{B^0_{p,1}}\\
\leqslant& \sum_{q\geqslant -1}\left\|\mathrm{div}\Delta_q \sum_{j\geqslant -1}\Delta_j v\widetilde{\Delta}_j f\right\|_p\\
\leqslant& C\sum_{q\geqslant -1}2^q\sum_{j\geqslant q-4}\|\Delta_j v\|_p\|\widetilde{\Delta}_j f\|_\infty\\
\leqslant& C\|v\|_p\sum_{q\geqslant -1}\sum_{j\geqslant q-4}2^{q-j}2^j\|\widetilde{\Delta}_j f\|_\infty\\
\leqslant& C\|v\|_{B^0_{p,1}}\|f\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}}.
\end{aligned}$$

另一方面, 利用高 - 低频分解及 Bernstein 估计, 就有

$$\begin{aligned}
\|v\cdot\nabla f\|_{\dot{B}^0_{p,1}} =& \sum_{j\leqslant -1}\|\dot{\Delta}_j(v\cdot\nabla f)\|_p + C\|v\cdot\nabla f\|_{B^0_{p,1}}\\
\leqslant& C\|v\|_p\|f\|_\infty + C\|v\|_{B^0_{p,1}}\|f\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}}\\
\leqslant& C\|v\|_{B^0_{p,1}}\|f\|_{B^1_{\infty,1}}.
\end{aligned}$$

综上所述, 就推出估计 (4.28). 进而, 当 $f = v$ 时, 上面证明过程就意味着估计 (4.29).

(3) $\|v\cdot\nabla f\|_{B^0_{p,1}} \leqslant C\|v\cdot\nabla f\|_{\dot{B}^0_{p,1}}$ 的简单说明:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^0_{p,1}} =& \sum_{j=-1}^{\infty}\|\Delta_j f\|_p = \|\Delta_{-1}f\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j f\|_p\\
\leqslant& \left\|\Delta_{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{\Delta}_k f\right\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j f\|_p\\
\leqslant& \sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\Delta_{-1}\dot{\Delta}_k f\|_p + \sum_{j=0}^{\infty}\|\Delta_j f\|_p\\
\leqslant& 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\|\dot{\Delta}_k f\|_p \leqslant 2\|f\|_{\dot{B}^0_{p,1}}.
\end{aligned}$$

第 II 部分　收敛率问题.

本节给出黏性极限的证明. 本质上, 下面的命题给出的结果较主要定理给出的结果更强, 即可以用 $\|\cdot\|_{B^0_{p,1}}$ 来代替 L^p 模.

命题 4.4　令 $p\in[2,\infty]$,$v_0\in B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}$ 满足 $\mathrm{div}v_0 = 0$. 则 Navier-Stokes 的解与 Euler 方程的解关于 t 满足如下估计:

$$\|v_\nu - v\|_{B^0_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}(\nu t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(1+\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}(\nu t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}. \tag{4.30}$$

事实上, 在 (4.30) 最后的不等式中, 已将 $(1+\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ 吸收到因子 $C_0 e^{\exp C_0 t}$ 中.

证明 设

$$\bar{v}_\nu = v_\nu - v, \quad \bar{\pi}_\nu = \pi_\nu - \pi.$$

则 $(\bar{v}_\nu, \bar{\pi}_\nu)$ 满足相差方程对应的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v}_\nu + v_\nu \cdot \nabla \bar{v}_\nu = \nu \Delta v_\nu - \bar{v}_\nu \cdot \nabla v - \nabla \bar{\pi}_\nu, \\ \bar{v}_\nu(0) = 0. \end{cases} \tag{$\widetilde{NS_\nu}$}$$

应用输运方程的 log-型先验估计, 可见

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_\nu(t)\|_{B^0_{p,1}} &\leqslant \Big(1+\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_\infty d\tau\Big)\int_0^t \Big(\nu\|\Delta v_\nu\|_{B^0_{p,1}} + \|\bar{v}_\nu \cdot \nabla v\|_{B^0_{p,1}} + \|\nabla \bar{\pi}_\nu\|_{B^0_{p,1}}\Big) d\tau \\ &= (1+V_\nu(t))\int_0^t \big(\nu\|\Delta v_\nu\|_{B^0_{p,1}} + \|\bar{v}_\nu \cdot \nabla v\|_{B^0_{p,1}} + \|\nabla \bar{\pi}_\nu\|_{B^0_{p,1}}\big) d\tau \\ &\triangleq (1+V_\nu(t))(I_1+I_2+I_3), \end{aligned} \tag{4.31}$$

这里 $V_\nu(t) = \displaystyle\int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau) d\tau$.

第一步. I_1 的估计. 注意到插值公式可见 ($v_\nu = \Delta^{-1}\nabla^\perp \omega_\nu$ 与最优型插值公式)

$$\|\Delta v_\nu\|_{L^1_t B^0_{p,1}} \leqslant C\|\omega_\nu\|_{\mathcal{L}^1_t B^1_{p,1}} \leqslant C\|\omega_\nu\|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^1_t B^{\frac{2}{p}}_{p,\infty}} \|\omega_\nu\|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^1_t B^{2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}}. \tag{4.32}$$

应用 Hölder 不等式及命题 4.3 中的估计, 就可以推出 (当 $p=2$, 不用插值直接得到)

$$\|\omega_\nu\|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^1_t B^{\frac{2}{p}}_{p,\infty}} \leqslant t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\|\omega_\nu\|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^\infty_t B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\|v_\nu\|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^\infty_t B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}} \leqslant t^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} C_0 e^{\exp C_0 t}. \tag{4.33}$$

另一方面, 输运扩散方程的正则化估计 (4.5) 意味着

$$\|\omega_\nu\|_{\mathcal{L}^1_t B^{2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}} \leqslant C\nu^{-1} e^{CV_\nu(t)}(1+\nu t)\|\omega_0\|_{B^{\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}\nu^{-1}(1+\nu t). \tag{4.34}$$

代入 (4.32) 就得

$$I_1 = \nu\|\Delta v_\nu\|_{L^1_t B^0_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}(\nu t)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}(1+\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}. \tag{4.35}$$

第二步. I_2 的估计. 根据输运方程解的先验估计 $\|v\|_{B^1_{\infty,1}} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0 t)}$ 及非线性估计, 直接推出

$$\begin{aligned} I_2 =& \|\bar{v}_\nu \cdot \nabla v\|_{L^1_t B^0_{p,1}} \leqslant C\|\bar{v}_\nu\|_{L^1_t([0,t);B^0_{p,1})}\|v\|_{L^1_t([0,t);B^1_{\infty,1})} \\ \leqslant& C_0 e^{\exp C_0 t}\int_0^t \|\bar{v}_\nu(\tau)\|_{B^0_{p,1}} d\tau. \end{aligned} \tag{4.36}$$

第三步. I_3 的估计. 下面来处理压力项的估计. 利用 $\mathrm{div}v_\nu = \mathrm{div}\bar{v}_\nu = 0$, 可见

$$\mathrm{div}(v_\nu \cdot \nabla \bar{v}_\nu) = \mathrm{div}(\bar{v}_\nu \cdot \nabla v_\nu).$$

用 div 作用于 $(\widetilde{\mathrm{NS}}_\nu)$, 可见

$$-\Delta \bar{\pi}_\nu = \mathrm{div}(\bar{v}_\nu \cdot \nabla v + v_\nu \cdot \nabla \bar{v}_\nu) = \mathrm{div}(\bar{v}_\nu \cdot \nabla (v + v_\nu)). \tag{4.37}$$

注意到 Sobolev 嵌入 $\dot{B}^0_{p,1} \hookrightarrow B^0_{p,1}$, 容易看出

$$\|\nabla \bar{\pi}_\nu\|_{B^0_{p,1}} \leqslant C \|\bar{v}_\nu \cdot \nabla (v + v_\nu)\|_{\dot{B}^0_{p,1}}. \tag{4.38}$$

利用精确的非线性估计

$$\|v \cdot \nabla f\|_{\dot{B}^0_{p,1}} \leqslant C \|v\|_{B^0_{p,1}} \|f\|_{B^1_{\infty,1}}.$$

因此

$$\begin{aligned} I_3 \leqslant & \|\nabla \bar{\pi}_\nu\|_{L^1_t B^0_{p,1}} \leqslant \|\bar{v}_\nu \cdot \nabla (v + v_\nu)\|_{L^1_t \dot{B}^0_{p,1}} \\ \leqslant & C \|v + v_\nu\|_{L^\infty_t B^1_{\infty,1}} \|\bar{v}_\nu\|_{L^1_t B^0_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t} \|\bar{v}_\nu\|_{L^1_t B^0_{p,1}}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

将 $I_1 \sim I_3$ 的估计代入 (4.31), 就可以推出

$$\|\bar{v}_\nu(t)\|_{B^0_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} (1 + \nu t)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} + C_0 e^{\exp C_0 t} \int_0^t \|\bar{v}_\nu(\tau)\|_{B^0_{p,1}} d\tau. \tag{4.40}$$

利用 Gronwall 不等式可见

$$\|\bar{v}_\nu(t)\|_{B^0_{p,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t} (\nu t)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}} (1 + \nu t)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}. \tag{4.41}$$

□

需要指出的是, 当 $p \leqslant 2$ 时, 无法利用形如

$$\|\Delta v_\nu\|_{L^1_t B^0_{p,1}} \leqslant C \|\omega_\nu\|_{\mathcal{L}^1_t B^1_{p,1}} \leqslant C \|\omega_\nu\|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^1_t B^{\frac{2}{p}}_{p,\infty}} \|\omega_\nu\|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}_{\mathcal{L}^1_t B^{2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}}$$

这样的最优型插值定理. 但是, 利用 L^p- 层次的能量积分技术, 仍然可以获得无黏极限问题, 即

定理 4.5 设 $1 \leqslant p \leqslant 2$, $v^0 \in B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{div}v = 0$. 则 (NS_ν) 方程存在唯一解 $v \in C(\mathbb{R}^+; B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2))$ 满足如下一致的估计

$$\|v_\nu(t)\|_{B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}. \tag{4.42}$$

进而, 对任意 $\nu \in (0, 1]$, 成立

$$\|v_\nu(t) - v(t)\|_p \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}} (\nu t). \tag{4.43}$$

证明 黏性极限问题. 我们已经证明了 (NS_ν) 的解在 $B_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$ 上的一致估计 (4.9) 及相应的 Euler 方程的 Besov 整体估计

$$\|v(t)\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}, \quad \|\nabla v(t)\|_\infty \leqslant C_0 e^{C_0 t}. \tag{4.44}$$

因此, 仅需给出黏性极限的证明.

记

$$\bar{v}_\nu = v_\nu - v, \quad \bar{\pi}_\nu = \pi_\nu - \pi.$$

则 $(\bar{v}_\nu, \bar{\pi}_\nu)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \bar{v}_\nu + v_\nu \cdot \nabla \bar{v}_\nu - \nu \Delta \bar{v}_\nu = \nu \Delta v - \bar{v}_\nu \cdot \nabla v - \nabla \bar{\pi}_\nu, \\ \bar{v}_\nu(0) = 0. \end{cases}$$

两边同乘以 $|\bar{v}_\nu|^{p-2}\bar{v}_\nu$, 利用不可压缩流的性质可见

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\bar{v}_\nu(t)\|_p^p + \frac{2\nu}{p}\|\nabla(|\bar{v}_\nu|^{\frac{p}{2}})\|_2^2 \leqslant \nu\|\Delta v\|_p \|\bar{v}_\nu\|_p^{p-1} + \big(\|\nabla v\|_\infty + \|v_\nu\|_{B^1_{\infty,1}}\big)\|\bar{v}_\nu\|_p^p.$$

因此

$$\frac{d}{dt}\|\bar{v}_\nu(t)\|_p \leqslant \nu\|\Delta v\|_p + \big(\|\nabla v\|_\infty + \|v_\nu\|_{B^1_{\infty,1}}\big)\|\bar{v}_\nu\|_p.$$

利用 Gronwall 不等式及 $\bar{v}_\nu(0) = 0$, 容易推出

$$\|\bar{v}_\nu\|_p \leqslant \nu e^{\int_0^t (\|\nabla v\|_\infty + \|v_\nu\|_{B^1_{\infty,1}}) d\tau} \int_0^t \|\Delta v(\tau)\|_p d\tau.$$

注意到 $\|\Delta v\|_p \leqslant \|v\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}$, 就得

$$\|\bar{v}_\nu\|_p \leqslant (\nu t) C_0 e^{\exp C_0 t} e^{\int_0^t (\|\nabla v\|_\infty + \|v_\nu\|_{B^1_{\infty,1}}) d\tau} \leqslant (\nu t) C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}. \qquad \square$$

注记 4.3 定理 4.5 将 Hmidi-Keraani 关于无黏极限问题从 $2 \leqslant p \leqslant \infty$ 推广到 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 如何在 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$ 拓扑意义下证明黏性极限是一个公开的问题! 事实上, 利用插值定理, 可以获得在空间 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$ 拓扑意义下的收敛性. 尽管我们可以利用频段层次上的正则性估计, 即设 $v_0 \in B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}(\mathbb{R}^2)$, $2 \leqslant p \leqslant \infty$, v_ν 是 (NS_ν) 方程具有初始 v_0 的 Lipschitz 解, 则对任 $\forall q \in \mathbb{N}$, 有

$$\nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q v_\nu(\tau)\|_p d\tau \leqslant C\Big(\|v_0(x)\|_p + \int_0^t \|f\|_p d\tau\Big)\Big(1 + \int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_\infty d\tau\Big). \tag{4.45}$$

由于 $p > 2 \Longrightarrow \dfrac{2}{p} + 1 < 2$, 可以想象利用 Sobolev 嵌入 $B^2_{\infty,1} \hookrightarrow B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$ 建立在 $B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$

拓扑意义下的黏性极限问题. 但是, 由于上面的正则性估计依赖于 $\nu > 0$, 实际上还是不行的! 同理, 对于 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 的情形, 也可以利用涡度场满足的频段层次上的正则性估计 (4.7), 即

$$\nu 2^{2q} \int_0^t \|\Delta_q \omega_\nu(\tau)\|_p d\tau \leqslant C\|\omega_0\|_p \Big(1 + \int_0^t \|\nabla v_\nu(\tau)\|_\infty d\tau\Big), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \tag{4.46}$$

来替代 (4.45), 然而上述估计仍然依赖于 $\nu > 0$!

注记 4.4 Hmidi-Keraani 在 [HK4] 中仅证明定理 4.5 在 $p = 2$ 的情形, 具体地说, 利用 Vishik 建立的有关 Euler 方程解的一致性整体估计

$$\|v(t)\|_{B^2_{2,1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t}, \quad \|\nabla v(t)\|_\infty \leqslant C_0 e^{C_0 t}, \tag{4.47}$$

进而证明黏性极限问题. 另外, 吴刚证明了三维轴对称无旋 Niaver-Stokes 方程的无黏极限结论.

第 4 章　Boussinesq 方程的 Cauchy 问题

本章着力研究流体动力学中另一类重要的模型 —— Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性:

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v = -\nabla \pi + \nu \Delta v + \theta e_2, \\ \theta_t + v \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(x,0) = v_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \end{cases} \tag{B}$$

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v = -\nabla \pi + \nu \Delta v + \theta e_2, \\ \theta_t + v \cdot \nabla \theta = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(x,0) = v_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x), \end{cases} \tag{B1}$$

$$\begin{cases} v_t + v \cdot \nabla v = -\nabla \pi + \theta e_2, \\ \theta_t + v \cdot \nabla \theta = \kappa \Delta \theta, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(x,0) = v_0(x), \quad \theta(x,0) = \theta_0(x). \end{cases} \tag{B2}$$

经典研究结果　对于三维情形, 上述 Cauchy 问题 (B), (B1) 及 (B2) 光滑解的整体适定性问题是著名的公开问题. 对于二维情形及具有特殊对称结构的三维问题, 近年来取得了一些实质性的进展, 概括如下:

(1) $\kappa > 0$, $\nu > 0$, 完全类似于 2 维的 Navier-Stokes 方程, (B) 存在整体的光滑解. 自然, (B) 对应的 Leray-Hopf 整体弱解也是唯一的物理解! 对于任意的 $t > 0$, 解也是光滑的.

(2) $\kappa = \nu = 0$, 光滑解的局部存在性可以通过正对称的拟线性方程组理论 ([AG]) 来实现. 但是, 光滑解是否在有限时刻 Blow-up 是公开的! 事实上, 记温度 θ 是输运方程的解, 流场对应的涡度 $\omega = \operatorname{curl} v = \partial_1 v^{(2)} - \partial_2 v^{(1)}$ 满足

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = \partial_1 \theta. \tag{0.1}$$

我们知道证明整体光滑解存在的关键是建立形如 $\|\omega\|_{L^\infty} < \infty$ 的估计, 而此估计依赖于

$$\int_0^T ||\partial_1\theta||_{L^\infty} dt.$$

不幸的是, 我们没有 $\partial_1\theta$ 的形如上述的先验估计.

(3) 与 Euler 方程类似, 对于三维轴对称无旋的情形, 在适当的条件下, 有类似于二维情形的结果.

本章从以下几个层面来讨论具部分黏性的 2 维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性:

(1) 利用能量积分与 log-型不等式, 建立具部分黏性的 2 维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题光滑解的整体适定性. 与此同时, 还讨论了黏性系数趋向于 0 时的极限问题.

(2) 利用 Fourier 局部化方法及相应的输运扩散方程在 Besov 型空间中的正则性估计、频段层次上的正则性估计、log-型正则性估计等, 在临界空间中建立具部分黏性的 2 维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性. 与此同时, 对于具临界耗散的 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性, 给出了详细的评注.

(3) 利用 Boussinesq 方程的耦合结构、交换子估计及 Fourier 局部化方法, 在适当的条件下, 证明了具有轴对称初值的 3 维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的整体适定性.

4.1 $\mathbb{R}^2$ 中具部分黏性的 Boussinesq 方程的整体适定性

本节从研究无黏或具有黏性的 2 维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题的光滑解的局部适定性出发, 建立相应的 Blow-up 机制. 进而, 利用能量积分与 log-型不等式, 建立如下的具部分黏性的 2 维 Boussinesq 方程的 Cauchy 问题光滑解的整体适定性.

定理 1.1 设 $\nu > 0$, $\mathrm{div} v_0 = 0$, $m > 2$. 若 $(v_0, \theta_0) \in H^m(\mathbb{R}^2)$, 则 (B1) 存在唯一的整体光滑解 (v,θ) 满足

$$\theta \in C([0,\infty); H^m(\mathbb{R}^2)), \quad v \in C([0,\infty); H^m(\mathbb{R}^2)) \cap L^2((0,T); H^{m+1}(\mathbb{R}^2). \tag{1.1}$$

进而, $\forall s < m$, 当 $\kappa \to 0$, (B) 的整体光滑解 (v,θ) 在 $C([0,T]; H^s)$ 下收敛于 (B1) 的光滑解.

定理 1.2 设 $\kappa > 0$,$\mathrm{div} v_0 = 0$,$m > 2$. 若 $(v_0, \theta_0) \in H^m(\mathbb{R}^2)$, 则 (B2) 存在唯一的整体光滑解 (v,θ) 满足

$$\theta \in C([0,\infty); H^m(\mathbb{R}^2)) \cap L^2((0,T); H^{m+1}(\mathbb{R}^2), \quad v \in C([0,\infty); H^m(\mathbb{R}^2)).$$

进而, $\forall s < m$, 当 $\nu \to 0$, (B) 的整体光滑解 (v, θ) 在 $C([0,T]; H^s)$ 下收敛于 (B2) 的光滑解.

注记 1.1 Chae 与 Hou-Li 均是在次临界空间中建立具部分黏性的 Boussinesq 方程的整体光滑解, 故仅利用经典的 Blow-up 准则与能量积分估计即可. 当然, Hou-Li 的证明主要是基于 Hilbert 框架下的能量估计结合所谓的新型的局部时间分析技术. 我们将在定理 1.1 证明之后给出一个注记说明之. 临界空间的整体适定性比较困难, 经典的能量方法不再有效. 事实上, 原来的 Blow-up 准则不再成立, 需要用 Fourier 局部化方法建立新的 Blow-up 准则. 同时, 欲获得整体适定性, 就要求助于 2.3 节中所建立的输运扩散方程在 Besov 型空间中的正则性估计、频段层次上的正则性估计、log-型正则性估计等.

机理分析 用输运方程求解时, 一般要求向量场

$$v \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \text{Lip}(\mathbb{R}^2)).$$

因此, 求解 Boussinesq 方程的条件起码应满足

$$B^s_{p,r} \hookrightarrow \text{Lip}(\mathbb{R}^2), \quad \text{或} \quad H^m \hookrightarrow \text{Lip}(\mathbb{R}^2),$$

即 $s - \dfrac{2}{p} > 1$ 或 $m > 2$. 上述情形对应着次临界空间. 与此同时, 在尺度变换的框架下, 仅当 $s = \dfrac{n}{p} + 1$, $r = 1$ 时, $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^2)$ 才能是满足上述嵌入关系的临界空间. 以 Hilbert 框架为例, 给出光滑解的常见的 Blow-up 准则, 更一般的端点形式及频段层次 Blow-up 准则可见 Chen-Miao-Zhang[CMZ4], Kozono-Ogawa-Taniuch[KOT] 等的工作.

次临界情形 (光滑解的 Blow-up 准则)

$$\lim_{t \to T} (\|v(t)\|_{H^m} + \|\theta(t)\|_{H^m}) = \infty \ (m > 2) \Longleftrightarrow \int_0^T (\|\nabla v\|_\infty + \|\nabla \theta\|_\infty) dt = \infty.$$

下面给出理想 Boussinesq 方程 ($\kappa = \nu = 0$) 光滑解改进形式的 Blow-up 准则.

命题 1.3 (局部适定性与 Blow-up 准则) 设 $\kappa = \nu = 0$, $(v_0, \theta_0) \in H^m(\mathbb{R}^2)$, $m > 2$ 是正整数. 则无黏 Boussinesq 方程对应的 Cauchy 问题 $(\text{B})_0$ 存在唯一经典解 $(v, \theta) \in C([0, T_1]; H^m)$, 这里 $T_1 = T(\|v_0\|_{H^m}, \|\theta_0\|_{H^m})$. 进而, 解 (v, θ) 可以在 $H^m(\mathbb{R}^2)$ 中保持到 $T > T_1$, 即

$$(v, \theta) \in C([0, T]; H^m)$$

的充要条件是

$$\int_0^T \|\nabla \theta\|_\infty dt < \infty. \tag{1.2}$$

证明　第一步. 预备估计. 记

$$E^m(\mathbb{R}^2) = \{\ u(t) \triangleq u(t,x) \in H^m(\mathbb{R}^2); \mathrm{div} u = 0\ \},$$

$\rho(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 满足

$$\rho(x) = \rho(|x|) \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \rho(x) dx = 1,$$

定义标准的光滑子 J_ε 如下:

$$J_\varepsilon f = \varepsilon^{-2} \rho\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big) * f \triangleq \rho_\varepsilon * f.$$

显然, 它满足如下性质与估计:

(i) $\|J_\varepsilon f\|_{C^0} \leqslant \|f\|_{C^0},\ \forall f \in C^0(\mathbb{R}^2)$.

(ii) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|J_\varepsilon f - f\|_{H^m} = 0,\ \forall f \in H^m(\mathbb{R}^2)$.

(iii) 对于任意的 $f \in H^m(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots\}$, $\varepsilon > 0$, 有

$$\|J_\varepsilon f\|_{H^{m+k}} \leqslant \frac{C_{m,k}}{\varepsilon^k} \|f\|_{H^m}, \quad \|D^k J_\varepsilon f\|_{C^0} \leqslant \frac{C_k}{\varepsilon^{k+1}} \|f\|_{L^2}.$$

第二步. 正则化问题的构造. 利用双正则化技术, 构造如下正则性问题:

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon + J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla(J_\varepsilon v^\varepsilon)) = -\nabla \pi^\varepsilon + \theta^\varepsilon e_2, \\ \theta_t^\varepsilon + J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla(J_\varepsilon \theta^\varepsilon)) = 0, \\ \mathrm{div} v^\varepsilon = 0, \\ v^\varepsilon(x,0) = v_0(x), \quad \theta^\varepsilon(x,0) = \theta_0(x). \end{cases} \tag{B$_\varepsilon$}$$

用 Leray 算子$\mathcal{P}$ 作用于上述方程, 就转换成 $E^m(\mathbb{R}^2) \times H^m(\mathbb{R}^2)$ 上的常微分方程的 Cauchy 问题

$$\frac{d}{dt} \widetilde{v}^\varepsilon = F_\varepsilon(\widetilde{v}^\varepsilon), \qquad \widetilde{v}^\varepsilon(x,0) = \widetilde{v}_0^\varepsilon(x) \triangleq \begin{pmatrix} v_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

这里

$$F_\varepsilon(\widetilde{v}^\varepsilon) = F_\varepsilon \begin{pmatrix} v^\varepsilon \\ \theta^\varepsilon \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} F_\varepsilon^1(\widetilde{v}^\varepsilon) \\ F_\varepsilon^2(\widetilde{v}^\varepsilon) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} -\mathcal{P} J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla(J_\varepsilon v^\varepsilon)) + \mathcal{P}(\theta^\varepsilon e_2) \\ -J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon \cdot \nabla J_\varepsilon \theta^\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

断言: F_ε: $E^m(\mathbb{R}^2) \times H^m(\mathbb{R}^2) \longmapsto E^m(\mathbb{R}^2) \times H^m(\mathbb{R}^2)$ 是局部 Lip 连续的. 事

实上, 利用 C-Z 算子在 L^2 空间的有界性及 Moser 型估计, 可见

$$\begin{aligned}
&\|F_\varepsilon^1(\widetilde{v}_1^\varepsilon)-F_\varepsilon^1(\widetilde{v}_2^\varepsilon)\|_{E^m}\\
\leqslant&\|J_\varepsilon(J_\varepsilon v_1^\varepsilon\cdot\nabla(J_\varepsilon(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon)))\|_{H^m}+\|J_\varepsilon(J_\varepsilon(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon)\cdot\nabla(J_\varepsilon v_2^\varepsilon))\|_{H^m}\\
&+\|\theta_1^\varepsilon e_2-\theta_2^\varepsilon e_2\|_{H^m}\\
\leqslant&\|J_\varepsilon v_1^\varepsilon\|_\infty\|J_\varepsilon(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon)\|_{H^m}+\|J_\varepsilon v_1^\varepsilon\|_{H^m}\|J_\varepsilon(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon)\|_\infty\\
&+\|J_\varepsilon(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon)\|_{H^m}\|\nabla(J_\varepsilon v_2^\varepsilon)\|_\infty+\|J_\varepsilon(v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon)\|_\infty\|\nabla(J_\varepsilon v_2^\varepsilon)\|_{H^m}\\
&+\|\theta_1^\varepsilon-\theta_2^\varepsilon\|_{H^m}\\
\leqslant&\frac{C}{\varepsilon}\|v_1^\varepsilon\|_{H^m}\|v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\|_{H^m}+\frac{C}{\varepsilon}\|v_2^\varepsilon\|_{H^m}\|v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\|_{H^m}+\|\theta_1^\varepsilon-\theta_2^\varepsilon\|_{H^m}\\
\leqslant&C(\varepsilon,\|\widetilde{v}_1^\varepsilon\|_{H^m},\|\widetilde{v}_2^\varepsilon\|_{H^m})\|\widetilde{v}_1^\varepsilon-\widetilde{v}_2^\varepsilon\|_{H^m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|F_\varepsilon^2(\widetilde{v}_1^\varepsilon)-F_\varepsilon^2(\widetilde{v}_2^\varepsilon)\|_{H^m}\leqslant&\frac{C}{\varepsilon}\|v_1^\varepsilon\|_{H^m}\|\theta_1^\varepsilon-\theta_2^\varepsilon\|_{H^m}+\frac{C}{\varepsilon}\|\theta_2^\varepsilon\|_{H^m}\|v_1^\varepsilon-v_2^\varepsilon\|_{H^m}\\
\leqslant&C(\varepsilon,\|\widetilde{v}_1^\varepsilon\|_{H^m},\|\widetilde{v}_2^\varepsilon\|_{H^m})\|\widetilde{v}_1^\varepsilon-\widetilde{v}_2^\varepsilon\|_{H^m}.
\end{aligned}$$

因此, 利用 Picard 定理, 对于任意的 $m>1$ 及任意固定的 $\varepsilon>0$, 存在 $T_\varepsilon=T_\varepsilon(\widetilde{v}_0^\varepsilon(x))>0$, 使得正则化问题 $(\mathrm{B})_\varepsilon$ 存在唯一的解 $\widetilde{v}^\varepsilon\in C^1([0,T_\varepsilon);E^m(\mathbb{R}^2)\times H^m(\mathbb{R}^2))$.

第三步. 正则化问题的整体适定性.

断言: 对于任意固定的 $\varepsilon>0$, $(v_0^\varepsilon(x),\theta_0^\varepsilon(x))\in E^m(\mathbb{R}^2)\times H^m(\mathbb{R}^2)$, 则正则化问题 $(\mathrm{B})_\varepsilon$ 存在唯一的整体解 $(v^\varepsilon,\theta^\varepsilon)\in C^1([0,\infty);E^m(\mathbb{R}^2)\times H^m(\mathbb{R}^2))$.

断言的证明 (a) 用 v^ε 及 θ^ε 与正则方程作 L^2 内积, 利用光滑子的性质与 $\mathrm{div}v^\varepsilon=0$, 就得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\varepsilon(t)\|_2^2\leqslant\|\theta^\varepsilon\|_2\|v^\varepsilon\|_2,\quad\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta^\varepsilon(t)\|_2^2=0,$$

由此推得

$$\|\theta^\varepsilon(t)\|_2=\|\theta_0(x)\|_2,\quad 及\ \sup_{t\in[0,T]}\|v^\varepsilon(t)\|_2\leqslant(1+T)(\|v_0\|_2+\|\theta_0\|_2).$$

(b) H^m-能量估计. 用 D^α 作用于正则方程

$$v_t^\varepsilon=-\mathcal{P}J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon\cdot\nabla(J_\varepsilon v^\varepsilon))+\mathcal{P}(\theta^\varepsilon e_2)$$

的两边, 然后用 $D^\alpha v^\varepsilon$ 与所得的方程作 L^2 内积, 利用交换子估计与 $\mathrm{div}v^\varepsilon=0$, 容

易看出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^\varepsilon(t)\|_{H^m}^2\\
\leqslant&-\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(D^\alpha(\mathcal{P}J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon\cdot\nabla(J_\varepsilon v^\varepsilon)))-D^\alpha(\mathcal{P}(\theta^\varepsilon e_2))\Big)D^\alpha v^\varepsilon dx\\
\leqslant&-\sum_{|\alpha|\leqslant m}\bigg\{\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\mathcal{P}\big(D^\alpha((J_\varepsilon v^\varepsilon\cdot\nabla(J_\varepsilon v^\varepsilon))-(J_\varepsilon v^\varepsilon\cdot\nabla D^\alpha(J_\varepsilon v^\varepsilon))\Big)D^\alpha J_\varepsilon v^\varepsilon dx\\
&-\int_{\mathbb{R}^2}(D^\alpha\mathcal{P}(\theta^\varepsilon e_2))D^\alpha v^\varepsilon dx\\
\leqslant&C\Big(\|\nabla J_\varepsilon v^\varepsilon\|_\infty\|v^\varepsilon\|_{H^m}+\|v^\varepsilon\|_{H^m}\|\nabla J_\varepsilon v^\varepsilon\|_\infty+\|\theta^\varepsilon\|_{H^m}\Big)\|v^\varepsilon\|_{H^m}.
\end{aligned}
$$

从而推出

$$
\frac{d}{dt}\|v^\varepsilon(t)\|_{H^m}\leqslant C\big(1+\|\nabla J_\varepsilon\widetilde{v}^\varepsilon\|_\infty\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\big).
$$

完全类似的推导过程, 有

$$
\frac{d}{dt}\|\theta^\varepsilon(t)\|_{H^m}\leqslant C\|\nabla J_\varepsilon v^\varepsilon\|_\infty(\|v^\varepsilon\|_{H^m}+\|\theta^\varepsilon\|_{H^m})\leqslant C\|\nabla J_\varepsilon\widetilde{v}^\varepsilon\|_\infty\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}.
$$

合并上面两个估计, 就得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\widetilde{v}^\varepsilon(t)\|_{H^m}\leqslant&C\big(1+\|\nabla J_\varepsilon\widetilde{v}^\varepsilon\|_\infty\big)\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\\
\leqslant&C(\varepsilon)\big(1+\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{L^2}\big)\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\\
\leqslant&C(\varepsilon)\big(1+(1+T)\|\widetilde{v}_0\|_{L^2}\big)\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\\
\leqslant&C(\varepsilon,\|\widetilde{v}_0\|_{L^2},T)\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m},\qquad\forall\varepsilon>0.
\end{aligned}\tag{1.5}
$$

利用 Gronwall 不等式就得

$$
\sup_{t\in[0,T]}\|\widetilde{v}^\varepsilon(t)\|_{H^m}\leqslant\|\widetilde{v}_0\|_{H^m}\exp\Big(C\big(\varepsilon,\|\widetilde{v}_0\|_{L^2},T\big)\Big).
$$

由常微分方程的延拓定理就证明了正则化问题的整体适定性.

第四步. $(\mathrm{B})_\varepsilon$ 解的一致估计与 $(\mathrm{B})_0$ 的局部存在性.

断言: 设 $m>2$, 对于任意的 $\tilde{v}^\varepsilon(0)\triangleq\tilde{v}_0(x)=(v_0(x),\theta_0(x))\in E^m(\mathbb{R}^2)\times H^m(\mathbb{R}^2)$, 存在

$$
T=\frac{1}{2C(1+\|\widetilde{v}_0(x)\|_{H^m})}>0
$$

使得问题 $(\mathrm{B})_\varepsilon$ 的解满足:

(1) $\{\widetilde{v}^\varepsilon(t)\}$ 在 $C([0,T];E^m(\mathbb{R}^2)\times H^m(\mathbb{R}^2))$ 一致有界.

(2) $\left\{\dfrac{d}{dt}\widetilde{v}^\varepsilon(t)\right\}$ 在 $C([0,T];E^{m-1}(\mathbb{R}^2)\times H^{m-1}(\mathbb{R}^2))$ 一致有界.

事实上, 对于 $m>2$, 利用 Sobolev 嵌入定理, (1.5) 就意味着

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{v}^\varepsilon(t)\|_{H^m}\leqslant C\big(1+\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\big)\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\leqslant C\big(1+\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\big)^2.$$

由 Gronwall 不等式, 就得

$$1+\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\leqslant\frac{1+\|\widetilde{v}_0\|_{H^m}}{1-C(1+\|\widetilde{v}_0\|_{H^m})t}.$$

因此

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}\leqslant 2(1+\|\widetilde{v}_0\|_{H^m}).$$

另一方面

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{d}{dt}\widetilde{v}^\varepsilon(t)\Big\|_{H^{m-1}}\leqslant&\|-\mathcal{P}J_\varepsilon(J_\varepsilon v^\varepsilon\cdot\nabla(J_\varepsilon v^\varepsilon))\|_{H^{m-1}}+\|\mathcal{P}(\theta^\varepsilon e_2)\|_{H^{m-1}}\\&+\|J_\varepsilon((J_\varepsilon v^\varepsilon\cdot J_\varepsilon\theta^\varepsilon))\|_{H^{m-1}}\leqslant 2\|\widetilde{v}^\varepsilon\|_{H^m}^2.\end{aligned}$$

因此, 就得到了 $\left\{\dfrac{d}{dt}\widetilde{v}^\varepsilon(t)\right\}$ 在 $C([0,T];E^{m-1}(\mathbb{R}^2)\times H^{m-1}(\mathbb{R}^2))$ 一致有界.

局部适定性的证明 根据上面建立的一致性估计与 Aubin 的紧致性原理, $\{\widetilde{v}^\varepsilon\}$ 是

$$C([0,T];E^{m-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)\oplus H^{m-1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^2))$$

中的列紧集. 同时, 对于任意的 $s<m$, 它也是 $C([0,T];E^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)\oplus H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^2))$ 中的列紧集. 因此, 由 Sobolev 嵌入定理, 对于任意的 $m>2$, $\{\widetilde{v}^\varepsilon\}$ 是 $C([0,T];C^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^2)\oplus C^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^2))$ 中的列紧集. 通过极限过程, 可以得到极限函数 $\widetilde{v}\in C([0,T];E^m(\mathbb{R}^2)\times H^m(\mathbb{R}^2))$ 满足

$$\frac{d}{dt}\widetilde{v}=\begin{pmatrix}-\mathcal{P}(v\cdot\nabla v)+\mathcal{P}(\theta e_2)\\-(v\cdot\nabla\theta)\end{pmatrix}.$$

根据第一个方程 $\mathcal{P}(v_t+v\cdot\nabla v+\theta e_2)=0$, 就推得存在函数 $\pi(x)$ 满足

$$v_t+v\cdot\nabla v-\theta e_2=\nabla\pi.$$

第五步. 唯一性. 设

$$\widetilde{v}_1=\begin{pmatrix}v_1\\\theta_1\end{pmatrix},\qquad \widetilde{v}_2=\begin{pmatrix}v_2\\\theta_2\end{pmatrix}$$

是无黏问题具有相同初值的两个解. 令 $v = v_1 - v_2$, $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\pi = \pi_1 - \pi_2$, 则

$$\begin{cases} v_t + v_1 \cdot \nabla v + v \cdot \nabla v_2 = -\nabla \pi + \theta e_2, \\ \theta_t + v_1 \cdot \nabla \theta + v \cdot \nabla \theta_2 = 0, \\ \mathrm{div} v = 0, \\ v(x,0) = 0, \quad \theta(x,0) = 0. \end{cases}$$

对上面方程作 L^2 内积, 容易推出

$$\frac{d}{dt}\|\widetilde{v}\|_{L^2} \leqslant (1 + \|\nabla \widetilde{v}_2\|_\infty)\|\widetilde{v}\|_{L^2}.$$

由于 $\widetilde{v}_2 \in C([0,T]; E^m(\mathbb{R}^2) \times H^m(\mathbb{R}^2))$ 且 $m > 2$, 因此

$$\|\nabla v_2\|_\infty \leqslant \|v_2\|_{H^m}, \qquad \|\nabla \theta_2\|_\infty \leqslant \|\theta_2\|_{H^m}, \qquad \forall t \in [0,T].$$

这样一来, 利用 Gronwall 不等式就推出

$$\widetilde{v} = \begin{pmatrix} v \\ \theta \end{pmatrix} = 0, \qquad t \in [0,T].$$

第六步. Blow-up 准则. 它等价于证明如下事实:

$$\limsup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[\|v\|_{H^m} + \|\theta\|_{H^m}\right] = \infty \Longleftrightarrow \int_0^T \|\nabla \theta\|_\infty dt = \infty.$$

必要性. 假设

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[\|v\|_{H^m} + \|\theta\|_{H^m}\right] \leqslant C_T < \infty,$$

则由 Sobolev 嵌入定理 $H^m(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $m > 2$ 就可推出

$$\int_0^T \|\nabla \theta\|_\infty dt \leqslant M_T < \infty.$$

充分性. 假设

$$\int_0^T \|\nabla \theta\|_\infty dt \leqslant M_T < \infty.$$

对 $(\mathrm{B})_0$ 的速度场方程取涡度形式

$$\omega_t + v \cdot \nabla \omega = \theta_{x_1}, \qquad \omega = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1.$$

利用粒子轨道方法, 就有

$$\omega(\Psi(t,\alpha)) = \omega_0(\alpha) + \int_0^t \theta_{x_1}(\Psi(\tau,\alpha))d\tau,$$

满足

$$\frac{d\Psi(t,\alpha)}{dt}=v(\Psi(t,\alpha),t),\qquad \Psi(t,\alpha)=\alpha.$$

注意到 $\mathrm{div}v=0$, 利用 Minkowski 不等式及 Sobolev 嵌入定理就得

$$\|\omega(\cdot,t)\|_p\leqslant\|\omega_0\|_p+\int_0^T\|\nabla\theta(\cdot,\tau)\|_p d\tau\leqslant C(\|v_0\|_{H^m},\|\theta_0\|_{H^m},M_T,C_T),\quad 2\leqslant p\leqslant\infty.$$

另一方面, 用 ∇ 作用于第二个方程, 就是

$$\nabla\theta_t+(v\cdot\nabla)\nabla\theta=(\nabla v)\nabla\theta.$$

因此, 对于任意的 $2\leqslant p<\infty$, 有

$$\|\nabla\theta\|_p\leqslant\|\nabla\theta_0\|_p+\int_0^T\|\nabla\theta\|_\infty\|\nabla v\|_p d\tau\leqslant\|\nabla\theta_0\|_p+C_p\int_0^T\|\nabla\theta\|_\infty\|\omega\|_p d\tau.$$

综合上面得到的两个估计, 就推出

$$\|\omega\|_p+\|\nabla\theta\|_p\leqslant\|\omega_0\|_p+\|\nabla\theta_0\|_p+\int_0^T(1+\|\nabla\theta\|_\infty)(\|\omega(\cdot,t)\|_p+\|\nabla\theta\|_p)d\tau.$$

Gronwall 不等式及 Sobolev 嵌入定理就意味着

$$\begin{aligned}\|\omega\|_p+\|\nabla\theta\|_p\leqslant&(\|\omega_0\|_p+\|\nabla\theta_0\|_p)\exp\left[\int_0^T(1+\|\nabla\theta\|_\infty)d\tau\right]\\ \leqslant&C(\|v_0\|_{H^m},\|\theta_0\|_{H^m},M_T,C_T),\qquad 2\leqslant p<\infty,\quad m>2.\end{aligned}$$

据此及 log-型的不等式, 就可以推出

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_\infty\leqslant&C\Big[1+\|\omega\|_p+\|\omega\|_\infty\big(1+\log(e+\|v\|_{H^m})\big)\Big]\\ \leqslant&C(\|v_0\|_{H^m},\|\theta_0\|_{H^m},M_T,C_T)\big(1+\log(e+\|v\|_{H^m})\big).\end{aligned}$$

利用能量方法与交换子估计, 容易推出

$$\begin{aligned}\frac{d\|v\|_{H^m}}{dt}&\leqslant C(1+\|\nabla v\|_\infty)\|v\|_{H^m}\\ &\leqslant C(\|v_0\|_{H^m},\|\theta_0\|_{H^m},M_T,C_T)\big(1+\log(e+\|v\|_{H^m})\big)\|v\|_{H^m}.\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|v\|_{H^m}\leqslant C(\|v_0\|_{H^m},\|\theta_0\|_{H^m},M_T,C_T).$$

最后, 从

$$\frac{d\|\theta\|_{H^m}}{dt}\leqslant C\|\nabla v\|_\infty\|\theta\|_{H^m}\leqslant C\|v\|_{H^m}\|\theta\|_{H^m}$$

及 Gronwall 不等式就得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\theta\|_{H^m}\leqslant C(\|v_0\|_{H^m},\|\theta_0\|_{H^m},M_T,C_T).$$

注记 1.2 (1) 利用 Chen-Miao-Zhang[CMZ4] 的方法, 可以建立 Fourier 层次上的判别准则. 另一方面, 与 MHD 方程不同, Boussinesq 方程似乎是密度场控制速度! 在 MHD 方程中, 流场决定了磁流体运动.

(2) Blow-up 机制仍然适合于具有黏性或部分黏性的 Boussinesq 方程 (B1) 及 (B2). 具体地讲, 定理的证明本质上归结于证明

$$\int_0^T \|\nabla\theta\|_\infty dt < \infty.$$

定理 1.1 的证明 第一步. 预备性估计. 所谓预备性估计是指

$$\|\theta\|_p, \|v\|_p < \infty, \quad 2 \leqslant p \leqslant \infty, \quad \|\omega\|_p < \infty, \quad 2 \leqslant p < \infty.$$

(a) 设 $T > 0$ 是给定的时间. 由输运方程

$$\theta_t + v \cdot \nabla\theta = 0,$$

利用流场 v 的不可压条件, 自由输运方程保持 L^p 范数, 因此

$$\|\theta(t)\|_p \leqslant \|\theta_0\|_p, \quad \forall t \in [0, T], \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.6}$$

(b) 用 $|v|^{p-2}v$ 乘以速度场所满足的方程的两边, 分部积分可见

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|v\|_p^p + \nu(p-1)\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla v\|_2^2 |v|^{p-2} dx \leqslant \|\theta\|_p \|v\|_p^{p-1} \leqslant \|\theta_0\|_p \|v\|_p^{p-1},$$

因此

$$\|v\|_p \leqslant \|v_0\|_p + \|\theta_0\|_p T, \quad 2 \leqslant p < \infty, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.7}$$

(c) 用 $\nabla\times$ 作用速度场所满足的方程, 就得其涡度形式

$$\omega_t + v \cdot \nabla\omega = \theta_{x_1} + \nu\Delta\omega, \qquad \omega = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1. \tag{1.8}$$

设 $p \geqslant 2$,(1.8) 两边同乘以 $\omega|\omega|^{p-2}$, 并且在 $\mathbb{R}^2$ 上积分, 采用分部积分技术

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} |\omega|^p dx + (p-1)\nu \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\omega|^2 |\omega|^{p-2} dx \\
=&-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla|\omega|^p dx - \int_{\mathbb{R}^2} \theta_{x_1} \omega |\omega|^{p-2} dx \\
=&(p-1)\int_{\mathbb{R}^2} \theta\omega_{x_1} |\omega|^{p-2} dx \\
\leqslant&\frac{(p-1)\nu}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\omega|^2 |\omega|^{p-2} dx + \frac{(p-1)}{2\nu}\|\theta\|_p^2 \|\omega\|_p^{p-2}.
\end{aligned}$$

因此, 就得

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}|\omega|^p dx+\frac{(p-1)\nu}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\omega|^2|\omega|^{p-2}dx\leqslant\frac{(p-1)}{2\nu}\|\theta\|_p^2\|\omega\|_p^{p-2}. \tag{1.9}$$

当 $p=2$ 时, 在 $[0,T]$ 上积分, 可得

$$\|\omega\|_2^2+\nu\int_0^T\|\nabla\omega\|_2^2ds\leqslant\|\omega_0\|_2^2+\frac{1}{\nu}\|\theta_0\|_2^2T,\quad \forall t\in[0,T]. \tag{1.10}$$

自然, $\forall t\in[0,T]$, 就可推出

$$\int_0^T\|\nabla\omega\|_2ds\leqslant\sqrt{T}\Big(\int_0^T\|\nabla\omega\|_2^2ds\Big)^{\frac{1}{2}}\leqslant C\|\omega_0\|_2\sqrt{T}+C\|\theta_0\|_2T \tag{1.11}$$

(与前面速度场推导出的等价). 另一方面, 对于 $p\in[2,\infty)$, 可得

$$\|\omega\|_p^2\leqslant\|\omega_0\|_p^2+\frac{(p-1)}{\nu}\|\theta_0\|_p^2T\leqslant(\|\omega_0\|_p+\frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{\nu}}\|\theta_0\|_p\sqrt{T})^2,$$

故

$$\|\omega\|_p\leqslant\|\omega_0\|_p+\frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{\nu}}\|\theta_0\|_p\sqrt{T},\quad ,\forall t\in[0,T],\quad p\in[2,\infty). \tag{1.12}$$

(d) 回忆 $\mathbb{R}^2$ 上的 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式, 可以推出

$$\|f\|_\infty\leqslant C\|f\|_2^{\frac{r-2}{2r-2}}\|\nabla f\|_r^{\frac{r}{2r-2}},\quad \forall f\in W^{1,r}(\mathbb{R}^2),\quad r>2. \tag{1.13}$$

因此, 由 Calderón-Zygmund 不等式, 对于任意固定的 $r\in(2,\infty)$, 使得

$$\|v\|_\infty\leqslant C\|v\|_2^{\frac{r-2}{2r-2}}\|\nabla v\|_r^{\frac{r}{2r-2}}\leqslant C\|v\|_2^{\frac{r-2}{2r-2}}\|\omega\|_r^{\frac{r}{2r-2}}\leqslant C(v_0,\theta_0,T,\nu,r). \tag{1.14}$$

注记 1.3 关于 $\|v\|_\infty$ 的推导过于繁琐. 事实上, (1.7) 在 $p=\infty$ 时就对应着极大值原理, 也可以通过取 $p\longrightarrow\infty$ 得到估计 (1.14), 其中常数 $C(v_0,\theta_0,T,\nu)$. 这样就可以大幅度的简化上述的推导.

第二步. 速度场在空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ 中的估计.

用 $D=(\partial_{x_1},\partial_{x_2})$ 作用于流体涡度方程 (1.8) 的两边, 即

$$(D\omega)_t-\nu\Delta(D\omega)=-D[v\cdot\nabla\omega]-D\theta_{x_1},$$

两边同乘以 $D\omega|D\omega|^{p-2}$ $(p>2)$, 积分并利用加权的 Hölder 不等式可见

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|D\omega\|_p^p+(p-1)\nu\int_{\mathbb{R}^2}|D^2\omega|^2|D\omega|^{p-2}dx\\
=&-\int_{\mathbb{R}^2}[D(v\cdot\nabla\omega)]|D\omega|^{p-2}D\omega dx-\int_{\mathbb{R}^2}D\theta_{x_1}|D\omega|^{p-2}D\omega dx\\
=&(p-1)\int_{\mathbb{R}^2}v\cdot\nabla\omega D^2\omega|D\omega|^{p-2}dx+(p-1)\int_{\mathbb{R}^2}\theta_{x_1}D^2\omega|D\omega|^{p-2}dx\\
\leqslant&\frac{(p-1)\nu}{4}\int_{\mathbb{R}^2}|D^2\omega|^2|D\omega|^{p-2}dx+\frac{(p-1)}{\nu}\int_{\mathbb{R}^2}|v|^2|D\omega|^pdx\\
&+\frac{(p-1)\nu}{4}\int_{\mathbb{R}^2}|D^2\omega|^2|D\omega|^{p-2}dx+\frac{(p-1)}{\nu}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\theta|^2|D\omega|^{p-2}dx.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|D\omega\|_p^p+\frac{(p-1)\nu}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|D^2\omega|^2|D\omega|^{p-2}dx\\
\leqslant&\frac{(p-1)}{\nu}\int_{\mathbb{R}^2}|v|^2|D\omega|^pdx+\frac{(p-1)}{\nu}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\theta|^2|D\omega|^{p-2}dx\\
\leqslant&\frac{(p-1)}{\nu}\|v\|_\infty^2\|D\omega\|_p^p+\frac{2(p-1)}{p\nu}\|\nabla\theta\|_p^p+\frac{(p-1)(p-2)}{p\nu}\|D\omega\|_p^p,
\end{aligned}
$$

这里用到 Young 不等式

$$
ab\leqslant\frac{2}{p}a^{\frac{p}{2}}+\frac{p-2}{p}b^{\frac{p}{p-2}}.
$$

整理就得

$$
\frac{d}{dt}\|D\omega\|_p^p\leqslant C\|D\omega\|_p^p+C\|\nabla\theta\|_p^p,\quad\forall t\in[0,T].\tag{1.15}
$$

其次, 用算子 $\nabla^\perp=(-\partial_{x_2},\partial_{x_1})$ 作用于密度场两边, 就得

$$
(\nabla^\perp\theta)_t+v\cdot\nabla\nabla^\perp\theta=\nabla^\perp\theta\cdot\nabla v.
$$

两边同乘以 $\nabla^\perp\theta|\nabla^\perp\theta|^{p-2}$, 分部积分可以推出

$$
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|_p^p=\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla v)\nabla^\perp\theta\nabla^\perp\theta|\nabla^\perp\theta|^{p-2}dx\leqslant\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v||\nabla\theta|^pdx.
$$

对于 $p>2$, 利用 Brezis-Wainger 的 log-型不等式,

$$
\|f\|_\infty\leqslant C(1+\|f\|_2+\|\nabla f\|_2)[1+\log^+\|\nabla f\|_p]^{\frac{1}{2}},\quad\forall f\in L^2\cap W^{1,p}(\mathbb{R}^2),\tag{1.16}
$$

注意到 (1.7), 有

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|_p^p&\leqslant p\|\nabla v\|_\infty\|\nabla\theta\|_p^p\\
&\leqslant C(1+\|Dv\|_2+\|D^2v\|_2)(1+\log^+(\|D^2v)\|_p))\|\nabla\theta\|_p^p\\
&\leqslant C(1+\|D\omega\|_2)(1+\log^+(\|D\omega\|_p^p+\|\nabla\theta\|_p^p))\|\nabla\theta\|_p^p,
\end{aligned}\tag{1.17}
$$

这里 $C = C(v_0, \theta_0, T, \nu, p)$.

令

$$X(t) = \|\nabla\theta\|_p^p + \|D\omega\|_p^p.$$

可以看出, (1.15) 与 (1.17) 就意味着

$$\frac{dX(t)}{dt} \leqslant C(1 + \|D\omega\|_2)(1 + \log^+ X)X, \quad \forall t \in [0, T], \quad C = C(v_0, \theta_0, T, \nu, p).$$

利用 Gronwall 不等式, 容易推出

$$X(t) \leqslant X(0) \exp\Big[\exp\Big(CT + C\int_0^T \|D\omega(s)\|_2 ds\Big)\Big], \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.18}$$

由前面的估计 (1.11), 就得

$$\|\nabla\theta\|_p + \|D\omega\|_p \leqslant C(v_0, \theta_0, T, \nu, p), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall p \geqslant 2. \tag{1.19}$$

再次利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式与 Calderón-Zygmund 不等式

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_\infty &\leqslant C\|\nabla v\|_2^{\frac{p-2}{2p-2}}\|D^2 v\|_p^{\frac{p}{2p-2}} \leqslant C\|\omega\|_2^{\frac{p-2}{2p-2}}\|D\omega\|_p^{\frac{p}{2p-2}} \\ &\leqslant C(v_0, \theta_0, T, \nu, p), \quad \forall t \in [0, T], \quad p \in (2, \infty).\end{aligned} \tag{1.20}$$

另一方面, 从 (1.17) 的第一个不等式

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|_r \leqslant \|\nabla v\|_\infty \|\nabla\theta\|_r, \quad r \geqslant 2$$

及 Gronwall 引理, 就可以推出

$$\|\nabla\theta\|_r \leqslant \|\nabla\theta_0\|_r \exp\Big(\int_0^t \|\nabla v(s)\|_\infty ds\Big). \tag{1.21}$$

如果 $\|\nabla\theta_0\|_r \leqslant C$ 关于 r 一致有界, 则取 $r \to \infty$ 可见

$$\|\nabla\theta\|_\infty \leqslant \|\nabla\theta_0\|_\infty \exp\Big(\int_0^t \|\nabla v(s)\|_\infty ds\Big) \leqslant C, \quad \forall t \in [0, T], \tag{1.22}$$

其中 $C = C(\|v_0\|_{W^{2,p}}, \|\theta_0\|_{W^{2,p}}, T, \nu, p)$, 这里用到对于任意的整数 $m > 2$, 总有嵌入关系

$$H^m(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{2,p}(\mathbb{R}^2), \qquad 2 \leqslant p < \infty.$$

第三步. 扩散黏性极限.

设 (v, p, θ) 与 $(\tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\theta})$ 分别是 (B1) 与 (B) 的解, 具有相同的初值 (v_0, θ_0). 注意到上面估计对于具黏性的 Boussinesq 方程仍然有效. 进而有如下不依赖 κ 的先验估计:

$$\|\nabla\tilde{v}\|_\infty + \|\nabla\tilde{\theta}\|_\infty + \|\tilde{v}\|_{W^{2,p}} + \|\tilde{\theta}\|_{W^{2,p}} \leqslant C(\|v_0\|_{W^{2,p}}, \|\theta_0\|_{W^{1,p}}, T, \nu, p). \tag{1.23}$$

由 (B)~(B1), 记 $\Theta=\theta-\tilde{\theta}$, $\Pi=\pi-\tilde{\pi}$, $V=v-\tilde{v}$, 则有

$$\begin{cases}\Theta_t+v\cdot\nabla\Theta+V\cdot\nabla\tilde{\theta}=\kappa\Delta\Theta+\kappa\Delta\tilde{\theta},\\ V_t+v\cdot\nabla V+V\cdot\nabla\tilde{v}=-\nabla\Pi+\nu\Delta V+\Theta e_2,\\ \mathrm{div}V=0.\end{cases}\tag{1.24}$$

(1.24) 的第一个方程两边与 Θ 作 L^2 内积, 积分可见

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Theta\|_2^2+\kappa\|\nabla\Theta\|_2^2&=-\int_{\mathbb{R}^2}V\cdot\nabla\tilde{\theta}\Theta dx-\kappa\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\tilde{\theta}\cdot\nabla\Theta dx\\&\leqslant\|\nabla\tilde{\theta}\|_\infty\|V\|_2\|\Theta\|_2+\kappa\|\nabla\tilde{\theta}\|_2\|\nabla\Theta\|_2\\&\leqslant C(\|V\|_2^2+\|\Theta\|_2^2)+\frac{\kappa}{2}\|\nabla\tilde{\theta}\|_2^2+\frac{\kappa}{2}\|\nabla\Theta\|_2^2,\end{aligned}$$

整理就得

$$\frac{d}{dt}\|\Theta\|_2^2+\kappa\|\nabla\Theta\|_2^2\leqslant C\|\Theta\|_2^2+C\|V\|_2^2+C\kappa\|\nabla\tilde{\theta}\|_2^2.\tag{1.25}$$

另一方面, (1.24) 的第二个方程两边同乘以 V, 积分两边就可以推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V\|_2^2+\nu\|\nabla V\|_2^2&=-\int_{\mathbb{R}^2}V\cdot\nabla\tilde{v}Vdx+\int_{\mathbb{R}^2}\Theta e_2Vdx\\&\leqslant\|\nabla\tilde{v}\|_\infty\|V\|_2^2+\|\Theta\|_2\|V\|_2\\&\leqslant C(\|V\|_2^2+\|\Theta\|_2^2),\end{aligned}\tag{1.26}$$

这里用到了估计 (1.23).

令

$$X(t)=\|\Theta(t)\|_2^2+\|V(t)\|_2^2.$$

利用 (1.25) 及 (1.26), 可见

$$\frac{dX(t)}{dt}\leqslant CX(t)+C\kappa\|\nabla\tilde{\theta}\|_2^2.\tag{1.27}$$

利用 Gronwall 不等式可以推出

$$\begin{aligned}X(t)&\leqslant e^{Ct}\Big(X(0)+C\kappa\int_0^t\|\nabla\tilde{\theta}\|_2^2e^{-Cs}ds\Big)\\&\leqslant C\kappa\int_0^t\|\nabla\tilde{\theta}\|_2^2e^{C(t-s)}ds\qquad(X(0)=0)\\&\leqslant Ce^{CT}\kappa\int_0^T\|\nabla\tilde{\theta}(t)\|_2^2dt\\&\leqslant C\kappa.\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\|v(t)-\tilde{v}(t)\|_2+\|\theta(t)-\tilde{\theta}(t)\|_2)\leqslant C\sqrt{\kappa}. \tag{1.28}$$

□

关于 H^s 的情形, 仅需插值就可以推出相应的衰减, 即用到下面事实:

$$H^s=[L^2,H^m]_\sigma,\quad \|\cdot\|_{H^m}\leqslant C,\qquad 0<\sigma<1,$$

就可推出在 H^s 拓扑意义下的扩散黏性极限.

另外, 对任意 $p>2$, 可以在 $W^{2,p}(\mathbb{R}^2)$ 框架下建立 (B) 的局部适定性与 Blow-up 准则. 类似于 H^s 框架下的讨论, 容易推出如下结果:

推论 1.4 *设 $2<p<\infty$, $(v_0,\theta_0)\in W^{2,p}(\mathbb{R}^2)$, 则 (B1) 存在唯一解*

$$(v,\theta)\in C([0,\infty);W^{2,p}(\mathbb{R}^2)).$$

进而, 对于 $q\in[p,\infty)$ 和 $T\in(0,\infty)$, 问题 (B) 的光滑解 (v,θ) 在 $\kappa\to 0$ 时, 收敛于问题 (B1) 对应的光滑解 $(\tilde{v},\tilde{\theta})$, 这里收敛是在 $C([0,T];W^{1,q}(\mathbb{R}^2))$ 拓扑意义的极限.

注记 1.4 定理 1.2 与定理 1.1 是类似的, 主要区别如下:

(1) 借助于温度满足扩散性方程, 可通过

$$\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|\theta\|_p^p+\kappa(p-1)\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\theta|^2|\theta|^{p-2}dx=0,\qquad 2\leqslant p<\infty.$$

容易看出

$$\|\theta(t)\|_p\leqslant\|\theta_0\|_p,\qquad 2\leqslant p\leqslant\infty, \tag{1.29}$$

这里 $p=\infty$ 对应着极大值原理. 因此, 再利用经典的能量技术, 就可以推出如下估计:

$$\|v(t)\|_p\leqslant\|v_0\|_p+T\|\theta_0\|_p,\quad \|\omega(t)\|_p\leqslant T^{\frac{1}{2}}\|\theta_0\|_p+T\|\omega_0\|_p,\quad t\in[0,T]. \tag{1.30}$$

(2) 利用能量积分

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\theta\|_p^p\leqslant\frac{p(p-1)}{2\kappa}\|v\|_\infty^2\|\nabla\theta\|_p^p,\quad \frac{d}{dt}\|\omega\|_p^p\leqslant\|\nabla\theta\|_p^p+(p-1)\|\omega\|_p^p,\quad t\in[0,T]$$

与 log-型不等式, 首先证明

$$\|\nabla\theta\|_p^p+\|\omega\|_p^p\leqslant C(\theta_0,v_0,T,p,\kappa),\quad t\in[0,T]. \tag{1.31}$$

然后, 利用类似于 (1.14) 的插值公式, 建立估计

$$\|v(t)\|_\infty\leqslant C(\theta_0,v_0,T,p),\quad t\in[0,T]. \tag{1.32}$$

(3) 用算子 D^2 作用于 θ 所满足的方程, 利用能量积分

$$\frac{d}{dt}\|D^2\theta\|_p^p \leqslant C + C\|D^2\theta\|_p^p, \qquad p > 2,$$

就得

$$\|D^2\theta\|_p \leqslant C(\theta_0, v_0, T, p, \kappa) \Longrightarrow \|\nabla\theta\|_\infty \leqslant C, \quad t \in [0, T]. \tag{1.33}$$

注记 1.5 如果记

$$W = \nabla^\perp\theta = (\partial_{x_2}\theta, -\partial_{x_1}\theta), \quad \omega = \text{curl}v = \partial_{x_1}v_2 - \partial_{x_2}v_1.$$

则 (B1) 可以转化成如下形式:

$$\begin{cases} \omega_t + v\cdot\nabla\omega - \nu\Delta\omega = \theta_{x_1}, \\ W_t + v\cdot\nabla W = \nabla v\cdot W. \end{cases} \tag{1.34}$$

有如下的观察:

(1) 涡度场依赖于 θ_{x_1}, 它恰好是 W 的第二个分量.

(2) 易见, W 与 $\omega = \nabla v$ 具有相同的正则性.

(3) 形式上 W 具有与 3 维 Euler 方程的涡度形式相同的困难, 即具有相同的涡度伸展项.

(4) 如果利用能量方法处理 (B1), 我们将会看到 W 在高阶 Sobolev 空间中的能量估计需要估计

$$\int_0^T \|\nabla v\|_\infty dt.$$

这是很困难的. 原因在于速度方程与温度 (密度) 方程耦合, 且温度方程缺少耗散项.

注记 1.6 Hou-Li 几乎同时获得了与 Chae 类似的结果, 他们主要利用了 log-型 Sobolev 不等式

$$\|\nabla v\|_\infty \leqslant C_0(\|\Delta v\|_2 + \|\nabla v\|_2 + 1)\Big[\log(e + \|\nabla v\|_2 + \|\nabla\Delta v\|_2)\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{1.35}$$

及新型的局部时间分析. 由于速度与温度方程的耦合产生了高阶的非线性项, 无法直接整体利用 log-型不等式, 为了克服这个困难, 就需要所谓的局部时间分析, 这样就可以减少非线性的阶数. 需要指出的是, 直接利用 Littlewood-Paley 理论与分频技术, 我们可以给出 (1.35) 一个很简单的证明, 详见第 1 章给出的 log-型 Sobolev 不等式.

4.2 $\mathbb{R}^2$ 中具部分黏性的 Boussinesq 方程在临界空间中的整体适定性

本节主旨是基于 Fourier 局部化技术及相应的正则性估计, 在低正则空间中建立 (B1) 方程的整体适定性.

定理 2.1 设 $v_0(x) \in L^2 \cap B^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{div} v_0(x) = 0$, $\theta_0 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2)$. 则 (B1) 存在唯一的整体解 (v, θ, π) 满足

$$v \in C(\mathbb{R}^+; L^2 \cap B^{-1}_{\infty,1}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^1) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^1_{\infty,1}),$$

$$\theta \in C_b(\mathbb{R}^+; B^0_{2,1}), \quad \nabla\pi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^0_{2,1}).$$

推论 2.2 设 $v_0 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{div} v_0 = 0$, $\theta_0 \in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2)$, 则方程 (B1) 存在唯一的整体解 (v, θ, π) 满足

$$v \in C(\mathbb{R}^+; B^0_{2,1}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^1_{2,1}) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^1_{\infty,1}),$$

$$\theta \in C_b(\mathbb{R}^+; B^0_{2,1}), \quad \nabla\pi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^0_{2,1}).$$

预备工具 首先回忆在第 1 章或第 2 章中讨论过的一些基本分析工具, 表现为 L^2 框架下的特殊形式.

引理 2.3 (log-型 Sobolev 不等式) $\forall \varepsilon > 0$, u 是光滑函数, 存在 $C > 0$ 满足

$$\|u\|_{L^1_t L^\infty} \leqslant C\varepsilon^{-1}\|u\|_{\mathcal{L}^1 B^1_{2,\infty}} \log\left(e + \frac{\|u\|_{\mathcal{L}^1 B^\varepsilon_{\infty,\infty}}}{\|u\|_{\mathcal{L}^1 B^1_{2,\infty}}}\right). \tag{2.1}$$

证明 由 Sobolev 嵌入 $B^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty$, 可见

$$\|u\|_{L^1_t L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^1_t B^0_{\infty,1}} = \sum_{q \geqslant -1} \|\Delta_q u\|_{L^1_t L^\infty}.$$

取 N 是待定的整数, 分频如下:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^1_t L^\infty} &= \sum_{-1 \leqslant q \leqslant N} \|\Delta_q u\|_{L^1_t L^\infty} + \sum_{q \geqslant N+1} 2^{-q\varepsilon} 2^{q\varepsilon} \|\Delta_q u\|_{L^1_t L^\infty} \\
&\leqslant CN\|u\|_{\mathcal{L}^1_t B^1_{2,\infty}} + C2^{-N\varepsilon}\|u\|_{\mathcal{L}^1_t B^\varepsilon_{\infty,\infty}} \\
&\leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{\mathcal{L}^1_t B^1_{2,\infty}}\left(N\varepsilon + 2^{-N\varepsilon}\frac{\|u\|_{\mathcal{L}^1_t B^\varepsilon_{\infty,\infty}}}{\|u\|_{\mathcal{L}^1_t B^1_{2,\infty}}}\right).
\end{aligned}$$

取

$$N = 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(\frac{\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^{\varepsilon}_{\infty,\infty}}}{\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^1_{2,\infty}}}\right)\right],$$

即可推出所需的估计. 事实上, 如果取

$$N = 1 + \left[\frac{1}{\varepsilon}\log_2\left(\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^{\varepsilon}_{\infty,\infty}}\right)\right],$$

就得到较 (2.1) 更常用的 log-型 Sobolev 不等式

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_t^1 L^\infty} &\leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^0_{\infty,\infty}} \log\left(e + \|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^{\varepsilon}_{\infty,\infty}}\right)\\ &\leqslant \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^1_{2,\infty}} \log\left(e + \|u\|_{\mathcal{L}_t^1 B^{\varepsilon}_{\infty,\infty}}\right).\end{aligned}$$

□

引理 2.4 (仿积估计) 设 $d=2$, 仿积估计有如下特殊的情形:

$$\|T_u v\|_{B^s_{2,\infty}} \lesssim \|u\|_\infty \|v\|_{B^s_{2,\infty}}, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

$$\|T_u v\|_{B^s_{2,\infty}} \lesssim \|u\|_{B^{s-r}_{2,\infty}} \|v\|_{B^r_{\infty,\infty}}, \quad s < r. \tag{2.3}$$

如果 $\mathrm{div}u = 0$, 则仿积余项的估计如下:

$$\|R(u^j, \partial_j v)\|_{B^s_{2,\infty}} \lesssim \begin{cases} \|u\|_{B^{s_1}_{2,\infty}} \|v\|_{B^{s_2}_{2,\infty}}, & 若\ s+2 = s_1 + s_2 > 0,\\ \|u\|_{B^1_{\infty,r_1}} \|v\|_{B^s_{2,r_2}}, & 若\ s+1 \geqslant 0, \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = 1. \end{cases} \tag{2.4}$$

引理 2.5 (交换子估计) $\mathrm{div}v = 0$, $d = 2$, 则

$$\sup_{q\geqslant -1} 2^{-q}\|[\Delta_q, v\cdot\nabla]u\|_2 \lesssim \|v\|_{B^1_{\infty,1}} \|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}}. \tag{2.5}$$

证明 一般情形参见 2.2 节中的交换子估计, 亦可以用前面的两个引理直接证明. 事实上

$$\begin{aligned}[\Delta_q, v\cdot\nabla]u &= [\Delta_q, T_{v^j}]\partial_j u - T_{\Delta_q \partial_j u} v^j - R(\Delta_q \partial_j u, v^j)\\ &\quad + \Delta_q T_{\partial_j u} v^j + \Delta_q R(\partial_j u, v^j)\\ &= [\Delta_q, T_{v^j}]\partial_j u - T'_{\Delta_q \partial_j u} v^j + \Delta_q T_{\partial_j u} v^j + \Delta_q R(\partial_j u, v^j)\\ &\triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4.\end{aligned}$$

***I_1* 的估计**. 根据支集关系, 并记 $h(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(\xi))$, 利用中值定理可见

$$\begin{aligned}I_1 &= \sum_{|q-q'|\leqslant 4} [\Delta_q, S_{q'-1}v^j]\Delta_{q'}\partial_j u\\ &= -\sum_{|q-q'|\leqslant 4} 2^{-q}\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^1 h(y)(y\cdot\nabla S_{q'-1}v^j(x-2^{-q}\tau y))\Delta_{q'}\partial_j u(x-2^{-q}y)d\tau dy.\end{aligned}$$

利用 Young 不等式, 就得

$$\sup 2^{-q}\|I_1\|_2 \lesssim \|\nabla v\|_\infty \|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}}.$$

I_2 的估计. 利用支集关系, I_2 可以表示成

$$I_2 = T'_{\Delta_q \partial_j u} v^j = \sum_{q' \geqslant q-2} S_{q'+2}\Delta_q \partial_j u \Delta_{q'} v^j.$$

因此

$$2^{-q}\|I_2\|_2 \lesssim 2^{-q}\|\Delta_q u\|_2 \sum_{q' \geqslant q-2} 2^{q-q'} 2^{q'} \|\Delta_{q'} v\|_\infty \lesssim \|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}} \|v\|_{B^1_{\infty,1}}.$$

I_3 的估计. 利用支集关系, I_3 可以表示成

$$I_3 = \Delta_q T_{\partial_j u} v^j = \sum_{|q-q'|\leqslant 4} \Delta_q (S_{q'-1}\partial_j u \Delta_{q'} v^j).$$

由仿积的连续性, 取 $s=-1$, $r=1$, 容易推出

$$\sup_{q\geqslant -1} 2^{-q}\|I_3\|_2 \lesssim \|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}} \|v\|_{B^1_{\infty,1}}.$$

I_4 的估计. 最后, 利用仿积估计 (2.4), 就推出

$$\sup_{q\geqslant -1} 2^{-q}\|I_4\|_2 \lesssim \|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}} \|v\|_{B^1_{\infty,1}}.$$

□

考虑线性 Stokes 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t u + v\cdot\nabla u - \Delta u + \nabla\pi = f, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u(0) = u_0(x). \end{cases} \tag{S}$$

有如下 Stokes 方程解的正则性估计.

命题 2.6 设 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^1_{\infty,1})$, $\mathrm{div} v = 0$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^{-1}_{2,\infty})$, 则对于 $u_0 \in B^{-1}_{2,\infty}$, 相应的 (S) 对应的解满足线性估计:

$$\begin{aligned} &\|u\|_{L^\infty_T(B^{-1}_{2,\infty})} + \|u\|_{\mathcal{L}^1_T(B^1_{2,\infty})} + \|\nabla\pi\|_{\mathcal{L}^1_T(B^{-1}_{2,\infty})} \\ \lesssim & e^{C\|v\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})}+CT} (\|u_0\|_{B^{-1}_{2,\infty}} + \|f\|_{\mathcal{L}^1_T(B^{-1}_{2,\infty})}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

证明思路 利用 Fourier 局部化技术可证明

$$\|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}}+\|u\|_{\mathcal{L}^1_T(;B^1_{2,\infty})}\leqslant Ce^{C\|v\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})}+CT}(\|u_0\|_{B^{-1}_{2,\infty}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_T(;B^{-1}_{2,\infty})}).$$

事实上, 第一项对应着第 2 章的命题 3.5, 第二项对应着第 2 章的命题 3.6 的端点情形. 但是, 由于 $p=2$, 证明不需要进行保测同胚变换, 仅仅需要一次 Fourier 局部化就行了. 例如, 关于正则化估计的第二项, 利用交换子估计命题 2.5 及高频部分的 Fourier 局部化就得

$$\sup_{q\in\mathbb{N}}2^{-q}\|u_q\|_{L^1_tL^2}\lesssim\|u_0\|_{B^{-1}_{2,\infty}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_t(B^{-1}_{2,\infty})}+\int_0^t\|v(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}}\|u(\tau)\|_{B^{-1}_{2,\infty}}d\tau.$$

至于低频部分, 显然

$$\|u_{-1}\|_{L^1_tL^2}\leqslant C\int_0^t\|u(\tau)\|_{B^{-1}_{2,\infty}}d\tau.$$

综上就推出

$$\|u\|_{\mathcal{L}^1_T(B^1_{2,\infty})}\lesssim\|u_0\|_{B^{-1}_{2,\infty}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_t(B^{-1}_{2,\infty})}+\int_0^t(1+\|v(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}})\|u(\tau)\|_{B^{-1}_{2,\infty}}d\tau.$$

因此, 利用 Gronwall 不等式就可推出所需要的估计.

关于压力部分, 用散度算子作用于线性方程 (S) 两边, 可以推出

$$\Delta\pi=\mathrm{div}f-\mathrm{div}(v\cdot\nabla u),$$

$$\nabla\pi=-\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(v\cdot\nabla u)+\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}f.$$

由于 $\mathrm{div}u=\mathrm{div}v=0$, $\mathrm{div}(v\cdot\nabla u)=\mathrm{div}(u\cdot\nabla v)$, 可以推出

$$\nabla\pi=\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}f-\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(u\cdot\nabla v).$$

两边取 Besov 范数, 就得

$$\begin{aligned}\|\nabla\pi\|_{\mathcal{L}^1_t(B^{-1}_{2,\infty})}&\leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}^1_t(B^{-1}_{2,\infty})}+C\|u\cdot\nabla v\|_{\mathcal{L}^1_t(B^{-1}_{2,\infty})}\\&\leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}^1_t(B^{-1}_{2,\infty})}+C\int_0^t\|u\|_{B^{-1}_{2,\infty}}\|v\|_{B^1_{\infty,1}}d\tau.\end{aligned}$$

利用前两项的估计就得到压力部分的估计. □

推论 2.7 (Besov 正则性的保持) $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;B^1_{\infty,1})$, $\mathrm{div}v=0$, $a_0\in B^{-1}_{2,\infty}$, $f\in\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;B^{-1}_{2,\infty})$, *假设* $a\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;B^{-1}_{2,\infty})$ *是输运方程*

$$\begin{cases}\partial_ta+v\cdot\nabla a=f,\\a(0)=a_0\end{cases}$$

的解, 则存在常数 C 使得对所有 $t\in\mathbb{R}^+$, 有

$$\|a\|_{L^\infty_T(B^{-1}_{2,\infty})}\leqslant Ce^{C\|v\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})}}(\|a_0\|_{B^{-1}_{2,\infty}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_T(B^{-1}_{2,\infty})}). \tag{2.7}$$

命题 2.8 (Vishik 的 log-型估计) 设 $p,r\in[1,\infty]$, $v\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+;\text{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\text{div}v=0$, $a_0\in B^0_{p,r}$. 设 a 是输运方程

$$\begin{cases}\partial_t a+v\cdot\nabla a=f,\\ a(0)=a_0(x)\end{cases}$$

的解, 则

$$\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T(B^0_{p,r})}\leqslant C\big(\|a_0\|_{B^0_{p,r}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_T(B^0_{p,r})}\big)\Big(1+\int_0^T\|\nabla v\|_\infty d\tau\Big). \tag{2.8}$$

命题 2.9 (Chemin-Lerner 抛物方程的混合正则性估计) 设 $s\in\mathbb{R}$, $(p,q,r)\in[1,\infty]^3$. $u_0\in\dot{B}^s_{p,r}$,$f\in\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^s_{p,r})$, $g\in\mathcal{L}^q_T(\dot{B}^{s+\frac{2}{q}-2}_{p,r})$. 设 u 是如下线性抛物型方程:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=f+g,\\ u(0)=u_0(x)\end{cases}$$

的解, 则

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^s_{p,r})}\leqslant C\Big(\|u_0\|_{\dot{B}^s_{p,r}}+\|f\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot{B}^s_{p,r})}+\|g\|_{\mathcal{L}^q_T(\dot{B}^{s+\frac{2}{q}-2}_{p,r})}\Big). \tag{2.9}$$

注记 2.1 用混合时空 Besov 空间刻画抛物方程的光滑效应是最优型的估计. 事实上, 对任意的 $\varphi(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 易见

$$u(t)=e^{t\Delta}\varphi\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+;\dot{B}^2_{2,2}),$$

然而

$$u(t)\notin L^1(\mathbb{R}^+;\dot{H}^2).$$

容易证明

$$u(t)\in L^1(\mathbb{R}^+;\dot{H}^2)\Longleftrightarrow\varphi(x)\in\dot{B}^0_{2,1}.$$

另一方面, 首先由 Chemin 建立的混合时空 Besov 空间比通常时空空间的正则性要优越, 它的引入具有本质的意义, 而不是技术性的或人为需要而引入的.

定理 2.1 的证明 第一步. 发展型 Stokes 方程解的 $L^2_tL^\infty$ 估计.

首先建立 N-S 方程 Leray-Hopf 弱解的先验估计. 考虑

$$\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \partial_t v + \mathbb{P}(v \cdot \nabla v) - \Delta v = \mathbb{P} f, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v(0) = v_0(x). \end{cases}$$

定理 2.10 设 v 是二维 N-S 方程组满足条件 $v_0(x) \in L^2$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2))$ 的解, 则对 $T \in \mathbb{R}^+$, 有

$$\|v\|_{L^2_T L^\infty_x} \leqslant C E_{0T}(1 + E_{0T}^{\frac{1}{2}}), \quad E_{0T} = \|v_0\|_2^2 + \|f\|^2_{L^1_T L^2}. \tag{2.10}$$

进而, 如果 $v_0(x) \in L^2 \cap \dot{B}^{-1}_{\infty,1}$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2 \cap \dot{B}^{-1}_{\infty,1})$, 则对所有 $T \in \mathbb{R}^+$,

$$\|v\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})} \leqslant C\Big(\|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} + \|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})} + \mathcal{E}_{0T}\Big)\mathcal{E}_{0T}, \tag{2.11}$$

这里 $\mathcal{E}_{0T} = E_{0T}(1 + E_{0T}^{\frac{1}{2}})$.

证明 由于在证明中仅需要齐次 Littlewood-Paley 分解, 但为了书写之便, 采用非齐次 Littlewood-Paley 分解的记号 (不会混乱). 将 (N-S) 的解分解成

$$\begin{cases} \partial_t v^{(1)} - \Delta v^{(1)} = \mathbb{P} f, \\ v^{(1)}(0) = v_0(x) \end{cases} \oplus \begin{cases} \partial_t v^{(2)} - \Delta v^{(2)} = -\mathbb{P}(v \cdot \nabla v), \\ v^{(2)}(0) = 0. \end{cases}$$

$v^{(1)}$ 的估计. 采用 Duhamel 公式与 Besov 空间的半群刻画

$$\|v_0(x)\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,2}} = \left(\int_0^\infty t\|S(t)v_0\|^2_\infty \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \|S(t)v_0\|^2_\infty dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

及 Sobolev 嵌入定理 $L^2 \hookrightarrow B^{-1}_{\infty,2}$, 容易看出

$$\|v^{(1)}\|_{L^2_t L^\infty_x} \leqslant \|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,2}} + \int_0^t \|f\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,2}} d\tau \leqslant \|v_0\|_2 + \int_0^t \|f\|_2 d\tau \lesssim E^{\frac{1}{2}}_{0,T}. \tag{2.12}$$

$v^{(2)}$ 的估计. 应用 Δ_q 作用于 $v^{(2)}(t)$ 所满足的方程, 记 $v_q^{(2)}(t) = \Delta_q v^{(2)}(t)$. 利用半群的局部化估计可见

$$\|v_q^{(2)}(t)\|_\infty \lesssim \int_0^t e^{-c(t-\tau)2^{2q}} \|\Delta_q(v \cdot \nabla v)\|_\infty d\tau.$$

采用 Young 不等式与 Bernstein 不等式, 可以推出

$$\|v_q^{(2)}(t)\|_{L^2_T L^\infty} \lesssim 2^{-q} \|\Delta_q(v \otimes v)\|_{L^2_T L^\infty},$$

利用 Besov 空间的定义, 可见

$$\|v^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^0_{\infty,1}} \lesssim \|v\otimes v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}}. \tag{2.13}$$

采用 Bony 的仿积分解, 可以写成

$$\|v\otimes v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} \lesssim 2\|T_v v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} + \|R(v,v)\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}}.$$

由仿积定义、Bernstein 不等式及范数的控制刻画估计, 就可以推出

$$\begin{aligned}\|T_v v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{-q}\|S_{q-1}v\|_{L_T^\infty L^\infty}\|\Delta_q v\|_{L_T^2 L^\infty}\\ &\lesssim \sum_q\sum_{j\leqslant q-1} 2^{-q}\|\Delta_j v\|_{L_T^\infty L^\infty}\|\Delta_q v\|_{L_T^2L^\infty}\\ &\lesssim \sum_q\sum_{j\leqslant q-1} 2^{j-q}\|\Delta_j v\|_{L_T^\infty L^2}2^q\|\Delta_q v\|_{L_T^2L^2}.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式及 Young 不等式, 并注意到 $L^2\sim\dot{B}^0_{2,2}$, 就得

$$\|T_v v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} \leqslant C\|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty L^2}\|\nabla v\|_{L_T^2L^2}.$$

关于剩余部分, 利用 Bernstein 与 Hölder 不等式可以推出

$$\begin{aligned}\|R(v,v)\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{-q}\sum_{j\geqslant q-3}\|\Delta_q(\Delta_j v\widetilde{\Delta}_j v)\|_{L_T^2L^\infty}\\ &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{q}\sum_{j\geqslant q-3}\|\Delta_j v\widetilde{\Delta}_j v\|_{L_T^2L^1}\\ &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geqslant q-3}2^q\|\Delta_j v\|_{L_T^\infty L^2}\|\widetilde{\Delta}_j v\|_{L_T^2L_x^2}\\ &\lesssim \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{q-j\leqslant 3}2^{q-j}\|\Delta_j v\|_{L_T^\infty L^2}2^j\|\widetilde{\Delta}_j v\|_{L_T^2L^2},\end{aligned}$$

利用离散的 Young 不等式, 可见

$$\|R(v,v)\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} \leqslant C\|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty L^2}\|\nabla v\|_{L_T^2L^2},$$

综合上面的估计, 就可以推出

$$\|v^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\|v\|_{L_T^\infty L^2}\|\nabla v\|_{L_T^2L^2}. \tag{2.14}$$

为了获得 $L_T^2L^\infty$ 估计 (2.10), 尚需估计 $v\in\mathcal{L}_T^\infty L^2$. 利用抛物型方程的正则性估计, 就得

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty L^2} \lesssim \|v_0\|_2 + \|f\|_{L_T^1L^2} + \|v\otimes v\|_{L_T^2L_x^2}.$$

两边平方就是

$$\|v\|^2_{\mathcal{L}^\infty_T L^2} \lesssim \|v_0\|_2^2 + \|v\|^4_{L^4_T L^4} + \|f\|^2_{L^1_T L^2} \lesssim \|v_0\|_2^2 + \|v\|^2_{L^\infty_T L^2}\|v\|^2_{L^2_T \dot{H}^1} + \|f\|^2_{L^1_T L^2}.$$

因此

$$\|v\|^2_{\mathcal{L}^\infty_T L^2} \leqslant CE_{0T}(1+E_{0T}), \tag{2.15}$$

这里用到 Leray-Hopf 弱解满足的能量不等式

$$\|v\|_2^2 + 2\int_0^t \|\nabla v\|_2^2 d\tau \leqslant \|v_0\|_2^2 + 2\int_0^t \|v\|_2\|f\|_2 d\tau. \tag{2.16}$$

将 (2.15) 与 (2.16) 代入 (2.14), 就得

$$\|v^{(2)}\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant CE_{0T}(1+E_{0T}^{\frac{1}{2}}). \tag{2.17}$$

由于 $\dot{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty$, 有

$$\|v^{(2)}\|_{L^2_T L^\infty} \leqslant CE_{0T}(1+E_{0T}^{\frac{1}{2}}).$$

结合 (2.12) 就推出估计 (2.10).

(2.11) 的估计. 我们将看到, 建立估计 $\|v\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})}$ 的关键估计是$\|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^0_{\infty,1}}$. 由估计 (2.17), 此关键估计就归结为估计$\|v^{(1)}\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^0_{\infty,1}}$. 事实上

$$\|v_q^{(1)}(t)\|_\infty \lesssim e^{-ct2^{2q}}\|v_q^{(1)}(0)\|_\infty + \int_0^t e^{-c(t-\tau)2^{2q}}\|f_q(\tau)\|_\infty d\tau,$$

$$\|v^{(1)}\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{-q}\|v_q^{(1)}(0)\|_\infty + \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{-q}\|f_q\|_{L^1_T L^\infty} \lesssim \|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} + \|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})}.$$

综合 $v^{(2)}$ 的估计 (2.17), 可见

$$\|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\Big(\|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} + \|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})} + E_{0T}(1+E_{0T}^{\frac{1}{2}})\Big). \tag{2.18}$$

下面完成估计 (2.11) 的证明.

抛物型方程正则化效应 对 $v^{(1)}$ 及 $v^{(2)}$ 所满足的抛物型方程, 利用正则化效应, 可见

$$\|v^{(1)}\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})} \lesssim \|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} + \|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})}. \tag{2.19}$$

$$\|v^{(2)}\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})} \lesssim \|v\otimes v\|_{L^1_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \lesssim \|T_v v\|_{L^1_T \dot{B}^0_{\infty,1}} + \|R(v,v)\|_{L^1_T \dot{B}^0_{\infty,1}}. \tag{2.20}$$

由 Bony 的仿积的定义、(2.10), (2.18) 及范数的控制刻画, 就推出

$$\begin{aligned}\|T_v v\|_{L^1_T \dot{B}^0_{\infty,1}} &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}} \|S_{q-1}v\|_{L^2_T L^\infty}\|\Delta_q v\|_{L^2_T L^\infty} \lesssim \|v\|_{L^2_T L^\infty}\|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \\ &\lesssim (\|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}} + \|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})} + E_{0T}(1+E_{0T}^{\frac{1}{2}}))E_{0T}(1+E_{0T}^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}\tag{2.21}$$

利用 Bernstein 估计与 Hölder 不等式, 余项估计如下:

$$\begin{aligned}\|R(v,v)\|_{L^1_T\dot{B}^0_{\infty,1}} &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geqslant q-3}\|\Delta_q(\Delta_j v\widetilde{\Delta}_j v)\|_{L^1_T L^\infty}\\ &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{2q}\sum_{j\geqslant q-3}\|\Delta_j v\widetilde{\Delta}_j v\|_{L^1_T L^1_x}\\ &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geqslant q-3}2^{2q}\|\Delta_j v\|_{L^2_T L^2_x}\|\widetilde{\Delta}_j v\|_{L^2_T L^2_x}\\ &\lesssim \sum_{q\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geqslant q-3}2^{2(q-j)}2^j\|\Delta_j v\|_{L^2_T L^2_x}2^j\|\widetilde{\Delta}_j v\|_{L^2_T L^2_x}\\ &\lesssim \|v\|^2_{L^2_T\dot{H}^1}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

结合 (2.21) 与 (2.22), 容易看出

$$\|v\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})}\leqslant(\|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}}+\|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})})+C\Big(\|v_0\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}}+\|f\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})}+\mathcal{E}_{0T}\Big)\mathcal{E}_{0T},\tag{2.23}$$

这里 $\mathcal{E}_{0T}=E_{0T}(1+E_{0T}^{\frac{1}{2}})$.

注记 2.2 前面的结果应用到非齐次 Besov 空间的情形, 可以推广到

$$\begin{aligned}\|v-v_{-1}\|_{L^1_T B^1_{\infty,1}} &\lesssim \|v^{(1)}-v^{(1)}_{-1}\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})}+\|v^{(2)}-v^{(2)}_{-1}\|_{L^1_T(\dot{B}^1_{\infty,1})}\\ &\lesssim (\|v(0)-v_{-1}(0)\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,1}}+\|f-f_{-1}\|_{L^1_T(\dot{B}^{-1}_{\infty,1})}+\mathcal{E}_{0T})(1+\mathcal{E}_{0T})\\ &\lesssim (\|v_0\|_{B^{-1}_{\infty,1}}+\|f\|_{L^1_T(B^{-1}_{\infty,1})}+\mathcal{E}_{0T})(1+\mathcal{E}_{0T}).\end{aligned}\tag{2.24}$$

命题 2.11 设 (v,θ) 是方程 (B1) 的整体光滑解, 且满足 $v^0\in L^2\cap B^{-1}_{\infty,1}$ 与 $\theta^0\in B^0_{2,1}$. 则对于任意的 $T>0$, 有如下的估计:

$$\begin{cases}\|v\|^2_{L^\infty_T L^2}+\|v\|^2_{L^2_T\dot{H}^1}\leqslant C_0(1+T^2),\\ \|v\|^2_{\mathcal{L}^\infty_T L^2}+\|v\|_{\mathcal{L}^\infty B^{-1}_{\infty,1}}\leqslant C_0(1+T^4),\\ \|v\|_{L^1_T B^1_{\infty,1}}+\|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty B^0_{2,1}}+\|\nabla\pi\|_{L^1_T B^0_{2,1}}\leqslant C_0e^{C_0T^4},\end{cases}\tag{2.25}$$

这里 C_0 是仅依赖于初值的常数.

证明 利用能量估计, 就有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2\leqslant\|\theta\|_2\|v\|_2=\|\theta_0\|_2\|v\|_2.$$

利用带参数的 Hölder 不等式, 容易看出

$$\|v\|^2_{L^\infty_T L^2}+\|v\|^2_{L^2_T\dot{H}^1}\leqslant C_0(1+T^2).$$

由 (2.15) 可见

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty L^2}^2 \leqslant CE_{0T}(1+E_{0T}) \leqslant C(1+T^4). \tag{2.26}$$

关于 $\|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})}$ 的估计. 对于线性抛物方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f + g, \\ f = -\mathbb{P}R(v, \nabla v), \\ g = -\mathbb{P}(T_v \cdot \nabla v + T_{\nabla v} \cdot v) + \mathbb{P}\theta e_2, \end{cases}$$

使用最优型的光滑估计, 就是如下估计:

$$\|v - v_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})} \lesssim \|v_0\|_{B_{\infty,1}^{-1}} + \|f - f_{-1}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^{-1}} + \|g - g_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-3})}.$$

利用 (2.22), 可见

$$\|f - f_{-1}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^{-1}} \lesssim \|R(v,v)\|_{L_T^1 \dot{B}_{\infty,1}^0} \lesssim \|v\|_{L_T^2 \dot{H}^1}^2.$$

类似地, 采用仿积估计, 就得

$$\begin{aligned} \|g - g_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-3})} \leqslant & \|g - g_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(\dot{B}_{\infty,1}^{-3})} \lesssim \|g - g_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{-2})} \\ \lesssim & \|T_v \cdot \nabla v\|_{\mathcal{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{-2})} + \|T_{\nabla v} \cdot v\|_{\mathcal{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{-2})} + \|\theta_0\|_{L^2} \\ \lesssim & \|T_v v\|_{\mathcal{L}_T^\infty(\dot{B}_{2,1}^{-1})} + \|\theta_0\|_{L^2} \\ \lesssim & \|v\|_{L_T^\infty L^2}^2 + \|\theta_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

因此

$$\|v - v_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})} \leqslant C_0(1+T^4). \tag{2.27}$$

进而, 利用

$$\|v_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})} \lesssim \|v_{-1}\|_{L^\infty L^2} \leqslant 1 + T,$$

就可以推出

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})} \leqslant \|v_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})} + \|v - v_{-1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty(B_{\infty,1}^{-1})} \leqslant C_0(1+T^4). \tag{2.28}$$

(2.25) 最后一个估计的证明

$$\|v\|_{L_T^1(B_{\infty,1}^1)} \lesssim \|v_{-1}\|_{L_T^1 L^\infty} + \|v - v_{-1}\|_{L_T^1(B_{\infty,1}^1)},$$

$$\|v_{-1}\|_{L_T^1 L^\infty} \leqslant T\|v\|_{L_T^2 L^2} \leqslant TE_{0T}^{\frac{1}{2}} \leqslant C_0(1+T^2).$$

由注记 2.2 中关于高频的估计及 Sobolev 嵌入 $B^0_{2,1} \hookrightarrow B^{-1}_{\infty,1}$, 可得

$$\|v - v_{-1}\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})} \lesssim \Big(\|v_0\|_{B^{-1}_{\infty,1}} + \|\theta\|_{L^1_T(B^0_{2,1})} + \mathcal{E}_{0T}\Big)(1 + \mathcal{E}_{0T}).$$

注意到 $\mathcal{E}_{0T} \leqslant C_0(1+T^3)$, 上式就变成

$$\|v - v_{-1}\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})} \lesssim C_0(1+T^6) + C_0(1+T^3)\int_0^T \|\theta(\tau)\|_{B^0_{2,1}} d\tau. \tag{2.29}$$

因为

$$\|\theta\|_{B^0_{2,1}} \lesssim \|\theta_0\|_{B^0_{2,1}}\Big(1 + \int_0^t \|v(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}} d\tau\Big).$$

故

$$\|v - v_{-1}\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})} \lesssim C_0(1+T^6) + C_0(1+T^3)\int_0^T \|v(\tau)\|_{L^1_\tau B^1_{\infty,1}} d\tau.$$

进而有

$$\|v\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})} \lesssim C_0(1+T^6) + C_0(1+T^3)\int_0^T \|v(\tau)\|_{L^1_\tau B^1_{\infty,1}} d\tau. \tag{2.30}$$

利用 Gronwall 不等式, 就得

$$\|v\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})} \lesssim C_0 e^{C_0 T^4},$$

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T(B^0_{2,1})} \lesssim \|\theta_0\|_{B^0_{2,1}}\Big(1 + \int_0^t \|v(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}} d\tau\Big) \lesssim C_0 e^{C_0 T^4}.$$

最后, 注意到

$$\nabla\pi = \nabla\Delta^{-1}\partial_{x_2}\theta + \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(v\cdot\nabla v),$$

容易推出

$$\begin{aligned}
\|\nabla\pi\|_{L^1_T(B^0_{2,1})} &\lesssim \|\theta\|_{L^1_T(B^0_{2,1})} + \|v\cdot\nabla v\|_{L^1_T(B^0_{2,1})} \\
&\lesssim T\|\theta\|_{L^\infty_T(B^0_{2,1})} + \|v\cdot\nabla v\|_{L^1_T(B^0_{2,1})} \\
&\lesssim T\|\theta\|_{L^\infty_T(B^0_{2,1})} + \|v\|_{L^\infty_T(L^2)}\|v\|_{L^1_T(B^1_{\infty,1})} \\
&\lesssim C_0 e^{C_0 T^4}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

第二步. 存在性的证明概貌. 存在性的证明是标准的.

首先, 对初始函数进行光滑化, 利用定理 1.1, 存在一组光滑整体解 (v^ℓ, θ^ℓ). 由前面建立的先验估计, 即命题 2.11, 在这组光滑整体解可以抽出一个弱收敛的子序列, 使得

$$(v^{\ell_k}, \theta^{\ell_k}) \rightharpoonup (v, \theta).$$

然而, 要验证 (v,θ) 满足方程 (通过线性项是没有问题, 问题是如何使弱极限与非线性函数可以交换次序), 起码要建立局部强收敛! 这本质上依赖于序列的紧性.

其次, 序列的紧性可以通过考虑解序列关于时间的导数来获得. 具体地讲, 对所有 $\eta>0$ 和 $T>0$, 有

$$\|\partial_\tau v_\ell\|_{L^2_TH^{-1-\eta}}\leqslant\|\Delta v_\ell\|_{L^2_TH^{-1-\eta}}+C_\eta\|v_\ell\|_{L^\infty_TL^2}\|v_\ell\|_{L^2_TH^1}+\|\theta_\ell\|_{L^2_TL^2}\leqslant C_{0,\eta}(1+T^2),\tag{2.32}$$

这里用到速度场所满足的方程、双线性估计与能量估计. 利用 Ascoli 定理, 就可以推出强收敛.

最后, 证明解 (v,θ) 关于时间 t 的连续性. 利用速度场满足

$$\|v\|^2_{\mathcal{L}^\infty_TL^2}\leqslant CE_{0T}(1+E_{0T}).$$

因此, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$ 使得

$$\sum_{q\geqslant N}\|\Delta_qv\|^2_{L^\infty_TL^2}\leqslant\frac{\varepsilon^2}{16}.$$

对于 $t,t'\in[0,T]$, 由 Taylor 公式与 Hölder 不等式可以推出

$$\begin{aligned}\|v(t)-v(t')\|_{L^2}&\leqslant\lim_{\ell\to\infty}\|v_\ell(t)-v_\ell(t')\|_{L^2}\\&\leqslant\|S_Nv_\ell(t)-S_Nv_\ell(t')\|_{L^2}+2\Big(\sum_{q\geqslant N}\|\Delta_qv\|^2_{L^\infty_TL^2}\Big)^{\frac12}\\&\leqslant|t-t'|^{\frac12}\|\partial_tS_Nv_\ell\|_{L^2_TL^2_x}+\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant C2^{N(1+\eta)}|t-t'|^{\frac12}\|\partial_tS_Nv_\ell\|_{L^2_T\dot H^{-1-\eta}}+\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant C2^{N(1+\eta)}(1+T^2)|t-t'|^{\frac12}+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由此可见, $v\in C(I;L^2)$.

同理可证 $v\in C(I;B^{-1}_{\infty,1})$. 另一方面, $\theta\in C_b(\mathbb{R}^+;B^0_{2,1})$ 与 $\theta\in\mathcal{L}^\infty_{\rm loc}(B^0_{2,1})$ 的证明思路完全一样.

第三步. 唯一性问题.

定理 2.12　设 $(\theta^{(j)},v^{(j)},\nabla\pi^{(j)})$, $j=1,2$, 分别是(B1)的具有相同初值 (θ_0,v_0) 的整体解, 其中 $\theta_0\in B^0_{2,1}(\mathbb{R}^2)$, $v_0\in B^{-1}_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)\cap L^2(\mathbb{R}^2)$, ${\rm div}v_0=0$ 的解. 如果假设

$$\begin{aligned}&\theta^{(j)}\in L^\infty_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;B^0_{2,1}),\\&v^{(j)}\in L^\infty_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;L^2)\cap L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;H^1)\cap L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;B^1_{\infty,1}),\\&\nabla\pi^{(j)}\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^+;B^0_{2,1}).\end{aligned}$$

则

$$(\theta^{(2)}, v^{(2)}, \nabla\pi^{(2)}) = (\theta^{(1)}, v^{(1)}, \nabla\pi^{(1)}).$$

证明 记 $w = v^{(2)} - v^{(1)}$, $\eta = \theta^{(2)} - \theta^{(1)}$, $\pi = \pi^{(2)} - \pi^{(1)}$, 则

$$\begin{cases} \partial_t w + v^{(2)} \cdot \nabla w - \Delta w + \nabla\pi = \eta e_2 - w \cdot \nabla v^{(1)}, \\ \partial_t \eta + v^{(2)} \cdot \nabla \eta = -w \cdot \nabla\theta^{(1)}, \\ \mathrm{div} w = 0. \end{cases}$$

现着力在

$$E_T = L_T^\infty B_{2,\infty}^{-1} \cap \mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^1 \times \mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1} \times \mathcal{L}_T^\infty B_{2,\infty}^{-1}$$

空间中估计 $(w, \nabla\pi, \eta)$. 由抛物型方程解的光滑效应 (命题 2.6), 可见

$$\begin{aligned} &\|w\|_{L_T^\infty B_{2,\infty}^{-1}} + \|w\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^1} + \|\nabla\pi\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} \\ \leqslant & Ce^{CT + \|v^{(2)}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^1}} (\|\eta\|_{L_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} + \|w \cdot \nabla v^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}}) \\ \leqslant & Ce^{CT + \|v^{(2)}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^1}} (\|\eta\|_{L_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} + \|w \cdot \nabla v^{(1)}\|_{L_T^1 B_{2,\infty}^{-1}}). \end{aligned} \tag{2.33}$$

根据 Bony 的仿积估计、输运方程在 Besov 空间的正则性及 log-型不等式, 可以看出

$$\|w \cdot \nabla v^{(1)}\|_{B_{2,\infty}^{-1}} = \|wv^{(1)}\|_{B_{2,\infty}^0} \leqslant C\|w\|_{B_{2,\infty}^{-1}} \|v^{(1)}\|_{B_{\infty,1}^1}, \tag{2.34}$$

$$\|\eta\|_{B_{2,\infty}^{-1}} \leqslant Ce^{\|v^{(2)}\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{\infty,1}^1}} \|w \cdot \nabla\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}}, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} \|w\cdot\nabla\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} \leqslant & \|R(w^j, \partial_j\theta^{(1)})\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} + \|T_{w^j}\partial_j\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} + \|T_{\partial_j\theta^{(1)}} w^j\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} \\ \lesssim & \|w\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^0} \|\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^\infty B_{2,1}^1} + \|w\|_{L_T^1 L^\infty} \|\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^\infty B_{2,\infty}^0}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\|w\|_{L_T^1 L^\infty} \leqslant \|w\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^1} \log\left(e + \frac{\|v^{(1)}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^1} + \|v^{(2)}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^1}}{\|w\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^1}}\right). \tag{2.37}$$

现将 (2.34)~(2.37) 代入 (2.33), 可以看出

$$\begin{aligned} &\|w\|_{L_T^\infty B_{2,\infty}^{-1}} + \|w\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^1} + \|\nabla\pi\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}} \\ \lesssim & e^{\|v^{(2)}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^1}} \left[\int_0^T \|w\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{2,\infty}^1} \log\left(e + \frac{\|v^{(1)}\|_{L_t^1 B_{\infty,1}^1} + \|v^{(2)}\|_{L_t^1 B_{\infty,1}^1}}{\|w\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{2,\infty}^1}}\right)\right. \\ & \left. \times \|\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{2,1}^0} dt + \int_0^T \|w\|_{B_{2,\infty}^{-1}} \|v^{(1)}\|_{B_{\infty,1}^1} dt\right]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

定义 $\gamma(t)$ 如下:

$$\gamma(t)=\|w\|_{L_T^\infty B_{2,\infty}^{-1}}+\|w\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^1}+\|\nabla\pi\|_{\mathcal{L}_T^1 B_{2,\infty}^{-1}},\quad \alpha(T)=\sum_{1\leqslant j\leqslant 2}\|v^{(j)}\|_{L_T^1 B_{\infty,1}^1}.$$

代入 (2.38), 并且利用 Gronwall 不等式就得

$$\gamma(T)\leqslant\|\theta^{(1)}\|_{\mathcal{L}_T^\infty B_{2,1}^0}e^{T+\alpha(T)}\int_0^T\gamma(t)\log\Big(e+\frac{\alpha(t)}{\gamma(t)}\Big)dt.$$

这里用到

$$x\longrightarrow x\log\Big(e+\frac{\alpha(T)}{x}\Big)$$

是 $\mathbb{R}^+$ 上的增函数, 因此, 由 Osgood 定理, $\gamma(T)=0\Longrightarrow w\equiv 0$. 因此唯一性得证. □

注记 2.3 (Osgood 连续模的定义) 函数 $\mu:\ [0,a]\mapsto\mathbb{R}^+$ 称是一个连续模, 如果 μ 满足

$$\mu(0)=0,\qquad \mu(\cdot)\ \text{单调上升}. \tag{2.39}$$

进一步, 如果 $\mu(\cdot)$ 满足

$$\int_0^a\frac{dr}{\mu(r)}=\infty.$$

则 μ 是一个 Osgood 连续模.

注记 2.4 (Osgood 不等式) 设 ρ 是取值在 $[0,a]$ 上的可测函数, γ 是非负的可积函数, μ 是连续的单调不减函数. 设存在 $c\geqslant 0$, 函数 ρ 满足

$$\rho(t)\leqslant c+\int_{t_0}^t\gamma(t')\mu(\rho(t'))dt'.$$

则有如下结论:

(i) 若 $c>0$, 则

$$-\mathcal{M}(\rho(t))+\mathcal{M}(c)\leqslant\int_{t_0}^t\gamma(t')dt',\quad \mathcal{M}(x)=\int_x^1\frac{dr}{\mu(r)}.$$

(ii) 若 $c=0$, 并且 μ 是 Osgood 连续模, 则 $\rho\equiv 0$.

定理 2.13 设 $2<p<\infty$, $\kappa>0$, $v_0(x)\in B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}$, $\mathrm{div}v_0(x)=0$, $\theta_0\in L^p$. 则 (B2) 存在唯一的整体解 (v,θ) 满足

$$v\in C(\mathbb{R}^+;B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}),\quad \theta\in C_b(\mathbb{R}^+;L^p)\cap\mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{R}^+;B_{p,\infty}^2).$$

定理 2.14 记

$$f(x) \in \mathcal{B}^\infty \Longleftrightarrow \|f\|_{\mathcal{B}^\infty} = \|f\|_\infty + \|\Delta_{-1} f\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} < \infty.$$

设 $v_0 \in B^1_{\infty,1}$, $\mathrm{div} v_0 = 0$, $\theta_0 \in \mathcal{B}^\infty$, 则方程 (B2) 存在唯一的整体解 (v, θ) 满足

$$v \in C(\mathbb{R}^+; B^1_{\infty,1}), \quad \theta \in C_b(\mathbb{R}^+; \mathcal{B}^\infty) \cap \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^2_{\infty,\infty}).$$

预备工具 先回忆第 2 章建立的输运扩散方程解的 log-型零阶 Besov 正则性及频段层次的正则性估计, 具体证明详见第 2 章的命题 3.8 及命题 3.10.

引理 2.15 (log-型零阶 Besov 正则性保持) 设 $p, r \in [1, +\infty]$, $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$, $\mathrm{div} v = 0$, 设 u 是如下输运扩散方程

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla u - \nu \Delta u = f, \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

的解. 如果 $u_0 \in B^0_{p,r}$, 则对 $\forall t \in \mathbb{R}^+$, 有

$$\|u\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{p,r}} \leqslant C\big(\|u_0\|_{B^0_{p,r}} + \|f\|_{\mathcal{L}^1_t B^0_{p,r}}\big)\Big(1 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big), \tag{2.40}$$

这里 $C = C(d)$ 仅依赖于空间维数而不依赖于黏性系数.

引理 2.16 (频段层次的正则性估计) 设 $a_0 \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $v \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip})$, $\omega = \mathrm{curl} v$. 对任意的 $q \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, 输运扩散方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t a + v \cdot \nabla a - \nu \Delta a = 0, \quad \mathrm{div} v = 0, \\ a|_{t=0} = a_0(x) \end{cases}$$

的光滑解 $a(t,x)$ 满足如下正则性估计:

$$2^{2q}\nu \int_0^t \|\Delta_q a\|_p d\tau \lesssim \|a_0\|_p \Big(1 + t + (q+2)\|\omega\|_{L^1_t L^\infty} + \|\nabla \Delta_{-1} v\|_{L^1_t L^\infty}\Big). \tag{2.41}$$

定理 2.13 的证明 证明的重点是建立先验估计, 然后统一处理存在性与唯一性.

第一步. 定理 2.13 所满足的先验估计:

(a) $\|\theta\|_p \leqslant \|\theta_0\|_p$, $2 < p < \infty$.

(b) $\|\theta\|_{L^1_t B^2_{2,\infty}} + \|\omega\|_\infty + \|\omega\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{\infty,1}} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0 t)}$.

(c) $\|\theta\|_{\mathcal{L}^1_t B^2_{p,\infty}} + \|v\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}} \leqslant C_0 e^{e^{\exp(C_0 t)}}$, $2 < p < \infty$.

事实上, (a) 对应着 L^p- 层次下的极值原理, 证明是显然的. 注意到 $\omega(t)$ 满足

$$\omega_t + v \cdot \nabla \omega = \theta_{x_1}.$$

因此, 取 L^∞ 并且利用 Sobolev 嵌入定理, 容易看出

$$\|\omega(t)\|_\infty \leqslant \|\omega_0(x)\|_\infty + \|\nabla\theta\|_{L_t^1 L^\infty} \leqslant \|\omega_0(x)\|_\infty + C\|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}}.$$

同理

$$\|\omega(t)\|_p \leqslant \|\omega_0(x)\|_p + \|\nabla\theta\|_{L_t^1 L^p} \leqslant \|\omega_0(x)\|_p + C\|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}}.$$

因此

$$\|\omega(t)\|_\infty + \|\omega(t)\|_p \leqslant (\|\omega_0(x)\|_\infty + \|\omega_0(x)\|_p) + C\|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{1+\frac{2}{p}}}. \tag{2.42}$$

注意到, 对于任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{q\geqslant -1} 2^{-\varepsilon q} < \infty, \qquad \sum_{q\geqslant -1} 2^{-\varepsilon q}(2+q) < \infty.$$

因此, 利用频段层次的正则性估计 (2.41) 就得

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{2-\varepsilon}} &\lesssim \|\theta_0\|_p \sum_{q\geqslant -1} 2^{-\varepsilon q}\Big(1 + t + (2+q)\|\omega\|_{L_t^1 L^\infty} + \|\nabla\Delta_{-1} v\|_{L_t^1 L^\infty}\Big) \\
&\lesssim \|\theta_0\|_p \Big(1 + t + \|\omega\|_{L_t^1 L^\infty} + \|\nabla v\|_{L_t^1 L^p}\Big) \\
&\lesssim \|\theta_0\|_p \Big(1 + t + \|\omega\|_{L_t^1 L^\infty} + \|\omega\|_{L_t^1 L^p}\Big).
\end{aligned}$$

选取

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{p} > 0, \qquad 2 < p < \infty.$$

就得

$$\|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}} \lesssim \|\theta_0\|_p \Big(1 + t + \|\omega\|_{L_t^1 L^\infty} + \|\omega\|_{L_t^1 L^p}\Big), \qquad \forall p \in (2, \infty). \tag{2.43}$$

令

$$f(t) = \|\omega(t)\|_\infty + \|\omega(t)\|_p, \qquad 2 < p < \infty.$$

则根据 (2.42) 与 (2.43), 就得

$$f(t) \lesssim \|\omega_0\|_\infty + \|\omega_0\|_p + \|\theta_0\|_p(1+t) + \|\theta_0\|_p \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

由 Gronwall 不等式推出

$$f(t) \leqslant \Big[\|\omega_0\|_\infty + \|\omega_0\|_p + \|\theta_0\|_p(1+t)\Big] e^{Ct\|\theta_0\|_p} \leqslant C_0 e^{C_0 t}.$$

再次利用 (2.43), 就得

$$\|\omega\|_\infty + \|\omega\|_p + \|\theta\|_{L^1_t B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}} \leqslant C_0 e^{C_0 t}, \qquad 2 < p < \infty. \tag{2.44}$$

这里 C_0 仅依赖于初值.

下面来估计 $\|\omega\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{\infty,1}}$. 利用 log-型零阶 Besov 正则性保持性质, 有

$$\begin{aligned}\|\omega\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{\infty,1}} &\lesssim \big(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{\mathcal{L}^1_t B^1_{\infty,1}}\big)\Big(1 + \|\nabla v\|_{L^1_t L^\infty}\Big)\\ &\lesssim \big(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{\mathcal{L}^1_t B^{\frac{2}{p}+1}_{p,1}}\big)\Big(1 + \|\nabla v\|_{L^1_t L^\infty}\Big).\end{aligned} \tag{2.45}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_\infty &\lesssim \|\nabla \Delta_{-1} v\|_\infty + \sum_{q\in\mathbb{N}} \|\Delta_q \nabla v\|_\infty\\ &\lesssim \|\nabla\Delta_{-1} v\|_p + \|\omega\|_{B^0_{\infty,1}}\\ &\lesssim \|\omega\|_p + \|\omega\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{\infty,1}}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

结合 (2.44)~(2.46), 并且利用 Gronwall 不等式就得

$$\|\nabla v(t)\|_\infty + \|\omega\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^0_{\infty,1}} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0 t)}.$$

最后, 来证明 (c). 利用抛物方程的正则化效应, 见第 2 章推论 3.7, 就得

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}^1_t(B^2_{p,\infty})} \leqslant \|\theta\|_p + \|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{\mathcal{L}^1_t(B^2_{p,\infty})} \leqslant Ce^{CV(t)}\|\theta_0\|_{B^0_{p,\infty}} \leqslant C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}, \tag{2.47}$$

这里用到 $V(t) = \displaystyle\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau$. 关于速度场, 利用高–低频分解及 C-Z 算子的有界性, 有估计

$$\|v\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}} \lesssim \|v\|_{L^\infty_t L^p} + \|\omega\|_{\mathcal{L}^\infty_t B^{\frac{2}{p}}_{p,1}}. \tag{2.48}$$

利用速度场的 L^p 估计, 容易看出

$$\begin{aligned}\|v\|_p &\lesssim \|v_0\|_p + t\|\theta_0\|_p + \int_0^t \|\mathcal{P}v\cdot\nabla v\|_p d\tau\\ &\lesssim \|v_0\|_p + t\|\theta_0\|_p + \int_0^t \|\nabla v\|_\infty \|v\|_p d\tau.\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式就得

$$\|v\|_p \lesssim C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}. \tag{2.49}$$

对涡度方程

$$\omega_t + v\cdot\nabla\omega = \theta_{x_1},$$

应用第 2 章推论 3.7 及 (2.43), 就可以推出

$$\begin{aligned}
\|\omega\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{p,1}^{\frac{2}{p}}} \lesssim & e^{CV(t)}\big(\|\omega_0\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}}} + \|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}\big)\\
\lesssim & e^{CV(t)}\big(\|\omega_0\|_{B_{p,1}^{\frac{2}{p}}} + \|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}\big)\\
\leqslant & C_0 e^{e^{\exp C_0 t}}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

将 (2.48), (2.49) 代入 (2.47), 就完成了 (c) 的证明. □

注记 2.5 (1) 如果对 $\theta(t)$ 仅仅用第 2 章命题 3.9 中的正则性估计

$$\|\theta\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}} \leqslant C\|\theta_0\|_{L^p}\Big(1+t+\int_0^t \|\nabla v\|_{L^\infty} d\tau\Big), \quad p>2,$$

而非频段层次的正则性估计

$$2^{2q}\int_0^t \|\Delta_q\theta\|_p d\tau \lesssim \|\theta_0\|_p\Big(1+t+(q+2)\|\omega\|_{L_t^1 L^\infty} + \|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1 L^\infty}\Big).$$

则根据 (2.42) 及 (2.45) 就得

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_\infty \lesssim & \|\omega\|_p + \|\omega\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{\infty,1}^0}\\
\lesssim & \Big(\|\omega_0\|_{B_{\infty,1}^0} + \|\theta\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{p,1}^{\frac{2}{p}+1}}\Big)\Big(1+\|\nabla v\|_{L_t^1 L^\infty}\Big)\\
\lesssim & \Big(1+t+\int_0^t \|\nabla v\|_{L^\infty} d\tau\Big)^2.
\end{aligned}$$

从此式我们无法获得任何有用的估计.

(2) 从上面的证明可以看出, 当 $p=\infty$ 时, 由于 C-Z 算子在低频部分不是 L^∞ 上的有界算子, 因此, 上面的方法不能处理低频估计 $\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty$. 为了避开这一困难, 就需要利用频段层次的插值方法.

第二步. 定理 2.14 所满足的先验估计. 存在常数 $C = C(\|\theta_0\|_\infty, \|v_0\|_{B_{\infty,1}^0}) > 0$, 满足对于任意的 $t\in[0,\infty)$, 有如下先验估计:

(a) $\|\theta\|_\infty \leqslant \|\theta_0\|_\infty$; $\|\theta\|_{L_t^1 B_{\infty,1}^1} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0 t^3)}$.

(b) $\|v\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{\infty,1}^1} + \|\theta\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{\infty,\infty}^2} + \|\theta\|_{\mathcal{B}^\infty} \leqslant C_0 e^{e^{\exp(C_0 t^3)}}$.

事实上, (a) 中的第一个估计对应着温度场满足极大值原理. 下面给出剩余的估计. 类似于第一步中的过程, 对 $\omega(t)$ 满足的方程的解利用 L^∞ 极值原理, 并利用 Sobolev 嵌入定理, 就可以看出

$$\|\omega(t)\|_\infty \leqslant \|\omega_0\|_\infty + \|\nabla\theta\|_{L_t^1L^\infty} \leqslant \|\omega_0\|_\infty + C\|\theta\|_{L_t^1B_{\infty,1}^1}. \tag{2.51}$$

对于任意的 $N \in \mathbb{N}^* = \{1,2,\cdots\}$, 利用 Besov 空间的定义与极大值原理, 推出

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{L_t^1B_{\infty,1}^1} &\lesssim \sum_{q\leqslant N-1} 2^q\|\Delta_q\theta\|_{L_t^1L^\infty} + \sum_{q\geqslant N} 2^q\|\Delta_q\theta\|_{L_t^1L^\infty}\\ &\lesssim 2^N t\|\theta_0\|_{L^\infty} + \sum_{q\geqslant N} 2^q\|\Delta_q\theta\|_{L_t^1L^\infty}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

利用频段层次上的正则性估计 (2.41), 并且关于 $q \geqslant N$ 求和就得

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{L_t^1B_{\infty,1}^1} &\lesssim 2^N t\|\theta_0\|_{L^\infty} + \sum_{q\geqslant N} 2^{-q}\|\theta_0\|_{L^\infty}\big(1+t+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty + (q+2)\|\omega\|_{L_t^1L^\infty}\big)\\ &\lesssim 2^N t\|\theta_0\|_{L^\infty} + 2^{-N}\|\theta_0\|_{L^\infty}\big(1+t+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\big) + \|\omega\|_{L_t^1L^\infty}.\end{aligned}$$

取 $2^N t \simeq 2^{-N}(1+t+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty})$, 则

$$\|\theta\|_{L_t^1B_{\infty,1}^1} \lesssim \|\omega\|_{L_t^1L^\infty} + t^{\frac12}\|\theta_0\|_{L^\infty}\big(1+t+\|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^\infty}\big)^{\frac12}. \tag{2.53}$$

断言 低频部分的估计

$$\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty \lesssim 1 + \log\big(e+\|v_0\|_\infty + t\|\theta_0\|_{L^\infty}\big)\|\omega\|_{L_t^\infty L^\infty} + t\|\omega\|_{L_t^\infty L^\infty}^2. \tag{2.54}$$

断言的证明 取固定 $N \in \mathbb{N}^*$, 利用 $\Delta_{-1} = \Delta_{-1}(\dot{S}_{-N} + \sum_{q=-N}^{0}\dot{\Delta}_q)$, 就可以推出

$$\begin{aligned}\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty &\lesssim \|\nabla\dot{S}_{-N}v\|_\infty + \sum_{q=-N}^{0}\|\nabla\dot{\Delta}_q v\|_\infty\\ &\lesssim 2^{-N}\|v\|_\infty + \sum_{q=-N}^{0}\|\dot{\Delta}_q\omega\|_\infty\\ &\lesssim 2^{-N}\|v\|_\infty + N\|\omega\|_\infty.\end{aligned}$$

选取 $N \cong \log(e+\|v\|_\infty)$, 容易推出

$$\|\nabla\Delta_{-1}v\|_\infty \lesssim 1 + \|\omega\|_\infty\log(e+\|v\|_\infty). \tag{2.55}$$

另一方面, 利用高低频分解, 容易看出

$$\|v\|_\infty \lesssim \|\dot{S}_{-M}v\|_\infty + 2^M\|\omega\|_\infty. \tag{2.56}$$

利用速度场满足的方程来估计低频部分的点态估计:

$$\begin{aligned}\|\dot{S}_{-M}v(t)\|_\infty \leqslant &\|\dot{S}_{-M}v_0\|_\infty + \|\dot{S}_{-M}\theta\|_{L_t^1L^\infty} + \int_0^t \|\dot{S}_{-M}\mathcal{P}\mathrm{div}(v\otimes v)(\tau)\|_\infty d\tau \\ \lesssim &\|v_0\|_\infty + t\|\theta_0\|_\infty + 2^{-M}\int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau, \end{aligned} \tag{2.57}$$

这里用到

$$\|\dot{S}_{-M}\mathcal{P}\mathrm{div}(v\otimes v)(\tau)\|_\infty \leqslant \sum_{q\leqslant -1-M} \|\dot{\Delta}_q\mathcal{P}\mathrm{div}(v\otimes v)(\tau)\|_\infty \leqslant \sum_{q\leqslant -1-M} 2^q\|v\otimes v\|_\infty.$$

将 (2.57) 代入到 (2.56), 就得

$$\|v\|_\infty \leqslant \|v_0\|_\infty + t\|\theta_0\|_\infty + 2^{-M}\int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau + 2^M\|\omega\|_\infty.$$

选取

$$2^{2M} \simeq \frac{\displaystyle\int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau}{\|\omega(t)\|_\infty},$$

因此

$$\|v(t)\|_\infty^2 \lesssim \|v_0\|_\infty^2 + t^2\|\theta_0\|_\infty^2 + \|\omega(t)\|_\infty \int_0^t \|v(\tau)\|_\infty^2 d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式, 就推出

$$\|v(t)\|_\infty \leqslant C(\|v_0\|_\infty + t\|\theta_0\|_\infty)e^{Ct\|\omega\|_{L_t^\infty L^\infty}}. \tag{2.58}$$

将 (2.58) 代入 (2.55), 就得断言 (2.54).

将断言 (2.54) 代入 (2.53), 容易推出

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{L_t^1B_{\infty,1}^1}^2 \leqslant &C_0(1+t^2) + \|\omega\|_{L_t^1L^\infty}^2 + C_0(1+t^2)\int_0^t \|\omega\|_{L_\tau^\infty L^\infty}^2 d\tau \\ \leqslant &C_0(1+t^2)\Big(1+\int_0^t \|\omega\|_{L_\tau^\infty L^\infty}^2 d\tau\Big). \end{aligned} \tag{2.59}$$

现在将 (2.60) 代入 (2.51), 就得

$$\|\omega\|_{L_t^\infty L^\infty}^2 \leqslant C_0(1+t^2)\Big(1+\int_0^t \|\omega(\tau)\|_{L_\tau^\infty L^\infty}^2 d\tau\Big).$$

应用 Gronwall 不等式, 就得

$$\|\omega\|_\infty \leqslant C_0 e^{\exp(C_0t^3)} \Longrightarrow \|\theta(t)\|_{L_t^1B_{\infty,1}^1} \leqslant C_0 e^{\exp(C_0t^3)}. \tag{2.60}$$

(b) 的估计. 由 (2.60) 及断言 (2.54) 知

$$\|\nabla\Delta_{-1}v(t)\|_\infty \leqslant C_0 e^{\exp(C_0t^3)}. \tag{2.61}$$

另一方面, 由零层次的 log-型的正则性保持性结果, 可见

$$\|\omega\|_{\mathcal{L}_t^\infty B^0_{\infty,1}} \lesssim \left(\|\omega_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{L^1_t B^1_{\infty,1}}\right)\left(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau\right).$$

因此, 结合 Sobolev 嵌入定理就得

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|_{L^\infty} \leqslant &\|v\|_{\mathcal{L}_t^\infty B^1_{\infty,1}} \lesssim \|\nabla\Delta_{-1}v\|_{L_t^\infty L^\infty} + \sum_{q\in\mathbb{N}}\|\Delta_q\omega\|_{L_t^\infty L^\infty}\\ \lesssim & C_0e^{\exp(C_0t^3)} + \|\omega\|_{\mathcal{L}_t^\infty B^0_{\infty,1}}\\ \lesssim & C_0e^{\exp(C_0t^3)}\left(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_\infty d\tau\right).\end{aligned} \tag{2.62}$$

利用 Gronwall 不等式, 就得 $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ 的估计, 代回到就得 $\|v(t)\|_{\mathcal{L}_t^\infty B^1_{\infty,1}}$ 的估计. 注意到

$$2^{2q}\int_0^t \|\Delta_q\theta(\tau)\|_\infty d\tau \leqslant C\|\theta_0\|_\infty\left(1+t+\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right), \quad \forall q\geqslant -1. \tag{2.63}$$

将 (2.62) 代入 (2.63), 就得 $\|\theta\|_{\mathcal{L}_t^1 B^2_{\infty,\infty}}$ 的估计.

最后来估计 $\|\theta\|_{\mathcal{B}^\infty}$. 按定义,

$$\|\theta\|_{\mathcal{B}^\infty} \leqslant \|\theta_0\|_\infty + \sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta(t)\|_\infty.$$

利用温度场方程的局部化形式的极值原理, 就是

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_q\theta(t)\|_\infty \leqslant & \|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \|\dot{\Delta}_q(v\cdot\nabla\theta)\|_{L^1_tL^\infty} + \|\dot{\Delta}_q\theta\|_{L^1_tL^\infty}\\ \leqslant & \|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + 2^q\|v\theta\|_{L^1_tL^\infty} + 2^{2q}\|\theta\|_{L^1_tL^\infty}\\ \leqslant & \|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + 2^q\|\theta_0\|_\infty\|v\|_{L^1_tL^\infty} + 2^{2q}t\|\theta_0\|_\infty.\end{aligned}$$

因此

$$\|\theta\|_{\mathcal{B}^\infty} \leqslant \|\theta_0\|_\infty + \sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + C_0e^{\exp(C_0t^3)} \leqslant \|\theta_0\|_{\mathcal{B}^\infty} + C_0e^{\exp(C_0t^3)}. \tag{2.64}$$

第三步. 唯一性的证明. 以 $p=\infty$ 为例来证明, $p<\infty$ 时, 仅需作适当的修改就可以了. 对于初值 $v_0(x)\in B^0_{\infty,1}$, $\theta_0(x)\in L^\infty$, 可以给出速度场及温度场梯度的某

些 Lip 模的估计. 然而, 在研究存在性与唯一性时, 需要对温度场的低频部分施加条件 $\Delta_{-1}\theta_0(x) \in \dot{B}^0_{\infty,1}$ (如何去掉此条件也是一个有趣的问题).

假设 $\{(v^{(j)}, \theta^{(j)})\}_{j=1}^2$ 是问题 (B2) 具有初值 $\{(v_0^{(j)}, \theta_0^{(j)})\}_{j=1}^2$ 的两个解, 满足

$$v^{(j)} \in L_T^\infty B^1_{\infty,1}, \quad \theta^{(j)} \in L_T^\infty \mathcal{B}^\infty \cap L_T^1 \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2), \qquad \forall T > 0.$$

令

$$v = v^{(1)} - v^{(2)}, \theta = \theta^{(1)} - \theta^{(2)}, \pi = \pi^{(1)} - \pi^{(2)}, v_0 = v_0^{(1)} - v_0^{(2)}, \theta_0 = \theta_0^{(1)} - \theta_0^{(2)}. \quad (2.65)$$

则 (v, θ) 满足如下相差方程:

$$\begin{cases} \partial_t v + v^{(1)} \cdot \nabla v = -\nabla \pi + \theta e_2 - v \cdot \nabla v^{(2)}, \\ \partial_t \theta + v^{(1)} \cdot \nabla \theta - \Delta \theta = -v \cdot \nabla \theta^{(2)}, \\ \mathrm{div} v = 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

利用输运方程在 Besov 空间中正则性的保持性, 可见

$$\|v\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim e^{C\int_0^t \|\nabla v^{(1)}\|_\infty d\tau} \left(\|v_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \int_0^t \left(\|\nabla \pi + v \cdot \nabla v^{(2)} - \theta e_2\|_{B^0_{\infty,1}} \right) d\tau \right). \quad (2.67)$$

因为

$$\Delta \pi = -\mathrm{div}(v^{(1)} \cdot \nabla v + v \cdot \nabla v^{(2)}) + \partial_2 \theta, \quad \mathrm{div}(v^{(1)} \cdot \nabla v) = \mathrm{div}(v \cdot \nabla v^{(1)}),$$

因此

$$\nabla \pi = -\nabla \Delta^{-1} \mathrm{div}\big(v \cdot \nabla (v^{(1)} + v^{(2)})\big) + \nabla \Delta^{-1} \partial_2 \theta.$$

注意到 Sobolev 嵌入 $\dot{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow B^0_{\infty,1}$ 及 C-Z 算子在齐次 Besov 空间中的有界性, 就推出

$$\|\nabla \pi\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \|v \cdot \nabla (v^{(1)} + v^{(2)})\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}. \quad (2.68)$$

按定义, 可以推出

$$\begin{aligned} \|v \cdot \nabla (v^{(1)} + v^{(2)})\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} &\leqslant \sum_{q \leqslant 0} 2^q \|\dot{\Delta}_q (v \otimes (v^{(1)} + v^{(2)}))\|_\infty + \sum_{q \geqslant 0} \|\Delta_q (v \cdot \nabla (v^{(1)} + v^{(2)}))\|_\infty \\ &\leqslant \|v\|_\infty \|v^{(1)} + v^{(2)}\|_\infty + \|v \cdot \nabla (v^{(1)} + v^{(2)})\|_{B^0_{\infty,1}}. \end{aligned}$$

注意到流体的不可压性及利用 Bony 仿积, 可见双线性估计

$$\|v \cdot \nabla w\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \|v\|_{B^0_{\infty,1}} \|w\|_{B^1_{\infty,1}}.$$

由此推得

$$\|\nabla\pi\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim \|v\|_{B^0_{\infty,1}}(\|v^{(1)}\|_{B^1_{\infty,1}} + \|v^{(2)}\|_{B^1_{\infty,1}}) + \|\theta\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}. \tag{2.69}$$

代入到 (2.67) 就得

$$\|v\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim e^{C\int_0^t \|\nabla v^{(1)}\|_\infty d\tau}\Big(\|v_0\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{L^1_t\dot{B}^0_{\infty,1}} + \int_0^t \|v(\tau)\|_{B^0_{\infty,1}} w_{1,2}(\tau)d\tau\Big). \tag{2.70}$$

这里

$$w_{1,2}(t) = (\|v^{(1)}\|_{B^1_{\infty,1}} + \|v^{(2)}\|_{B^1_{\infty,1}}).$$

下面来估计 $\|\theta\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}$. 为此先将 θ 进行高 - 低频分解, 就得

$$\|\theta\|_{B^0_{\infty,1}} \leqslant \sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta\|_\infty + \|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{B^0_{\infty,1}}. \tag{2.71}$$

利用 θ 所满足方程的局部化形式, 就得

$$\begin{aligned}
&\|\dot{\Delta}_q\theta(t)\|_\infty \\
\leqslant&\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \|\dot{\Delta}_q \mathrm{div}(v^{(1)}\theta + v\theta^{(2)})\|_{L^1_tL^\infty} + \|\dot{\Delta}_q\Delta\theta\|_{L^1_tL^\infty} \\
\leqslant&\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + 2^q\int_0^t (\|v^{(1)}\|_\infty\|\theta\|_\infty + \|\theta^{(2)}\|_\infty\|v\|_\infty)d\tau + 2^{2q}\|\theta_0\|_{L^1_tL^\infty}.
\end{aligned}$$

利用 Sobolev 嵌入关系 $\dot{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow B^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty$, 就得

$$\begin{aligned}
\|\theta\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant& \sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \int_0^t (1 + w_{1,2}\|\theta\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}})d\tau \\
&+ \|\theta_0^{(2)}(x)\|_\infty \int_0^t \|v\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} d\tau + \|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{B^0_{\infty,1}}.
\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式就得

$$\|\theta\|_{L^1_t\dot{B}^0_{\infty,1}} \lesssim e^{Ct+Ct\|w_{1,2}\|_\infty},$$

$$\Big(\sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \|\theta_0^{(2)}\|_\infty\int_0^t \|v\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}d\tau + \|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{L^1_tB^0_{\infty,1}}\Big). \tag{2.72}$$

下面估计 $\|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{L^1_tB^0_{\infty,1}}$. 利用扩散方程的正则性估计, 选取 $s = -\dfrac{1}{2}$ 及 $p = r = \infty$, 就得

$$\|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{L^1_tB^{\frac{3}{2}}_{\infty,\infty}} \lesssim e^{C\int_0^t \|v^{(1)}\|_\infty d\tau}\Big(\|\theta_0\|_{B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}} + \int_0^t \|v\cdot\nabla\theta^{(2)}\|_\infty d\tau\Big).$$

用 Sobolev 嵌入关系 $B^{\frac{3}{2}}_{\infty,\infty} \hookrightarrow B^0_{\infty,1}$, 就得

$$\|\theta - \Delta_{-1}\theta\|_{L^1_t B^0_{\infty,1}} \lesssim e^{Ct\|w_{1,2}\|_\infty}\left(\|\theta_0\|_{B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}} + \int_0^t \|v\|_{B^0_{\infty,1}}\|\nabla\theta^{(2)}\|_\infty d\tau\right).$$

代入 (2.72) 就得

$$\begin{aligned}\|\theta\|_{L^1_t \dot{B}^0_{\infty,1}} \lesssim & e^{Ct+Ct\|w_{1,2}\|_\infty}\Bigg(\sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \|\theta_0\|_{B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}} \\ & + \int_0^t \|v\|_{B^0_{\infty,1}}\left(\|\nabla\theta^{(2)}\|_\infty + \|\theta_0^{(2)}\|_\infty\right)d\tau\Bigg),\end{aligned} \tag{2.73}$$

代入 (2.70) 就得

$$\begin{aligned}\|v\|_{B^0_{\infty,1}} \lesssim & e^{Ct+Ct\|w_{1,2}\|_\infty}\Bigg(\sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \|\theta_0\|_{B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}} + \|v_0\|_{B^0_{\infty,1}} \\ & + \int_0^t \|v\|_{B^0_{\infty,1}}\left(w_{1,2}(\tau) + \|\nabla\theta^{(2)}(\tau)\|_\infty + \|\theta_0^{(2)}\|_\infty\right)d\tau\Bigg).\end{aligned} \tag{2.74}$$

利用 Gronwall 不等式及 (2.73) 就得

$$\|v\|_{L^\infty_t B^0_{\infty,1}} + \|\theta\|_{L^\infty_t \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant \eta(t)\left(\sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \|\theta_0\|_{B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}} + \|v_0\|_{B^0_{\infty,1}}\right), \tag{2.75}$$

这里

$$\eta(t) = \eta(\|v^{(j)}\|_{L^\infty_t B^1_{\infty,1}}, \|\nabla\theta^{(j)}\|_{L^\infty_t L^\infty}, \|\theta_0^{(j)}\|_\infty) > 0, \quad j = 1, 2.$$

第四步. 存在性的证明. 首先对初始值进行光滑截断, 即

$$(v_0^{(k)}(x), \theta_0^{(k)}(x)) = (S_k v_0(x), S_k\theta_0(x)).$$

自然, $(v_0^{(k)}(x), \theta_0^{(k)}(x))$ 在 $B^1_{\infty,1} \times \mathcal{B}^\infty$ 中一致有界, 且满足

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\left(\sum_{q\leqslant 0}\|\dot{\Delta}_q(\theta_0^{(k)} - \theta_0)\|_\infty + \|\theta_0^{(k)} - \theta_0\|_{B^{-\frac{1}{2}}_{\infty,\infty}} + \|v_0^{(k)} - v_0(x)\|_{B^0_{\infty,1}}\right) = 0. \tag{2.76}$$

对于固定的 $k > 0$, 具有光滑初值 $(v_0^{(k)}(x), \theta_0^{(k)}(x))$ 的问题 (B2) 存在唯一整体解 $(v^{(k)}(t), \theta^{(k)}(t))$. 利用前面导出的先验估计

$$\|v^{(k)}\|_{L^\infty_t B^1_{\infty,1}} + \|\theta^{(k)}\|_\infty + \|\nabla\theta^{(k)}\|_{L^1_t L^\infty} \leqslant C_0 e^{e^{\exp(C_0 t^3)}}. \tag{2.77}$$

根据 (2.75) 就推出解序列 $(v^{(k)}(t), \theta^{(k)}(t))$ 在空间 $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^0_{\infty,1}) \times L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; B^0_{\infty,1})$ 中强收敛于 $(v(t), \theta(t))$. 由此可以在正则化问题的两边取极限, 从而推出 $(v(t), \theta(t))$

满足问题 (B2). 至于速度场关于时间的连续性, 从 (v,θ) 先验估计与流场方程本身, 导出 v_t 在负指数的 Besov 空间的有界性, 详细可参考定理 1.1 的证明方法.

最后, 我们对二维临界耗散 Boussinesq 方程的整体适定性问题, 给出一个详细的注记, 有兴趣的读者可参看 Hmidi, Keraani 及 Rousset[HKR1-HKR3] 的工作.

考虑 $\mathbb{R}^2$ 上具有临界耗散 Boussinesq 方程

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v + |\mathrm{D}|v + \nabla p = \theta e_2, \\ \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v^0, \quad \theta_{|t=0} = \theta^0. \end{cases} \tag{2.78}$$

当 $\theta^0 = 0$ 时, 上述方程 (2.78) 就退化成一个广义的 Navier-Stokes 方程, 利用 Beale-Kato-Majda 准则与涡度所满足的极大值原理, 就推知光滑解是整体存在的. 事实上, $\mathbb{R}^2$ 上具有临界耗散 Boussinesq 方程 (2.78) 可以视为广义 Boussinesq 方程组

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v + \nabla p = \theta e_2 + \mathcal{D}_v v, \\ \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta = \mathcal{D}_\theta\theta, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v^0, \quad \theta_{|t=0} = \theta^0 \end{cases} \tag{2.79}$$

的特款, 此形式用来模拟海洋与大气运动的数学模型. 算子 $\mathcal{D}_v$ 及 $\mathcal{D}_\theta$ 分别表示流体运动中的扩散与耗散效应. 对于具有完全黏性的模型, 即 $\mathcal{D}_v = \Delta$, $\mathcal{D}_\theta = \Delta$, (2.79) 完全类似于 2 维 Navier-Stokes 方程, 存在光滑的整体解. 对于无黏的情形, 即 $\mathcal{D}_v = \mathcal{D}_\theta = 0$, (2.79) 存在局部光滑解, 但光滑解是否在有限时刻 Blow-up 是公开的问题.

对于具有部分黏性的 Boussinesq 方程 (指其中仅有一个方程中具有黏性) 的情况, 本章前两节已经证明了整体光滑解的存在性. 我们主要考察具有部分黏性的临界 Boussinesq 方程的情形, 即 $\mathcal{D}_v = -|D|$ 或 $\mathcal{D}_\theta = -|D|$.

以 $\mathcal{D}_v = -|D|$ 为例来分析具有部分黏性的临界 Boussinesq 方程的困难与克服这些困难的方法. 考虑扩散算子为 $\mathcal{D}_v = -|D|^\alpha$, $\alpha < 2$. 就速度方程的两边取涡度, 记 $\omega = \partial_1 v^{(2)} - \partial_2 v^{(1)}$, 则相应的方程组为

$$\begin{cases} \partial_t\omega + v\cdot\nabla\omega + |D|^\alpha\omega = \partial_1\theta, \\ \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta = 0, \\ \omega_{|t=0} = \operatorname{curl} v^0, \quad \theta_{|t=0} = \theta^0. \end{cases} \tag{2.80}$$

根据标准的 L^2 能量估计就得

$$\frac{d}{dt}\|\omega(t)\|_{L^2}^2 + \|\omega(t)\|_{\dot H^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \leqslant \|\theta(t)\|_{\dot H^{1-\frac{\alpha}{2}}}^2, \quad \|\theta(t)\|_{L^2} = \|\theta_0\|_{L^2}.$$

当 $\alpha = 2$ 时, 上述两个估计就意味着重要的事实

$$\omega \in L^\infty_{\mathrm{loc}} L^2 \cap L^2_{\mathrm{loc}} \dot{H}^1.$$

当 $\alpha < 2$ 时, 由于没有先验估计 $\|\theta\|_{\dot{H}^{1-\frac{\alpha}{2}}}$, 因此, 仅从上面的能量估计无法给出 ω. 然而, 当 $1 < \alpha < 2$ 时, 可以充分利用半群 $e^{-t|D|^\alpha}$ 提供的极大正则性估计 (见第 2 章定理 3.12), 弥补 θ 的一阶导数损失. 当然, 为了控制非线性项, 适当的限制是必须的. 然而, 对于 $\alpha = 1$ 即具有部分黏性的临界 Boussinesq 方程对应的涡度形式

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega + |D|\omega = \partial_1 \theta, \\ \partial_t \theta + v \cdot \nabla \theta = 0, \\ \omega_{|t=0} = \mathrm{curl}\, v^0, \quad \theta_{|t=0} = \theta^0. \end{cases} \tag{2.81}$$

上面的方法均已失效! 原因在于扩散部分的一阶导数的利润无法补偿涡度方程中 θ 的一阶导数损失. 我们还可以从尺度变换的角度来理解临界的含义. 设 (v, θ) 是 (2.78) 的一个解, $\lambda > 0$ 是一个任意的实数. 则 $(v_\lambda, \theta_\lambda)$ 也是 (2.78) 的一个解, 其中

$$v_\lambda(t, x) := v(\lambda t, \lambda x), \quad \theta_\lambda(t, x) := \lambda \theta(\lambda t, \lambda x).$$

容易验证, 上述尺度变换下不变的初值函数空间 $\dot{H}^1 \times L^2$ 是临界的.

克服困难的方法就是充分利用 Boussinesq 方程的结构条件. 先进行一个困难分析. 考虑具部分黏性的临界 Boussinesq 方程对应的线性方程

$$\partial_t \omega + |D|\omega = \partial_1 \theta, \quad \partial_t \theta = 0. \tag{2.82}$$

即使对于上述线性方程, 如果既不用 θ 的高阶导数估计, 也不用热核 $e^{-t|D|}$ 的极大正则性估计 (不足以补偿导数损失), 我们并不清楚如何通过标准的能量估计来估计 ω. 事实上, 施行 L^2 能量估计, 就得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2_{L^2} + \|\omega\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 \theta \, \omega \, dx, \quad \|\theta(t)\|_{L^2} = \|\theta_0\|_{L^2},$$

从此无法获得所需要的 ω 相关估计.

下面考察如何利用结构条件, 这个思想同样适合于 $\mathcal{D}_\theta = -|D|$ 的情形. 容易看出 (2.43) 在频率空间中对应的象征是

$$\mathcal{A}(\xi) = \begin{pmatrix} -|\xi| & -i\xi_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

只要 $\xi \neq 0$, $\mathcal{A}(\xi)$ 就具有两个不同的实根 0 与 $-|\xi|$, 就可以将 $\mathcal{A}(\xi)$ 对角化. 利用 Riesz 变换的定义 $\mathcal{R} = \dfrac{\partial_1}{|D|}$, 方程组的对角化形式就是

$$\partial_t(\omega - \mathcal{R}\theta) + |D|(\omega - \mathcal{R}\theta) = 0, \quad \partial_t \theta = 0.$$

对于上述方程实施标准的 L^2 能量估计, 利用奇异积分的 (p,p) 有界性, 就可以推出如下先验估计:

$$\|\omega-\mathcal{R}\theta\|_{L^2}+2\int_0^T\|D^{\frac{1}{2}}(\omega-\mathcal{R}\theta)\|_{L^2}dt\leqslant\|\omega_0-\mathcal{R}\theta_0\|_{L^2},\quad \|\theta(t)\|_{L^2}=\|\theta_0\|_{L^2}$$

和

$$\|\omega(t)\|_{L^2}+\|\theta(t)\|_{L^2}\leqslant C\big(\|\omega_0\|_{L^2}+\|\theta_0\|_{L^2}\big).$$

为了研究具部分黏性的临界 Boussinesq 方程 (2.78), 采用对角化线性方程组的技术, 即令 $\Gamma(t)=\omega(t)-\mathcal{R}\theta(t)$, 则 (2.78) 就等价于

$$\begin{cases}(\partial_t+v\cdot\nabla+|D|)\Gamma=[\mathcal{R},v\cdot\nabla]\theta,\\ \partial_t\theta+v\cdot\nabla\theta=0,\\ \Gamma_{|t=0}=\Gamma_0,\quad \theta_{|t=0}=\theta_0.\end{cases}\tag{2.83}$$

于是, 主要的技术困难就归结于如何给出交换子 $[\mathcal{R},v\cdot\nabla]$ 的最优估计. 具体地讲, 对于散度为零的光滑向量场 v 与光滑的数量函数 θ, 有如下的交换子估计:

$$\|[\mathcal{R},v]\theta\|_{H^s}\lesssim_s\|\nabla v\|_{L^2}\|\theta\|_{B^{s-1}_{\infty,2}}+\|v\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2},\quad s\in(0,1),\tag{2.84}$$

$$\|[\mathcal{R},v\cdot\nabla]\theta\|_{B^0_{p,\infty}}\lesssim_p\|\nabla v\|_{L^p}\|\theta\|_{B^0_{\infty,\infty}}+\|v\|_{L^2}\|\theta\|_{L^2},\quad p\in[2,\infty].\tag{2.85}$$

通过 Fourier 局部化方法, 可以证明如下定理:

定理 2.17 *设 $2<p<\infty$, $\theta^0\in L^2\cap B^0_{\infty,1}$. $v^0\in H^1\cap\dot{W}^{1,p}$ 满足 $\mathrm{div}v_0=0$. 则方程 (2.78) 存在唯一的整体解 (v,θ) 满足*

$$v\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;H^1\cap\dot{W}^{1,p})\cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;B^1_{\infty,1}),\quad \text{且}\ \theta\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;L^2\cap B^0_{\infty,1}).$$

定理 2.17 的证明需要如下基本估计:

(I) 输运方程

$$\partial_t\psi+v\cdot\nabla\psi=f,\quad \mathrm{div}v=0,\quad \psi_{|t=0}=\psi^0\tag{2.86}$$

的正则性保持估计

$$\|\psi(t)\|_{B^{-1}_{p,\infty}}\leqslant C\exp\Big(C\int_0^t\|v(\tau)\|_{B^1_{\infty,1}}d\tau\Big)\Big(\|\psi^0\|_{B^{-1}_{p,\infty}}+\int_0^t\|f(\tau)\|_{B^{-1}_{p,\infty}}d\tau\Big),\quad p\in[1,+\infty].\tag{2.87}$$

(II) 对流扩散方程

$$\partial_t\psi+v\cdot\nabla\psi+|\mathrm{D}|\psi=f,\quad \mathrm{div}v=0,\quad \psi_{|t=0}=\psi^0,\tag{2.88}$$

解的 log-型估计

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}_t^\infty B_{p,r}^0} \leqslant C\Big(\|\psi^0\|_{B_{p,r}^0} + \|f\|_{\mathcal{L}_t^1 B_{p,r}^0}\Big)\Big(1+\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\Big), \quad (p,r)\in[1,\infty]^2 \tag{2.89}$$

与 L^p 估计

$$\|\psi(t)\|_{L^p} \leqslant \|\psi^0\|_{L^p} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^p} d\tau, \quad p\in[1,\infty]. \tag{2.90}$$

(III) 流场对应的线性方程

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u + |D|u + \nabla p = f, \qquad \mathrm{div} u = 0 \tag{2.91}$$

的解 u 满足

$$\|u\|_{L_t^\infty B_{2,\infty}^s} \leqslant Ce^{CV(t)}\Big(\|u^0\|_{B_{2,\infty}^s} + \|f\|_{\mathcal{L}_t^q B_{2,\infty}^{s-1+\frac{1}{q}}}(1+t^{1-\frac{1}{q}})\Big), \tag{2.92}$$

这里

$$s\in(-1,1), \quad q\in[1,\infty], \qquad V(t) := \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau. \tag{2.93}$$

除了上面的基本估计之外, 还用到 Leray-Hopf 弱解

$$(v,\theta)\in L_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+;L^2)\cap L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^{\frac{1}{2}})\times L_{\mathrm{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+;L^2). \tag{2.94}$$

在 $v^0\in H^1$, $\theta^0\in L^2\cap L^r$ ($r>4$) 的条件下, 对于所有的 $q\in\Big[1,\dfrac{r}{2}\Big)$, $v\in \mathcal{L}_{\mathrm{loc}}^q(\mathbb{R}_+;B_{\infty,1}^1)$. 有兴趣的读者可参看 Hmidi, Keraani 的工作.

4.3 $\mathbb{R}^3$ 中具部分黏性的 Boussinesq 方程的轴对称解的整体适定性

本节以 $\mathbb{R}^3$ 上具有部分黏性的 Boussinesq 方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v - \Delta v + \nabla p = \rho e_z, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3, \\ \partial_t\rho + v\cdot\nabla\rho = 0, \\ \mathrm{div}\, v = 0, \\ v_{|t=0} = v_0, \quad \rho_{|t=0} = \rho_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

为例, 研究 (3.1) 的具有轴对称初值的整体适定性问题. 其中速度 $v=(v^{(1)},v^{(2)},v^{(3)})$ 是具有自由散度的向量场, 数量函数 ρ 表示流体的密度, 且密度函数仅在垂直方向

e_z 上影响流体运动. 压力函数 p 通过一个椭圆方程与速度及密度联系在一起. 当初始密度 $\rho_0 = 0$ 时, (3.1) 就是经典的不可压 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \Delta v + \nabla p = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

众所周知, Navier-Stokes 方程 (3.2) 光滑解的整体适定性是一个著名的公开问题, 到目前为止, 似乎还没有解决此问题的方法. 然而, 对于具有特殊几何结构, 如: 如果初值函数是轴对称无旋 (axisymmetric without swirl) 的向量函数, 已经证明 Navier-Stokes 方程 (3.2) 光滑解是整体适定性. 这也是我们能研究 (3.1) 的具有轴对称初值的整体适定性问题的动因. 为清楚起见, 以 $\mathbb{R}^3$ 上的 Navier-Stokes 方程为例, 阐述求解的理念与方法. 我们知道涡度 $\omega = \operatorname{curl} v$ 是建立 Navier-Stokes 方程 (3.2) 整体适定性的一个重要的物理量, 具体地讲, Beale-Kato-Majda 准则表明 Navier-Stokes 方程 (3.2) 整体适定性等价于给出 $\|\omega(t)\|_{L^\infty}$ 在任意时刻 t 的估计. 然而, (3.2) 对应的涡度所满足的方程

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = \omega \cdot \nabla v \tag{3.3}$$

出现了涡度伸展项 $\omega \cdot \nabla v$, 它影响了流体的动力学行为, 这是我们遇到的区别于二维流体的主要困难!

一个重要的观察是对于轴对称无旋流体而言, 伸展项中具有消失性, 这就给出了新的守恒律. 回忆第 3 章中有关轴对称无旋流体 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 在柱坐标下可以表示为

$$v(t,x) = v^r(r,z)e_r + v^z(r,z)e_z, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2, z),$$

这里 $u^\theta = 0$ 表示无旋 (without swirl), 在柱坐标系

$$\begin{cases} e_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = \left(\dfrac{x_1}{r}, \dfrac{x_2}{r}, 0\right), \\ e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \left(-\dfrac{x_2}{r}, \dfrac{x_1}{r}, 0\right), \\ e_z = (0,0,1) = (0,0,1) \end{cases}$$

下, $u^\theta \equiv 0$ 并且 u^r, u^z 仅依赖于 r 与 z. 直接验证, 轴对称流体的涡度

$$\omega = (\partial_z v^r - \partial_r v^z) e_\theta := \omega_\theta e_\theta,$$

满足

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = \frac{v^r}{r} \omega.$$

在柱坐标意义下

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_{zz}.$$

于是, 涡度的分量 ω_θ 满足

$$\partial_t \omega_\theta + v \cdot \nabla \omega_\theta - \Delta \omega_\theta + \frac{\omega_\theta}{r^2} = \frac{v^r}{r}\omega_\theta. \tag{3.4}$$

令 $\Gamma = \frac{\omega_\theta}{r}$, 容易验证

$$\partial_t \Gamma + v \cdot \nabla \Gamma - \Delta \Gamma - \frac{2}{r}\partial_r \Gamma = 0. \tag{3.5}$$

显然, 对于任意的 $p \geqslant 1$, $\int \frac{2}{r}\partial_r \Gamma |\Gamma|^{p-2}\Gamma dx \leqslant 0$, 这就意味着 L^p 层次的极值原理

$$\|\Gamma(t)\|_{L^p} \leqslant \|\Gamma_0\|_{L^p}, \qquad p \in [1, \infty]. \tag{3.6}$$

Ukhoviskii 与 Yudovich[UY] 首先注意到这个极值原理足以排除轴对称流体在有限时刻产生奇性, 即对于 $v_0 \in H^1$ 满足 $\omega_0, \frac{\omega_0}{r} \in L^2 \cap L^\infty$, 具轴对称无旋初值的 Navier-Stokes 方程 (3.2) 存在唯一的整体解. 在更低的正则性空间的整体适定性结果可见第 3 章.

现在回到 $\mathbb{R}^3$ 上 Boussinesq 方程 (3.1). 我们的目标是证明具轴对称无旋初值的 Boussinesq 方程 (3.1) 存在唯一的整体解. 需要指出的是轴对称无旋在 (3.1) 的演化过程中是保持的, 记 Π_z 是在 (Oz) 坐标轴上的正交投影, 主要定理如下:

定理 3.1　*设 $v_0 \in H^1$ 是一个散度为零的轴对称的向量场满足 $\frac{\omega_0}{r} \in L^2$, $\rho_0 \in L^2 \cap L^\infty$ 仅依赖 (r, z), 满足 $\operatorname{supp} \rho_0 \cap (Oz) = \varnothing$ 且 $\Pi_z(\operatorname{supp} \rho_0)$ 是紧的. 则 Boussinesq 方程 (3.1) 存在唯一的整体解 (v, ρ) 满足*

$$v \in C(\mathbb{R}^+; H^1) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}),$$

$$\frac{\omega}{r} \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2), \quad \rho \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2 \cap L^\infty).$$

假设密度函数 ρ 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域上是零, 在物理上来看并非自然, 但是可以将这一假设扩展到如下一般的情形, 即初始密度 ρ_0 在 (Oz) 坐标轴附近及当 $|z|$ 充分大时为常数.

推论 3.2　*设 $v_0 \in H^1$ 是一个散度为零的轴对称的向量场满足 $\frac{\omega_0}{r} \in L^2$, 初始密度 $\rho_0 \in L^2 \cap L^\infty$ 仅依赖 (r, z), 且满足*

$$\rho_0(x) \equiv c_0, \quad x = (r, z) \in \{x; r \leqslant r_0, \text{或} |z| \geqslant |z_0|\}, \quad \rho_0 - c_0 \in L^2, \quad r_0 > 0.$$

则 Boussinesq 方程 (3.1) 存在唯一的整体解 (v, ρ) 满足

$$v \in C(\mathbb{R}^+; H^1) \cap L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; W^{1,\infty}),$$

$$\frac{\omega}{r} \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2), \quad \rho - c_0 \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2 \cap L^\infty).$$

推论 3.2 是定理 3.1 的一个直接结果. 事实上, 令 $\bar{\rho}(t,x) = \rho(t,x) - c_0$, 则 Boussinesq 方程 (3.1) 就归结为

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \Delta v + \nabla p - c_0 e_z = \bar{\rho} e_z, \\ \partial_t \bar{\rho} + v \cdot \nabla \bar{\rho} = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v_0, \quad \bar{\rho}_{|t=0} = \rho_0 - c_0. \end{cases}$$

因此, 如果用 $\bar{p} = p - c_0 z$ 来代替 p, 就得到了全同于 (3.1) 的方程, 因此利用定理 3.1 就得到推论 3.2 的结论.

我们先分析与 Navier-Stokes 方程 (3.2) 相比较, Boussinesq 方程 (3.1) 会产生的新困难. 注意到

$$\operatorname{curl}(\rho e_z) = \begin{pmatrix} \partial_2 \rho \\ -\partial_1 \rho \\ 0 \end{pmatrix} = -(\partial_r \rho) e_\theta.$$

Boussinesq 方程 (3.1) 对应的涡度形式就可以写成

$$\partial_t \omega_\theta + v \cdot \nabla \omega_\theta - \Delta \omega_\theta + \frac{\omega_\theta}{r^2} = \frac{v^r}{r} \omega_\theta - \partial_r \rho. \tag{3.7}$$

类似于 Navier-Stokes 方程, $\Gamma := \dfrac{\omega_\theta}{r}$ 与 ρ 满足如下方程:

$$\partial_t \Gamma + v \cdot \nabla \Gamma - \Delta \Gamma - \frac{2}{r} \partial_r \Gamma = -\frac{\partial_r \rho}{r}, \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma + v \cdot \nabla \Gamma - \Delta \Gamma - \dfrac{2}{r} \partial_r \Gamma = -\dfrac{\partial_r \rho}{r}, \\ \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \Gamma_{|t=0} = \Gamma_0, \quad \rho_{|t=0} = \rho_0. \end{cases} \tag{3.9}$$

注意到对于任意的 $p \in [1, \infty]$, $\|\rho(t)\|_{L^p} = \|\rho_0\|_{L^p}$. Γ 在 Lebesgue 空间中估计的新的困难来自于与 $\Delta\rho$ 同度的源项 $\dfrac{\partial_r \rho}{r}$, 这就诱导我们利用热群的极大正则性, 然而, 轴对称椭圆算子 $-\Delta - \dfrac{2}{r}\partial_r$ 的系数出现奇性, 我们并不清楚是否可以证明存在合适的极大光滑性! 因此, 对于 (3.9) 的第一个方程取 L^2- 内积, 就得

$$\|\Gamma(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\Gamma(\tau)\|_{\dot{H}^1}^2 d\tau \leqslant \|\Gamma_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|(\rho/r)(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau. \tag{3.10}$$

注意到, 如果我们没有起码的额外的条件 $\rho(t,0,z) = 0$, $\|\rho/r\|_{L^2}$ 就不会是良定的. 因此, 我们在定理 3.1 施加了更强的条件, 即初始密度的支集不包含坐标轴 (Oz).

在这些条件下, 可以导出 $\|\rho(t)/r\|_{L^2}$ 满足如下的指数增长:

$$\|\rho(t)/r\|_{L^2} \leqslant \|\rho_0/r\|_{L^2} e^{\|v^r/r\|_{L^1_t L^\infty}}.$$

证明上面估计的关键是研究 $\rho(t)$ 支集的动力学行为, 即初始支集在非线性流下输运过程. 我们特别需要 $\rho(t)$ 支集距离坐标轴 (Oz) 的下界估计, 这就是关键命题 3.4. 达到这一目的还要充分利用轴对称流的性质, 即 v 对应的粒子轨道总在子午平面(meridional plane) 上. 这个重要性质使得我们可以将 $\|\rho(t)/r\|_{L^2}$ 满足增长阶改进成二次增长, 即

$$\|\rho(t)/r\|_{L^2} \leqslant C_0 \|v^r/r\|_{L^1_t L^\infty} \big(1 + \|v\|_{L^1_t L^\infty}\big). \tag{3.11}$$

定理 3.1 的证明 证明分下面几步, C 表示实值正常数, C_0 表示仅依赖于初值的正常数.

第一步. 流映射及其性质. 主要研究轴对称流向量场 v 确定的流映射

$$\psi(t,s,x) = x + \int_s^t v(\tau, \psi(\tau,s,x))d\tau$$

的几何与解析性质, 这是定理 3.1 证明的基石. 如果轴对称流向量场 $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, C^1_b)$, 则 v 决定的广义流函数是唯一整体确定的, 并且对于任意的 $t, s \in \mathbb{R}$, 当 $\operatorname{div} v = 0$ 时, $\psi(t,s)$ 就是一个保测的微分同胚, 记

$$\psi^{-1}(t,s,x) = \psi(s,t,x).$$

用 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数, 则 x 到集合 $A \subset \mathbb{R}^3$, 集合之间的距离, 集合的直径分别定义为

$$d(x,A) := \inf_{y\in A} \|x-y\|,$$
$$d(A,B) := \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} \|x-y\|,$$
$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} \|x-y\|.$$

命题 3.3 设 v 是一个轴对称的光滑向量场, $\psi(t,s)$ 是它决定的流函数. 设 $x \notin (Oz)$, $r(x) := d(x,(Oz))$. 则

(1) 对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, 轨道 $\Gamma_{x,s} := \big\{\psi(t,s,x), t \in \mathbb{R}\big\}$ 是一个包含在子午面上的光滑曲线.

(2) 对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, 轨道 $\Gamma_{x,s}$ 与坐标轴 (Oz) 不交, 即 $\Gamma_{x,s} \cap (Oz) = \varnothing$. 更确切地说,

$$r(x) e^{-|\int_s^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau|} \leqslant d(\psi(t,s,x),(Oz)) \leqslant r(x) e^{|\int_s^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau|}.$$

证明 (1) 向量 x 在柱坐标下分解为

$$x = r(x)\begin{pmatrix}\cos\theta_x\\ \sin\theta_x\\ 0\end{pmatrix} + z_x e_z, \quad \text{且 } r_x > 0.$$

相应地, 广义流函数 $\psi(t,s,x)$ 在柱坐标下亦可以分解为

$$\psi(t,s,x) = r(t,s,x)\begin{pmatrix}\cos(\theta(t,s,x))\\ \sin(\theta(t,s,x))\\ 0\end{pmatrix} + z(t,s,x)e_z.$$

由于 v 关于时空变量是光滑函数, 那么流映射 $\psi(t,s,x)$ 也是时空光滑函数. 下面证明对于所有的 $t,s\in\mathbb{R}$, $r(t,s,x)$ 是严格的正值函数. 事实上, 假设存在 $t_1,s_1\in\mathbb{R}$ 使得 $\psi(t_1,s_1,x)\in(Oz)$. 考虑向量场 v 在坐标轴 (Oz) 上的限制就是

$$v(t,0,z) = v^z(t,0,z)e_z,$$

则对于任意的 $x_0\in(Oz)$,

$$\psi(t,s,x_0) = x_0 + \Big(0,0,\int_s^t v^z(\tau,\psi(\tau,s,x_0))d\tau\Big),$$

对应的轨迹仍然落在坐标轴 (Oz) 上. 因此, 总可以选取 x_0 使得 $\psi(t_1,s_1,x_0) = \psi(t_1,s_1,x)$, 这与流映射是一个同胚相矛盾. 由此及广义流映射的光滑性就推出 $r(t,s,x),\theta(t,s,x)$ 及 $z(t,s,x)$ 均是光滑函数. 直接通过求导计算就推得

$$\begin{aligned}\partial_t\psi(t,s,x) &= \partial_t r(t,s,x)\begin{pmatrix}\cos(\theta(t,s,x))\\ \sin(\theta(t,s,x))\\ 0\end{pmatrix}\\ &\quad + r(t,s,x)\partial_t\theta(t,s,x)\begin{pmatrix}-\sin(\theta(t,s,x))\\ \cos(\theta(t,s,x))\\ 0\end{pmatrix} + \partial_t z(t,s,x)e_z.\end{aligned}$$

由于 v 是轴对称无旋的向量场, 那么

$$v(t,\psi(t,s,x)) = v^r(t,r(t,s,x),z(t,s,x))\begin{pmatrix}\cos(\theta(t,s))\\ \sin(\theta(t,s))\\ 0\end{pmatrix} + v^z(t,r(t,s,x),z(t,s,x))e_z.$$

对比就得

$$\begin{aligned}
&\partial_t r(t,s,x) = v^r(t, r(t,s,x), z(t,s,x)),\\
&r(t,s,x)\partial_t\theta(t,s,x) = 0,\\
&\partial_t z(t,s,x) = v^z(t, r(t,s,x), z(t,s,x)).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

注意到对于所有的 $t, s \in \mathbb{R}$, $r(t,s,x) > 0$, 于是就有

$$\theta(t,s,x) = \theta(s,s,x) = \theta_x, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

由此推出, 对于任意的 $s \in \mathbb{R}$, 轨道 $\Gamma_{x,s} := \{\psi(t,s,x), t \in \mathbb{R}\}$ 永远落在子午平面上.

(2) 在区间 $[s,t]$ 上积分 (3.12) 的第一个方程, 就得

$$r(t,s,x) = r(x) + \int_s^t r(\tau,s,x)^{-1} v^r\big(\tau, r(\tau,s,x), z(\tau,s,x)\big) r(\tau,s,x) d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式就得

$$r(t,s,x) \leqslant r(x) e^{\left|\int_s^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right|}.$$

注意到 $d(\psi(t,s,x), (Oz)) = r(t,s,x)$, 这就给出了命题 3.3(ii) 中第二个不等式证明. 注意到 $\psi(s,t,x)$ 是微分同胚, 在上面不等式中用 $\psi(s,t,x)$ 替代 x, 并利用 $\psi(t,s,\psi(s,t,x)) = x$ 就得

$$r(x) \leqslant r(s,t,x) e^{\left|\int_s^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right|}.$$

交换 (s,t) 中 t 与 s 的次序, 就得

$$r(x) e^{-\left|\int_s^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right|} \leqslant r(t,s,x).$$

这就完成了命题 3.3 的证明.

命题 3.3 在建立输运方程解的先验估计极其有用. 它的第一个应用如下:

命题 3.4　*设 v 是一个轴对称的光滑向量场, ρ 是如下输运方程:*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho_{|t=0} = \rho_0 \end{cases}$$

的一个解, 则有如下结论:

(1) 假设 $d(\text{supp}\ \rho_0, (Oz)) = r_0 > 0$. 则对于任意的 $t \geqslant 0$, 成立

$$d(\text{supp}\ \rho(t), (Oz)) \geqslant r_0\ e^{-\int_0^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau}.$$

(2) 记 Π_z 是在坐标轴 (Oz) 上的正交投影, 假设 $\Pi_z(\text{supp } \rho_0)$ 是具有直径 d_0 的紧集. 则对于任意 $t \geqslant 0$, $\Pi_z(\text{supp } \rho(t))$ 是一个具有直径 $d(t)$ 的紧集, 满足

$$d(t) \leqslant d_0 + 2\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

证明 (1) 密度输运方程的解 ρ 完全可以通过流函数 ψ 决定, 即 $\rho(t,x) = \rho_0(\psi^{-1}(t,x))$. 令 $\psi(t,x) := \psi(t,0,x)$, $\psi(t,s,x)$ 是轴对称流向量场 v 确定的流映射

$$\psi(t,s,x) = x + \int_s^t v(\tau, \psi(\tau,s,x))d\tau.$$

因此

$$\text{supp}\rho(t) = \psi(t, \text{supp } \rho_0).$$

设 $y \in \text{supp } \rho(t)$, 则根据定义存在 $x \in \text{supp } \rho_0$, 使得 $y = \psi(t,x)$. 因此, $d(y,(Oz)) = r(t,x)$, 这里 $r(t,x) := r(t,0,x)$. 根据命题 3.3 就有

$$\begin{aligned} d(y,(Oz)) \geqslant & d(x,(Oz))\, e^{-\int_0^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau} \\ \geqslant & d(\text{supp } \rho_0, (Oz))\, e^{-\int_0^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau} \\ \geqslant & r_0\, e^{-\int_0^t \|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty} d\tau}. \end{aligned}$$

(2) 设 $x, \tilde{x} \in \text{supp } \rho_0$, 记 $y(t) = \psi(t,x)$ 及 $\tilde{y}(t) = \psi(t,\tilde{x})$. 分别用 $z(t)$ 与 $\tilde{z}(t)$ 表示 $y(t)$ 与 $\tilde{y}(t)$ 的最后一个坐标分量, 利用方程 (3.12) 在 $s=0$ 的特殊情形, 就得

$$\dot{z}(t) = v^z(t, r(t,x), z(t)).$$

积分上式, 就是

$$z(t) = z(0) + \int_0^t v^z(\tau, r(\tau,x), z(\tau))d\tau.$$

因此

$$|z(t) - \tilde{z}(t)| \leqslant |z(0) - \tilde{z}(0)| + 2\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

由此推出

$$\text{diam}(\Pi_z(\text{supp } \rho(t))) \leqslant \text{diam}(\Pi_z(\text{supp } \rho_0)) + 2\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau.$$

这就完成了命题 3.4 的证明.

现在来给出 $\|\rho(t)/r\|_{L^2}$ 的估计, 它是证明定理3.1的关键. 我们建立的 $\|\rho(t)/r\|_{L^2}$ 的估计是二次增长, 提高了非常容易从 ρ/r 满足的方程而获得的指数增长估计. 具体地说, 有如下推论:

推论 3.5 设 v 是一个轴对称具零散度的光滑向量场, $\rho_0 \in L^2 \cap L^\infty$, ρ 是如下输运方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho_{|t=0} = \rho_0 \end{cases}$$

的解. 假设

$$d(\text{supp } \rho_0, (Oz)) := r_0 > 0, \quad \text{且} \ \text{diam}(\Pi_z(\text{supp } \rho_0)) := d_0 < \infty.$$

则有如下估计:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho^2(t,x)}{r^2} dx \leqslant \frac{\|\rho^0\|_{L^2}^2}{r_0^2} + 2\pi \|\rho_0\|_{L^\infty}^2 \int_0^t \left\| \frac{v^r(\tau)}{r} \right\|_{L^\infty} d\tau \Big(d_0 + 2 \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \Big),$$

这里 $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$.

证明 利用 $\|\rho\|_{L^\infty} = \|\rho_0\|_{L^\infty}$, 直接验证就得

$$\begin{aligned} \|(\rho/r)(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{r \geqslant r_0} \frac{\rho^2(t,x)}{r^2} dx + \int_{r \leqslant r_0} \frac{\rho^2(t,x)}{r^2} dx \\ &\leqslant \frac{1}{r_0^2} \|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \|\rho(t)\|_{L^\infty}^2 \int_{\{r \leqslant r_0\} \cap \text{supp } \rho(t)} \frac{1}{r^2} dx \\ &\leqslant \frac{1}{r_0^2} \|\rho_0\|_{L^2}^2 + \|\rho_0\|_{L^\infty}^2 \int_{\{r \leqslant r_0\} \cap \text{supp } \rho(t)} \frac{1}{r^2} dx. \end{aligned}$$

现在利用命题 3.4, 就得

$$\begin{aligned} \int_{\{r \leqslant r_0\} \cap \text{supp } \rho(t)} \frac{1}{r^2} dx &\leqslant 2\pi \Big(\int_{r_0 e^{-\int_0^t \| \frac{v^r}{r}(\tau) \|_{L^\infty} d\tau} \leqslant r \leqslant r_0} \frac{1}{r} dr \Big) \Big(\int_{\Pi_z(\text{supp } \rho(t))} dz \Big) \\ &\leqslant 2\pi \int_0^t \| \frac{v^r}{r}(\tau) \|_{L^\infty} d\tau \Big(d_0 + 2 \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \Big). \end{aligned}$$

这就完成了推论 3.5 的证明.

第二步. 先验估计. 建立证明定理 3.1 所必需的先验估计, 这些先验估计分两个类型: 弱型的先验估计和强型的先验估计.

首先证明如下能量估计:

命题 3.6 设 $v_0 \in L^2$ 是一个散度为零的向量场, $\rho_0 \in L^2 \cap L^\infty$. 则 (3.1) 的光滑解满足

$$\|\rho(t)\|_{L^2 \cap L^\infty} \leqslant \|\rho_0\|_{L^2 \cap L^\infty},$$

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leqslant C_0(1 + t^2).$$

证明 注意到流映射是保测变换, 第一个估计是显然的. 就速度所满足方程与 v 作内积, 分部积分就得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla v(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|v(t)\|_{L^2}\|\rho(t)\|_{L^2}. \tag{3.13}$$

简化就变成如下形式:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2} \leqslant \|\rho(t)\|_{L^2} = \|\rho_0\|_{L^2}.$$

两边积分就得

$$\|v(t)\|_{L^2} \leqslant \|v_0\|_{L^2} + t\|\rho_0\|_{L^2}.$$

将上式代入 (3.13), 推出

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|_{L^2}^2 + \big(\|v_0\|_{L^2} + t\|\rho_0\|_{L^2}\big)\|\rho_0\|_{L^2} t.$$

整理就得第二个估计, 这就完成了命题 3.6 的证明.

第二个命题是通过 Biot-Savart 定律, 刻画速度与涡度估计之间的关系.

命题 3.7 设 v 是一个轴对称具零散度的光滑向量场, $\omega = \omega_\theta e_\theta$ 表示 v 的涡度. 则

$$\|v\|_{L^\infty} \leqslant C\|\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega_\theta\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.14}$$

$$\|v^r/r\|_{L^\infty} \leqslant C\|\omega_\theta/r\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega_\theta/r\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

证明 回忆经典的 Biot-Savart 定律为

$$v(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(y-x)\wedge\omega(y)}{|y-x|^3}dy. \tag{3.16}$$

因此

$$|v(x)| \leqslant \frac{1}{4\pi}\Big(\frac{1}{|\cdot|^2}\star|\omega|\Big)(x) \lesssim \frac{1}{|\cdot|^2}\star|\omega_\theta| := J(x).$$

令 $\lambda > 0$ 是一个待定实数. 将上面的积分分解如下:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_{|x-y|\leqslant\lambda} \frac{|\omega_\theta(y)|}{|x-y|^2}dy + \int_{|x-y|\geqslant\lambda} \frac{|\omega_\theta(y)|}{|x-y|^2}dy \\ &:= J_1(x) + J_2(x). \end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, 容易看出

$$\|J_1\|_{L^\infty} \leqslant \|\omega_\theta\|_{L^6}\Big(\int_{|x|\leqslant\lambda} \frac{1}{|x|^{\frac{12}{5}}}dx\Big)^{\frac{5}{6}} \lesssim \|\omega_\theta\|_{L^6}\lambda^{\frac{1}{2}}.$$

就第二个积分, 采用不同的对偶指标, 再次利用 Hölder 不等式, 就得

$$\|J_2\|_{L^\infty} \leqslant \|\omega_\theta\|_{L^2}\Big(\int_{|x|\geqslant\lambda}\frac{1}{|x|^4}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\omega_\theta\|_{L^2}\lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\|v\|_{L^\infty} \lesssim \|\omega_\theta\|_{L^6}\lambda^{\frac{1}{2}} + \|\omega_\theta\|_{L^2}\lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

通过选取待定常数 $\lambda = \dfrac{\|\omega_\theta\|_{L^2}}{\|\omega_\theta\|_{L^6}}$, 并利用 Sobolev 嵌入定理 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6$, 就得估计

$$\|v\|_{L^\infty} \lesssim \|\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega_\theta\|_{L^6}^{\frac{1}{2}} \leqslant C\|\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega_\theta\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}}.$$

利用 3.3 节中 Shirota-Yanagisawa 建立了如下关键的点态估计:

$$\Big|\frac{v^r}{r}\Big| \lesssim \frac{1}{|\cdot|^2} * \Big|\frac{\omega_\theta}{r}\Big|.$$

完全类似于上面的证明就得 (3.15).

强型的先验估计的目的是寻求问题 (3.1) 解强型的整体正则性估计, 这是证明定理 3.1 的重要组成部分.

命题 3.8 设 $v_0 \in H^1$ 是一个轴对称具零散度的向量场, 满足 $\dfrac{\operatorname{curl} v_0}{r} \in L^2$. 设 $\rho_0 \in L^2 \cap L^\infty$ 仅依赖于 (r,z) 满足 supp ρ_0 与坐标轴 (Oz) 不交, 假设 $\Pi_z(\text{supp } \rho_0)$ 是一个紧集. 那么对于任意的 $t \geqslant 0$, 方程 (3.1) 的光滑解满足估计

$$\|v(t)\|_{H^1}^2 + \int_0^t \|v(\tau)\|_{H^2}^2 d\tau \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t^9}, \tag{3.17}$$

$$\Big\|\frac{\omega}{r}(t)\Big\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\omega}{r}\Big\|_{L_t^2\dot{H}^1}^2 \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t^9}. \tag{3.18}$$

进而, 对于任意的 $p \in (3,\infty]$, 还成立估计

$$\|v\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}} + \|\nabla v\|_{L_t^1 L^\infty} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t^9}, \tag{3.19}$$

这里常数 C_0 依赖于初始函数.

证明 方程 (3.7) 两边与 ω_θ 作 L^2 内积, 就得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 = \int v^r\frac{\omega_\theta}{r}\omega_\theta dx - \int \partial_r\rho\,\omega_\theta dx.$$

利用 Hölder 不等式, 上式右边第一项满足

$$\int v^r\frac{\omega_\theta}{r}\omega_\theta dx \leqslant \|v\|_{L^6}\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L^2}\|\omega_\theta\|_{L^3}.$$

注意到推论 3.5 意味着密度 ρ 的支集与坐标轴 (Oz) 不交, 利用分部积分就得

$$\begin{aligned}-\int \partial_r\rho\,\omega_\theta dx &= -2\pi\int \partial_r\rho\,\omega_\theta r dr\,dz\\ &= 2\pi\int \rho\partial_r\omega_\theta\, rdr\,dz + 2\pi\int \rho\frac{\omega_\theta}{r}rdr\,dz\\ &= \int \rho\big(\partial_r\omega_\theta + \frac{\omega_\theta}{r}\big)dx.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, 上式右边第二项满足估计

$$-\int \partial_r\rho\,\omega_\theta dx \leqslant \|\rho\|_{L^2}\big(\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2} + \|\partial_r\omega_\theta\|_{L^2}\big).$$

把上面的两个估计代入第一个估计式, 就得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}^2\\ \leqslant&\|v\|_{L^6}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}\|\omega_\theta\|_{L^3} + \|\rho\|_{L^2}\Big(\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2} + \|\partial_r\omega_\theta\|_{L^2}\Big)\\ \leqslant&\|v\|_{L^6}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}\|\omega_\theta\|_{L^3} + \|\rho\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_r\omega_\theta\|_{L^2}^2\\ \leqslant&\|v\|_{L^6}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}\|\omega_\theta\|_{L^3} + \|\rho\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

这里用到了

$$\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2 = \|\partial_r\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \|\partial_z\omega_\theta\|_{L^2}^2.$$

因此, 整理就得

$$\frac{d}{dt}\|\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}^2 \leqslant 2\|v\|_{L^6}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}\|\omega_\theta\|_{L^3} + 2\|\rho\|_{L^2}^2. \tag{3.20}$$

结合插值公式 $\|\omega_\theta\|_{L^3} \lesssim \|\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$ 及 Young 不等式

$$|ab| \leqslant C_\eta a^{\frac{1}{1-\eta}} + \frac{1}{4}b^{\frac{1}{\eta}}, \qquad \forall\eta\in(0,1),$$

容易推出

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^6}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}\|\omega_\theta\|_{L^3} &\leqslant C\|v\|_{L^6}^{\frac{4}{3}}\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}^{\frac{4}{3}}\|\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2\\ &\leqslant C\|\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2 + C\|v\|_{L^6}^2\|\frac{\omega_\theta}{r}\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.21}$$

将 (3.21) 代入 (3.20), 并利用估计 $\|\rho(t)\|_{L^2} \leqslant \|\rho_0\|_{L^2}$ 就得

$$\frac{d}{dt}\|\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2 + \Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 \leqslant C\|\omega_\theta\|_{L^2}^2 + C\|v\|_{L^6}^2\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2 + 2\|\rho_0\|_{L^2}^2.$$

利用插值公式及命题 3.7, 容易推出

$$
\begin{aligned}
\|\omega_\theta(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\omega_\theta\|_{L_t^2L^2}^2+\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L_t^2L^2}^2 &\leqslant Ce^{Ct}\Big(\|\rho_0\|_{L^2}^2+\int_0^t\|v(\tau)\|_{L^6}^2\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}(\tau)\Big\|_{L^2}^2d\tau\Big)\\
&\leqslant Ce^{Ct}\Big(\|\rho_0\|_{L^2}^2+\|v\|_{L_t^2\dot H^1}^2\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L_t^\infty L^2}^2\Big)\\
&\leqslant C_0e^{Ct}\Big(1+\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L_t^\infty L^2}^2\Big).
\end{aligned}\tag{3.22}
$$

现在回头利用方程 (3.8) 估计 $\Gamma:=\dfrac{\omega_\theta}{r}$. 方程 (3.8) 两边与 Γ 作内积, 注意到流体的不可压性及 $\rho(t,0,z)=0$, 分部积分就得

$$
\begin{aligned}
&\frac12\frac{d}{dt}\|\Gamma\|_{L^2}^2+\|\partial_r\Gamma\|_{L^2}^2+\|\partial_z\Gamma\|_{L^2}^2-4\pi\int\partial_r(\Gamma)\Gamma drdz\\
=&-2\pi\int\partial_r\rho\,\Gamma drdz=2\pi\int\frac{\rho}{r}\,\partial_r\Gamma\,rdrdz\leqslant\Big\|\frac{\rho}{r}\Big\|_{L^2}\|\partial_r\Gamma\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

由于

$$
4\pi\int\partial_r(\Gamma)\Gamma drdz=2\pi\int_{\mathbb R}\int_0^{+\infty}\partial_r(\Gamma)^2drdz\leqslant 0,
$$

代入上式并利用 Young 不等式, 就得

$$
\frac{d}{dt}\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}\Big\|_{L^2}^2+\Big\|\nabla\Big(\frac{\omega_\theta}{r}\Big)\Big\|_{L^2}^2\leqslant\Big\|\frac{\rho}{r}\Big\|_{L^2}^2.
$$

积分就得估计

$$
\Big\|\frac{\omega_\theta(t)}{r}\Big\|_{L^2}^2+\int_0^t\Big\|\nabla\Big(\frac{\omega_\theta(\tau)}{r}\Big)\Big\|_{L^2}^2d\tau\leqslant\Big\|\frac{\omega_\theta(0)}{r}\Big\|_{L^2}^2+\int_0^t\Big\|\frac{\rho(\tau)}{r}\Big\|_{L^2}^2d\tau.\tag{3.23}
$$

为了估计上式中的最后一项, 利用推论 3.5 与 Newton-Leibniz 公式就得

$$
\Big\|\frac{\rho(t)}{r}\Big\|_{L^2}^2\leqslant C_0+C_0\int_0^t\Big\|\frac{v^r(\tau)}{r}\Big\|_{L^\infty}d\tau\Big(1+\int_0^t\|v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\frac{\omega_\theta}{r}(t)\Big\|_{L^2}^2+\Big\|\nabla\Big(\frac{\omega_\theta}{r}\Big)\Big\|_{L_t^2L^2}^2\\
\leqslant&C_0(1+t)+C_0\int_0^t\Big\{\int_0^{t'}\Big\|\frac{v^r(\tau)}{r}\Big\|_{L^\infty}d\tau\Big(1+\int_0^{t'}\|v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\Big)\Big\}dt'\\
\leqslant&C_0(1+t)+C_0t\int_0^t\Big\|\frac{v^r(\tau)}{r}\Big\|_{L^\infty}d\tau\\
&+C_0t\int_0^t\Big\|\frac{v^r(\tau)}{r}\Big\|_{L^\infty}d\tau\int_0^t\|v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.
\end{aligned}
$$

根据 Young 与 Hölder 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
C_0 t \int_0^t \left\|\frac{v^r(\tau)}{r}\right\|_{L^\infty} d\tau &\leqslant \int_0^t \left(C_0 t^2 + \left\|\frac{v^r(\tau)}{r}\right\|_{L^\infty}^2\right) d\tau \\
&\leqslant C_0 t^3 + \int_0^t \left\|\frac{v^r(\tau)}{r}\right\|_{L^\infty}^2 d\tau
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
C_0 t \left\|\frac{v^r}{r}\right\|_{L_t^1 L^\infty} \|v\|_{L_t^1 L^\infty} &\leqslant C_0 t^2 \left\|\frac{v^r}{r}\right\|_{L_t^2 L^\infty} \|v\|_{L_t^2 L^\infty} \\
&\leqslant C_0 t^4 \int_0^t \left\|\frac{v^r(\tau)}{r}\right\|_{L^\infty}^2 d\tau + \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau.
\end{aligned}
$$

将这两个估计代入上式, 就得

$$
\left\|\frac{\omega_\theta(t)}{r}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right)\right\|_{L_t^2 L^2}^2 \leqslant C_0(1+t^4)\left(1 + \int_0^t \left\|\frac{v^r(\tau)}{r}\right\|_{L^\infty}^2 d\tau\right) + \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau. \tag{3.24}
$$

回忆推论 3.7 中的估计

$$
\left\|\frac{v^r}{r}\right\|_{L^\infty} \lesssim \left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\|\nabla\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right)\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.
$$

据此估计与 Young 不等式, 就推出

$$
C_0(1+t^4)\int_0^t \left\|\frac{v^r(\tau)}{r}\right\|_{L^\infty}^2 d\tau \leqslant C_0(1+t^8)\int_0^t \left\|\frac{\omega_\theta(\tau)}{r}\right\|_{L^2}^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\nabla\left(\frac{\omega_\theta(\tau)}{r}\right)\right\|_{L^2}^2 d\tau.
$$

代入到 (3.24), 就得

$$
\left\|\frac{\omega_\theta(t)}{r}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right)\right\|_{L_t^2 L^2}^2 \leqslant C_0(1+t^8)\int_0^t \left\|\frac{\omega_\theta(\tau)}{r}\right\|_{L^2}^2 d\tau + \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau. \tag{3.25}
$$

对上式利用 Gronwall 不等式, 就推出

$$
\left\|\frac{\omega_\theta(t)}{r}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla\left(\frac{\omega_\theta}{r}\right)\right\|_{L_t^2 L^2}^2 \leqslant C_0 e^{C_0 t^9}\left(1 + \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau\right). \tag{3.26}
$$

再把 (3.26) 代入到 (3.22), 就得

$$
\|\omega_\theta(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega_\theta\|_{L_t^2 L^2}^2 + \left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L_t^2 L^2}^2 \leqslant C_0 e^{C_0 t^9}\left(1 + \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau\right). \tag{3.27}
$$

为了估计 (3.27) 右边的最后一项, 利用命题 3.7 可见

$$
\|v\|_{L^\infty} \lesssim \|\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.
$$

因此

$$\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 d\tau \leqslant \int_0^t \|\omega_\theta(\tau)\|_{L^2}\|\nabla\omega_\theta(\tau)\|_{L^2}d\tau. \tag{3.28}$$

将上式代入 (3.27), 并利用 Young 不等式, 就推出

$$\begin{aligned}\|\omega_\theta(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\omega_\theta\|_{L_t^2L^2}^2+\left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L_t^2L^2}^2 &\leqslant C_0e^{C_0t^9}\Big(1+\int_0^t \|\omega_\theta(\tau)\|_{L^2}\|\nabla\omega_\theta(\tau)\|_{L^2}d\tau\Big)\\ &\leqslant C_0e^{C_0t^9}\Big(1+\int_0^t \|\omega_\theta(\tau)\|_{L^2}^2d\tau\Big)+\frac{1}{2}\|\nabla\omega_\theta\|_{L_t^2L^2}^2.\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式, 就得估计

$$\|\omega_\theta(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\omega_\theta\|_{L_t^2L^2}^2+\left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L_t^2L^2}^2 \leqslant C_0e^{\exp C_0t^9}.$$

注意到, 在柱坐标意义下

$$\|\nabla\omega\|_{L^2}^2=\|\nabla\omega_\theta\|_{L^2}^2+\left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L^2}^2,$$

因此

$$\|\omega(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\omega\|_{L_t^2L^2}^2 \leqslant C_0e^{\exp C_0t^9}. \tag{3.29}$$

将此估计代入 (3.28) 就意味着

$$\|v\|_{L_t^2L^\infty} \leqslant C_0e^{\exp C_0t^9}. \tag{3.30}$$

将 (3.29) 与 (3.30) 代入 (3.26), 就得

$$\left\|\frac{\omega_\theta}{r}\right\|_{L^2}^2+\left\|\nabla\Big(\frac{\omega_\theta}{r}\Big)\right\|_{L_t^2L^2}^2 \leqslant C_0e^{\exp C_0t^9}. \tag{3.31}$$

这就导出了命题 3.8 中的前两个估计.

现在来证明估计 (3.19). 对于任意的 $q\in\mathbb{N}$, 令 $v_q:=\Delta_q v$. 频率局部化 (3.1) 的第一个方程, 并利用 Duhamel 公式就得

$$v_q(t)=e^{t\Delta}v_q(0)+\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\Delta_q\Big(\mathcal{P}(v\cdot\nabla v)(\tau)d\tau\Big)+\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\Delta_q\Big(\mathcal{P}(\rho e_z)\Big)(\tau)d\tau,$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示在散度为零 (solenoidal) 向量场上的 Leray 投影算子. 利用半群的局部化估计

$$\|e^{t\Delta}\Delta_q\mathcal{P}f\|_{L^p}\leqslant Ce^{-ct2^{2q}}\|\Delta_q f\|_{L^p},\quad \forall p\in[1,\infty],$$

及 Bernstein 不等式, 容易推出

$$\begin{aligned}\|v_q(t)\|_{L^p}\lesssim{}& e^{-ct2^{2q}}\|v_q(0)\|_{L^p}+2^q\int_0^t e^{-c(t-\tau)2^{2q}}\|\Delta_q(v\otimes v)(\tau)\|_{L^p}d\tau\\ &+\int_0^t e^{-c(t-\tau)2^{2q}}\|\Delta_q\rho(\tau)\|_{L^p}d\tau.\end{aligned}$$

两边关于时间积分, 并利用卷积型不等式就导出

$$\|v_q\|_{L_t^1L^p} \lesssim 2^{-2q}\|v_q(0)\|_{L^p} + 2^{-q}\int_0^t \|\Delta_q(v\otimes v)(\tau)\|_{L^p}d\tau + 2^{-2q}\int_0^t \|\Delta_q\rho(\tau)\|_{L^p}d\tau.$$

因此

$$\|v\|_{L_t^1B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}} \leqslant \|\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^p} + \|v_0\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}} + \int_0^t \|(v\otimes v)(\tau)\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}}}d\tau + \int_0^t \|\rho(\tau)\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}}d\tau. \tag{3.32}$$

根据 Bernstein 不等式及命题 3.6 ($p\geqslant 2$) 中的能量估计就得

$$\|\Delta_{-1}v\|_{L_t^1L^p} \lesssim t\|v\|_{L_t^\infty L^2} \leqslant C_0(1+t^2).$$

根据 Sobolev 嵌入关系 $L^p \hookrightarrow B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}$, $p>3$ 及命题 3.6, 推出

$$\int_0^t \|\rho(\tau)\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}}d\tau \lesssim t\|\rho\|_{L_t^\infty L^p} \leqslant C_0 t.$$

另一方面, 利用 Besov 空间的嵌入关系

$$\|v_0\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}-1}} \lesssim \|v_0\|_{B_{2,1}^{\frac{1}{2}}} \leqslant \|v_0\|_{H^1},$$

(3.32) 就变成

$$\|v\|_{L_t^1B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}} \leqslant C_0(1+t^2) + \int_0^t \|(v\otimes v)(\tau)\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}}}d\tau.$$

利用 Besov 空间中的嵌入, 乘积估计与插值结论, 就得

$$\begin{aligned}\|v\otimes v\|_{B_{p,1}^{\frac{3}{p}}} &\lesssim \|v\otimes v\|_{B_{2,1}^{\frac{3}{2}}} \lesssim \|v\|_{L^\infty}\|v\|_{B_{2,1}^{\frac{3}{2}}}\\ &\lesssim \|v\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\|\omega\|_{B_{2,1}^{\frac{1}{2}}}\\ &\lesssim \|v\|_{L^\infty}\|v\|_{L^2} + \|v\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此, 利用 Hölder 不等式就得

$$\begin{aligned}\|v\otimes v\|_{L_t^1B_{p,1}^{\frac{3}{p}}} &\lesssim t^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_t^2L^\infty}\|v\|_{L_t^\infty L^2} + \|v\|_{L_t^{\frac{4}{3}}L^\infty}\|\omega\|_{L_t^\infty L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L_t^2H^1}^{\frac{1}{2}}\\ &\lesssim t^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_t^2L^\infty}\|v\|_{L_t^\infty L^2} + t^{\frac{1}{4}}\|v\|_{L_t^2L^\infty}\|\omega\|_{L_t^\infty L^2}^{\frac{1}{2}}\|\omega\|_{L_t^2H^1}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

利用估计 (3.29) 和 (3.30) 就得

$$\|v\otimes v\|_{L_t^1B_{p,1}^{\frac{3}{p}}} \leqslant C_0e^{\exp C_0t^9}.$$

因此, 有

$$\|v\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1}} \leqslant C_0 e^{\exp C_0 t^9}.$$

利用嵌入定理 $B_{p,1}^{\frac{3}{p}+1} \hookrightarrow W^{1,\infty}$ 就得命题 3.8 中的估计 (3.19). 这就完成命题 3.8 的证明.

第三步. 完成主要定理的证明. 存在性部分的证明按照经典的正则化初值的技术, 区别在于使用的逼近既不改变初值的几何结构, 同时也不改变逼近初值的一致有界性. 令 $\phi \geqslant 0$ 是一个径向对称的、支集含在 $B(0,1)$ 中光滑函数, 且在原点的小邻域上 $\phi \equiv 1$. 不失一般性, 假设 $\int_{\mathbb{R}^3} \phi(x)dx = 1$. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 令 $\phi_n(x) = n^3\phi(nx)$, 定义初值函数的逼近序列

$$v_{0,n} = \phi_n \star v_0 \text{ 和 } \rho_{0,n} = \phi_n \star \rho_0.$$

先从如下的稳定性定理开始我们的讨论:

引理 3.9 (i) 设 $v_0 \in H^1$ 是一个轴对称具零散度的向量场, 满足 $\dfrac{\text{curl } v_0}{r} \in L^2$. 那么对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, 向量场 $v_{0,n}$ 仍是一个轴对称具零散度的向量场, 进而, 存在仅依赖于 ϕ 的常数 C 使得

$$\|v_{0,n}\|_{H^1} \leqslant \|v_0\|_{H^1}, \quad \left\|\frac{\text{curl } v_{0,n}}{r}\right\|_{L^2} \leqslant C\left\|\frac{\text{curl } v_0}{r}\right\|_{L^2}. \tag{3.33}$$

(ii) 设 v 是一个轴对称具零散度的光滑向量场, ρ 是如下输运方程:

$$\begin{cases} \partial_t \rho^{(n)} + v \cdot \nabla \rho^{(n)} = 0, \\ \rho^{(n)}|_{t=0} = \rho_{0,n} \end{cases}$$

的一个解, 假设

$$d(\text{supp } \rho_0, (Oz)) := r_0 > 0, \qquad \text{diam } (\Pi_z(\text{supp } \rho_0)) := d_0 < \infty.$$

则存在仅依赖 r_0, d_0 与 ϕ 的常数 n_0 与 C 使得当 $n > n_0$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\left(\rho^{(n)}\right)^2(t,x)}{r^2}dx \leqslant \frac{\|\rho_0\|_{L^2}^2}{r_0^2} + 2C\|\rho_0\|_{L^\infty}\left(\ln 2 + \left\|\frac{v^r}{r}\right\|_{L_t^1 L^\infty}\right)\left(d_0 + \|v\|_{L_t^1 L^\infty}\right). \tag{3.34}$$

注记 3.1 引理 3.9 的第二部分类似于推论 3.5 的第二部分, 区别是这里多了一个线性项 $\|v\|_{L_t^1 L^\infty}$. 尽管如此, 它的出现并不影响先验估计之前的计算, 最终可以获得与命题 3.8 相同的估计.

证明 (1) 向量场 $v_{0,n}$ 的轴对称性主要源于 ϕ_n 是径向函数的性质, 详细讨论见第 3 章. $\|v_{0,n}\|_{H^1}$ 的估计是显然的. 涉及涡度的估计是技术的, 采用 Ben-Danchin[BD] 的证明方法. 事实上, 在 L^p 框架下仍然成立,$p \in [1,\infty]$. 记 $x = (x_1,x_2,x_3) \triangleq (x',x_3)$, $\bar{x} = (0,0,x_3)$ 及

$$\omega = \nabla \times v, \quad \omega_n = \phi_n * \omega, \quad \alpha = \frac{\omega}{r}, \quad \alpha_n = \frac{\omega_n}{r}.$$

注意到 $\phi(x)$ 是具有紧支集的光滑径向函数, ω 是轴对称向量场 v 的涡度, 则

$$\int_{\mathbb{R}^3} \phi_n(\bar{x}-y)\omega(y)dy = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.35}$$

这样, 就可以将 α_n 的表示式分解成如下形式:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \int_{\mathbb{R}^3} \chi_n(x)\frac{|y'|}{|x'|}\big(\phi_n(x-y)-\phi_n(\bar{x}-y)\big)\alpha(y)dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \big(1-\chi_n(x)\big)\frac{|y'|}{|x'|}\phi_n(x-y)\alpha(y)dy \\
&\triangleq \int_{\mathbb{R}^3} K_n^{(1)}(x,y)\alpha(y)dy + \int_{\mathbb{R}^3} K_n^{(2)}(x,y)\alpha(y)dy,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

这里 $\chi_n(x) \triangleq I_{|z'|\leqslant n^{-1}}(z)$. 如果存在常数 C, 满足

$$\max\left(\int_{\mathbb{R}^3} \big|K_n^{(i)}(x,y)\big|dx, \int_{\mathbb{R}^3} \big|K_n^{(i)}(x,y)\big|dy\right) \leqslant C, \qquad i=1,2. \tag{3.37}$$

则利用 Schur 试验 (test) 引理就得

$$\|\alpha_n\|_{L^p} \leqslant C\|\alpha\|_{L^p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{3.38}$$

因此, 下面仅需证明估计 (3.37). 利用中值定理, 容易验算

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \big|K_n^{(1)}(x,y)\big|dx &\leqslant \chi_n(x)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} |y'|\big|\nabla\phi_n(\bar{x}+t(x-\bar{x})-y)\big|dydt \\
&\leqslant \chi_n(x)\Big(\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} \big|(\bar{x}+t(x-\bar{x})-y)'\big|\big|\nabla\phi_n(\bar{x}+t(x-\bar{x})-y)\big|dydt \\
&\quad + \int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} t|x'|\big|\nabla\phi_n(\bar{x}+t(x-\bar{x})-y)\big|dydt\Big) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \big|\nabla\phi_n(z)\big||z'|dz + n^{-1}\int_{\mathbb{R}^3} \big|\nabla\phi_n(z)\big|dz \\
&\leqslant \big\|(1+|\cdot|)\nabla\phi\big\|_{L^1}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\left|K_n^{(2)}(x,y)\right|dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3}(1-\chi_n(x))\left|\phi_n(x-y)\right|dy+\int_{\mathbb{R}^3}(1-\chi_n(x))\frac{|x'-y'|}{|y'|}\left|\phi_n(x-y)\right|dy\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^3}\left|\phi_n(z)\right|dz+n\int_{\mathbb{R}^3}|z'|\left|\nabla\phi_n(z)\right|dz\\ &\leqslant \left\|(1+|\cdot|)\nabla\phi\right\|_{L^1}. \end{aligned}\tag{3.40}$$

注意到 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, 从 (3.39) 与 (3.40) 就推出, 存在常数 C 使得估计 (3.38) 成立, 即估计 (3.33).

(2) 为了建立所需要的估计, 需要验证命题 3.4 的估计关于 n 是稳定的. 换句话说, 我们要证明对于充分大的 $n\geqslant n_0$, 成立

$$d(\text{supp }\rho^{(n)}(t),(Oz))\geqslant\frac{r_0}{2}\,e^{-\int_0^t\|\frac{v^r}{r}(\tau)\|_{L^\infty}d\tau}\tag{3.41}$$

及

$$d_n(t)\leqslant 2d_0+2\int_0^t\|v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau,\qquad \text{这里}\ \ d_n(t):=\text{diam }(\Pi_z(\text{supp }\rho^{(n)}(t))).\tag{3.42}$$

如果证明了 (3.41) 及 (3.42), 则重复推论 3.5 的证明过程, 就得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\rho^{(n)}(t)}{r}\right\|_{L^2}^2 &\leqslant\frac{1}{r_0^2}\|\rho_{0,n}\|_{L^2}^2+\|\rho_{0,n}\|_{L^\infty}^2\int_{\{r\leqslant r_0\}\cap\text{supp }\rho_n(t)}\frac{1}{r^2}dx\\ &\leqslant\frac{1}{r_0^2}\|\rho_0\|_{L^2}^2+\|\rho_0\|_{L^\infty}^2\int_{\{r\leqslant r_0\}\cap\text{supp }\rho_n(t)}\frac{1}{r^2}dx\\ &\leqslant\frac{1}{r_0^2}\|\rho_0\|_{L^2}^2+\|\rho_0\|_{L^\infty}^2\left(\ln(2)+\left\|\frac{v^r}{r}\right\|_{L_t^1L^\infty}\right)\left(2d_0+2\int_0^t\|v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right).\end{aligned}$$

这就是我们需要的估计. 因此, 我们回头证明不等式 (3.41). 按照命题 3.4 的证明过程, 仅需建立支集的稳定性条件, 即对于充分大的 $n\geqslant n_0$, 成立

$$d(\text{supp }\rho_0^{(n)},(Oz))\geqslant\frac{r_0}{2}.\tag{3.43}$$

根据定义, 有

$$\text{supp }\rho_0^{(n)}\subset\left\{x;\|x-y\|\leqslant\frac{1}{n}\ \text{对于}\|y'\|\geqslant r_0\right\},\quad \text{其中}\ y=(y',y_3)\in\text{supp}\rho_0.$$

显然, 对于任意的 $x\in\text{supp }\rho_0^{(n)}$, 有 $\|x'-y'\|\leqslant\dfrac{1}{n}$. 根据三角不等式就得

$$\|x'\|\geqslant r_0-\frac{1}{n}.$$

因此, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 满足对于任意的 $n \geqslant n_0$, 就有 $\|x'\| \geqslant \frac{r_0}{2}$. 此就意味着

$$\text{supp } \rho_0^{(n)} \subset \left\{ x, \|x'\| \geqslant \frac{r_0}{2} \right\}.$$

这就推出估计 (3.43).

现在来证明估计 (3.42). 根据命题 3.4(ii), 有

$$d_n(t) \leqslant d_{0,n} + 2\int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau, \qquad d_{0,n} := \text{diam } (\Pi_z(\text{supp } \rho_{0,n})).$$

从卷积的支集性质, 容易验证

$$d_{0,n} \leqslant d_0 + \frac{2}{n}.$$

选取 n 充分大, 满足 $n \geqslant n_1$ 就能保证 $d_{0,n} \leqslant 2d_0$. 因此, 仅需取 $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$ 就能确保不等式 (3.41) 与 (3.42) 同时成立.

现在回头证明定理 3.1 的存在性. 根据引理 3.9 知道, 对于任意的 n, 初值逼近序列仍然保持轴对称结构, 并且对于所涉及的范数控制关于 n 均是一致的. 因此, 我们可以构造一个唯一的局部解 (v_n, ρ_n). 根据命题 3.8 速度场的 Lipschitz 范数的控制性估计, (v_n, ρ_n) 不可能在有限时刻发生 Blow-up 现象. 根据标准的方法, 我们能证明 (v_n, ρ_n) 收敛于 (v, ρ), 且极限函数满足 (3.1). 下面来证明唯一性. 令

$$\mathcal{X}_T := \left(L_T^\infty L^2 \cap L_T^2 H^1\right) \times L_T^\infty H^{-1}.$$

设 $(v^{(i)}, \rho^{(i)}) \in \mathcal{X}_T, 1 \leqslant i \leqslant 2$ 是 Cauchy 问题 (3.1) 具有相同初值 (v_0, ρ_0) 的两个解, 令 $\delta v = v^{(2)} - v^{(1)}, \delta\rho = \rho^{(2)} - \rho^{(1)}$. 则 $(\delta v, \delta\rho)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \delta v + v^{(2)} \cdot \nabla \delta v - \Delta \delta v + \nabla \delta p = -\delta v \cdot \nabla v^{(1)} + \delta\rho e_z, \\ \partial_t \delta\rho + v^{(2)} \cdot \nabla \delta\rho = -\delta v \cdot \nabla \rho^{(1)}, \\ \text{div}\, v^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

第一个方程的两边与 δv 作 L^2 内积, 分部积分就得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\delta v\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta v\|_{L^2}^2 &= -\int \delta v \cdot \nabla v^{(1)} \delta v \, dx + \int \delta\rho e_z \delta v \, dx \\ &\leqslant \|\delta v\|_{L^2} \|v^{(1)}\|_{L^\infty} \|\nabla \delta v\|_{L^2} + \|\delta\rho\|_{H^{-1}} \|\delta v\|_{H^1} \\ &\lesssim \left(\|\delta v\|_{L^2} \|v^{(1)}\|_{L^\infty} + \|\delta\rho\|_{H^{-1}}\right) \|\nabla \delta v\|_{L^2} + \|\delta\rho\|_{H^{-1}} \|\delta v\|_{L^2}. \end{aligned}$$

利用 Young 不等式, 就可推出

$$\frac{d}{dt}\|\delta v\|_{L^2}^2 + \|\nabla \delta v\|_{L^2}^2 \lesssim \|\delta v\|_{L^2}^2 \left(\|v^{(1)}\|_{L^\infty}^2 + 1\right) + \|\delta\rho\|_{H^{-1}}^2. \tag{3.45}$$

利用第 2 章建立的输运方程解的正则性的保持, 对于任意的 $p \in [2, \infty)$ 就得

$$\|\delta\rho(t)\|_{H^{-1}} \leqslant C\|\delta v \cdot \nabla\rho^{(1)}\|_{L_t^1 H^{-1}} \exp\big(C\|\nabla v^{(2)}\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{3}{p}}}\big).$$

注意到 $\operatorname{div}\delta v = 0$, 有

$$\|\delta v \cdot \nabla\rho^{(1)}\|_{L_t^1 H^{-1}} \leqslant \|\delta v\, \rho^{(1)}\|_{L_t^1 L^2} \leqslant \|\rho_0\|_{L^\infty}\|\delta v\|_{L_t^1 L^2}.$$

将此代入到 (3.45), 就得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\delta v(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\delta v(t)\|_{L^2}^2 \leqslant & C\|\delta v(t)\|_{L^2}^2\big(\|v^{(1)}(t)\|_{L^\infty}^2 + 1\big) \\ & + C\exp\big(C\|\nabla v^{(2)}\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{3}{p}}}\big)\|\rho_0\|_{L^\infty}^2\|\delta v\|_{L_t^1 L^2}^2.\end{aligned}$$

两边积分, 就推出

$$\begin{aligned}\|\delta v\|_{L_t^\infty L^2}^2 \leqslant & C\int_0^t \|\delta v(\tau)\|_{L^2}^2\big(\|v^{(1)}(\tau)\|_{L^\infty}^2 + 1\big)d\tau \\ & + C\exp(C\|\nabla v^{(2)}\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{3}{p}}})\|\rho_0\|_{L^\infty}^2 \int_0^t \|\delta v\|_{L_\tau^1 L^2}^2 d\tau \\ \leqslant & C\int_0^t \|\delta v\|_{L_\tau^\infty L^2}^2\big(\|v^{(1)}(\tau)\|_{L^\infty}^2 + 1\big)d\tau \\ & + C\exp(C\|\nabla v^{(2)}\|_{L_t^1 B_{p,1}^{\frac{3}{p}}})\|\rho_0\|_{L^\infty} t^2 \int_0^t \|\delta v\|_{L_\tau^\infty L^2}^2 d\tau.\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式及唯一性是一个局部性质的特点, 就完成了唯一性的证明.

第 5 章　临界 Quasi-Geostrophic 方程

本章着力研究大气与海洋的一类重要的流体力学方程 Quasi-Geostrophic 方程 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\partial_t\theta+v\cdot\nabla\theta+\Lambda^\alpha\theta=0, & \Lambda=\sqrt{-\Delta},\\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\end{cases}\tag{(QG)$_\alpha$}$$

这里 $0\leqslant\alpha\leqslant 2$, 速度场 $v=(v_1,v_2)$ 由 θ 的 Riesz 变换决定, 即

$$v=(-\partial_2\Lambda^{-1}\theta,\partial_1\Lambda^{-1}\theta)\triangleq(-R_2\theta,R_1\theta).$$

此方程在数学上具有自身内在的重要性, 同时它是地球物理流体动力学的 2 维模型.

研究进展　以下简单回顾二维有黏 Q-G 方程的研究历史.

I. Resnick 在其博士论文中构造了具耗散项的 Q-G 方程的整体弱解的存在性.

II. 次临界情形 $(\alpha>1)$. Cauchy 问题 $(\mathrm{QG})_\alpha$ 的光滑解是整体适定 (见文献 [Con-Wu] 等)

III. 超临界情形 $(\alpha<1)$. 已证明问题 $(\mathrm{QG})_\alpha$ 是局部适定, 同时还可以证明小解是整体适定 (见 [CMZ1, HK1, Ju1, Wu1] 等文章).

IV. 临界情形 $(\alpha=1)$. 整体适定. 这是一个困难的问题, 最近由 Kiselev-Nazarov-Volberg 用连续模方法解决周期初值情形的整体适定性. 具体地讲, 他们证明了方程的演化保持一个合适的稳态的连续模, 进而意味着解的 Lipschitz 范数是一致有界的. 另一方面, Caffarelli 与 Vasseur 采用调和扩张及 De Giorgi-Nash-Moser 迭代技术建立 Leray-Hopf 整体弱解的正则性, 这是一个普适性的方法, 它可以应用到具有其他更一般的耗散型方程 (一般来讲, 通过紧性原理及正则性方法容易获得弱解的整体存在性, 如何证明弱解的正则性与唯一性的途径是研究经典解适定的有效方法).

除此之外, Abidi-Hmidi 利用通过研究耗散方程的光滑性效应结合连续模方法解决 Cauchy 问题的整体适定性. 关于临界情形的先期工作还有: Constantin, Wu 与 Cordoba 证明了当初值 θ_0 的 L^∞ 范数充分小时临界 Q-G 方程的光滑解的整体适定性.

尺度变换分析与临界空间　设 $\theta(x,t)$ 是 $(\mathrm{QG})_\alpha$ 的解, 则 $\theta_\lambda=\lambda^{\alpha-1}\theta(\lambda x,\lambda^\alpha t)$ 也是 $(\mathrm{QG})_\alpha$ 的解, 则在 Besov 空间的框架下的临界空间是 $\dot B^{\frac{2}{p}+1-\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^2)$.

5.1 Q-G 方程局部理论与 Blow-up 机制

本节研究 2 维临界 Quasi-Geostrophic 方程的 Cauchy 问题

$$
(\mathrm{QG})_1 \qquad \begin{cases} \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta + \Lambda\theta = 0, \\ \theta(x,0) = \theta_0(x) \end{cases} \tag{1.1}
$$

在齐次临界 Besov 空间 $\dot B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2)$ 的适定性问题. 注意到如下 Sobolev 嵌入关系:

$$
\dot B^2_{1,1} \hookrightarrow \dot B^{\frac{2}{p}}_{p,1} \hookrightarrow \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1} \hookrightarrow \dot B^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leqslant r \leqslant \infty,
$$

这里 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 表示 Schwartz 速降函数空间在 $\|\cdot\|_{\dot B^0_{\infty,1}}$ 拓扑下的完备化空间. 因此, 仅需研究初始函数空间属于 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的最大的临界空间 $\dot B^0_{\infty,1}$ 或 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 中的适定性. 从证明中可以看出, 局部适定性与小解的整体适定性在 $\dot B^0_{\infty,1}$ 框架下成立, 然而它不能适应于大解的整体适定性. 这也是我们刻意引入 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 的原因. 事实上, 利用连续模方法自然需要在 L^∞ 意义下具有聚积效应, 因此, 就选择较小的临界空间 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 及齐次临界 Besov 空间 $\dot B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2)$ $(p<\infty)$, 相应的局部与整体适定性均成立. 另一方面, Chen-Miao-Zhang 通过建立广义 Bernstein 不等式及频段上耗散算子在 L^p 层次的正性估计, 可以建立不属于 $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的临界空间 $\dot B^{\frac{2}{p}}_{p,q}$ 中的适定性结果, 详见注记 1.2 (iii) 中的评述.

定理 1.1　*设 $\theta_0 \in \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, 则临界 $(\mathrm{QG})_1$ 方程存在唯一的整体解 θ 满足*

$$
\theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}). \tag{1.2}
$$

注记 1.1　*局部适定性与相应的 Blow-up 机制, 在通常的 $\dot B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ 框架下完全正确, 为统一起见, 全部在 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ 框架下陈述. 但是, 整体适定性需要在 L^∞ 拓扑下的集中效应, 就必须用 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ 或 $\dot B^{\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2)$ 取代 $\dot B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, 使得*

$$
\dot B^{\frac{d}{p}}_{p,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^d), \qquad 1 \leqslant p < \infty.
$$

另外, 由于 $\|\cdot\|_{\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}} = \|\cdot\|_{\dot B^0_{\infty,1}}$ 一样, 故在写范数时, 不加区别.

5.2 节利用连续模方法完成定理 1.1 的证明. 作为第一步, 本节采用 Fourier 局部化方法及前面建立的输运扩散方程的正则性估计来证明 2 维临界 Quasi-Geostrophic 方程的 Cauchy 问题 (1.1) 在齐次临界 Besov 空间 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ 或 $\dot B^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ 中的局部适定性与相应的 Blow-up 准则, 详见命题 1.9 及命题 1.10.

主要工具与预备性引理　一般形式与详细证明参见第 2 章.

考虑如下输运扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta + \Lambda\theta = f,\\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\end{cases} \tag{1.3}$$

这里 v 满足 $\operatorname{div} v=0$, θ_0 是初值函数, f 是给定的外力.

引理 1.2 (耗散半群的局部化) 设 ϕ 是支撑在环型区域 $\{\xi\in\mathbb{R}^N \big| R_1\leqslant|\xi|\leqslant R_2, 0<R_1<R_2\}$ 上的光滑函数. 存在两个仅依赖于 ϕ 的正常数 κ 及 C, 使得对于所有的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $\tau\geqslant 0$ 及 $\lambda>0$, 成立

$$\|\phi(\lambda^{-1}D)e^{-\tau\Lambda^\alpha}u\|_{L^p}\leqslant Ce^{-\kappa\tau\lambda^\alpha}\|\phi(\lambda^{-1}D)u\|_{L^p}.$$

引理 1.3 (粒子轨道映射) 设 v 是一个光滑向量场, ψ_t 是由 v 决定的粒子轨道映射, 即

$$\psi_t(x)=x+\int_0^t v(\tau,\psi_\tau(x))d\tau.$$

则对于所有的 $t\in\mathbb{R}^+$, 流函数 ψ_t 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 C^1- 微分同胚, 且满足

$$\begin{aligned}&\|\nabla\psi_t^{\pm1}\|_{L^\infty}\leqslant e^{V(t)},\\ &\|\nabla\psi_t^{\pm1}-\mathrm{Id}\|_{L^\infty}\leqslant e^{2V(t)}-1,\\ &\|\nabla^2\psi_t^{\pm1}\|_{L^\infty}\leqslant e^{V(t)}\int_0^t\|\nabla^2 v(\tau)\|_{L^\infty}e^{V(\tau)}d\tau,\end{aligned}$$

这里 $V(t)=\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau$.

引理 1.4 设 v 是一个光滑向量场, f 是一个光滑函数, θ 是如下输运扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta + \kappa\Lambda^\alpha\theta = f, \qquad \kappa\geqslant 0,\quad \alpha\in[0,2],\\ \operatorname{div} v=0,\\ \theta(0)=\theta_0(x).\end{cases}$$

则对于任意的 $p\in[1,\infty]$, 有如下先验估计:

$$\|\theta(t)\|_p\leqslant\|\theta_0\|_p+\int_0^t\|f\|_p d\tau.$$

引理 1.5 (交换子估计) 设 $p,r\in[1,\infty]$, $\rho_1,\rho_2<1$, 记 v 是满足 $\operatorname{div} v=0$ 的向量场. 进而假设

$$\rho_1+\rho_2+d\min\Big(1,\ \frac{2}{p}\Big)>0,\quad \rho_1+\frac{d}{p}>0. \tag{1.4}$$

则有估计

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{q(\frac{d}{p}+\rho_1+\rho_2-1)}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_{L_t^1L^p} \lesssim \|v\|_{\mathcal{L}_t^1\dot{B}_{p,r}^{\frac{d}{p}+\rho_1}}\|u\|_{\mathcal{L}_t^1\dot{B}_{p,r}^{\frac{d}{p}+\rho_2}}. \tag{1.5}$$

进而, 对于 $s\in(-1,1)$, 有

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qs}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_p \lesssim \|\nabla v\|_\infty\|u\|_{\dot{B}_{p,1}^s}. \tag{1.6}$$

如果 $v=\nabla^\perp\Lambda^{-1}\theta$, 则对于任意的 $s\geqslant 1$, 有

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{qs}\|[\dot{\Delta}_q, v\cdot\nabla]u\|_p \lesssim [\|\nabla v\|_\infty+\|\nabla\theta\|_\infty]\|u\|_{\dot{B}_{p,1}^s}. \tag{1.7}$$

引理 1.6 (局部化引理) 设 $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ψ 是保持 Lesbegue 测度的微分同胚, 则对任意 $p\in[1,\infty]$ 及 $q,\overline{q}\in\mathbb{Z}$, 有

$$\|\dot{\Delta}_{\overline{q}}(\dot{\Delta}_q u\circ\psi)\|_p \leqslant C2^{-|\overline{q}-q|}\|\nabla\psi^{\varepsilon(\overline{q},q)}\|_\infty\|\dot{\Delta}_q u\|_p, \tag{1.8}$$

这里

$$\varepsilon(\overline{q},q)=\mathrm{sign}(\overline{q}-q),\quad \psi^{-1}\ \text{表示}\ \psi\text{的逆映射}.$$

引理 1.7 (平坦空间中的耗散算子与非平坦空间中的耗散算子的差别) 设 $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}\,(\mathbb{R}^2))$ 是满足 $\mathrm{div}\,v=0$ 的向量场. 对于 $q\in\mathbb{Z}$, 令 $f_q:=\dot{\Delta}_q f$, ψ_q 表示正则化向量场 $\dot{S}_{q-1}v$ 所决定的流函数. 则对于 $f\in\dot{B}^1_{\infty,\infty}$, $q\in\mathbb{Z}$, $p\in[1,\infty]$. 有估计

$$\|\Lambda(\Delta_q f\circ\psi_q)-(\Lambda\Delta_q f)\circ\psi_q\|_{L^p} \leqslant Ce^{CV(t)}V^{\frac12}(t)2^q\|f_q\|_{L^p}, \tag{1.9}$$

这里 $V(t)=\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau$, $C=C(\alpha,p)>0$ 是常数.

命题 1.8 令 $1\leqslant q_1\leqslant q\leqslant\infty$, $s\in(-1,1)$, $v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$ 满足 $\mathrm{div}\,v=0$, $f\in\mathcal{L}^{q_1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}_{\infty,1}^{s+\frac{1}{q_1}-1})$ 是给定的外力. 则存在 $C=C(s)$ 满足对于输运扩散方程 (1.3) 的任意光滑解 θ 及任意的 $t>0$, 有如下的正则化估计:

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}_t^q\dot{B}_{\infty,1}^{s+\frac1q}} \leqslant Ce^{C\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_\infty dt}\Big(\|\theta_0\|_{\dot{B}^s_{\infty,1}}+\|f\|_{\mathcal{L}_t^{q_1}\dot{B}_{\infty,1}^{s+\frac{1}{q_1}-1}}\Big). \tag{1.10}$$

除此之外, 如果 $v=\nabla^\perp\Lambda^{-1}\theta$, 则对于任意的 $s\geqslant 1$, 有

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}_t^q\dot{B}_{\infty,1}^{s+\frac1q}} \leqslant Ce^{C\int_0^t(\|\nabla v(\tau)\|_\infty+\|\nabla\theta(\tau)\|_\infty)dt}\Big(\|\theta_0\|_{\dot{B}^s_{\infty,1}}+\|f\|_{\mathcal{L}_t^{q_1}\dot{B}_{\infty,1}^{s+\frac{1}{q_1}-1}}\Big). \tag{1.11}$$

命题 1.8 是第 2 章定理 3.12 的特殊情形. 证明完全类似于第 2 章定理 1.3, 也可以参考如下文献 [HK1], [MW].

定理 1.1 的证明 局部适定性.

命题 1.9 设 $\theta_0 \in \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$. 存在 $T>0$ 及 (1.1) 的唯一解 θ 满足

$$\theta \in \mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1} \cap L^1_T \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}.$$

进而, 对所有的 $\beta \in \mathbb{R}^+$, 有 $t^\beta \theta \in \mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^\beta_{\infty,1}$.

证明 用迭代的技术来证明此命题. 分如下几个步骤:

第一步. 逼近问题的解. 设 $\theta^0(t) := e^{-t\Lambda}\theta_0(x)$, $v^0(t,x) = (-R_2\theta^0(t), R_1\theta^0(t))$. 令 θ^{n+1} 是如下线性问题的解:

$$\begin{cases} \partial_t \theta^{n+1} + v^n \nabla_x \theta^{n+1} + \Lambda\theta^{n+1} = 0, \\ v^n(t,x) = (-R_2\theta^n(t), R_1\theta^n(t)), \\ \theta^{n+1}(x,0) = \theta_0(x). \end{cases}$$

注意到 $\theta^0 \in L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1})$, 利用 Riesz 变换在齐次 Besov 空间的连续性, 就推知 $v^0(t,x) \in L^1(\mathbb{R}^+; \dot{B}^1_{\infty,1})$, 因此, 根据命题 1.8, 对 $\forall n \in \mathbb{N}$, 有

$$\theta^n(t) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^+; \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}) \cap L^1(\mathbb{R}^+; \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}). \tag{1.12}$$

第二步. 一致性估计. 下面建立逼近解序列 θ^n 在 $[0,T]$ 上的一致性估计, 这里 $T>0$ 不依赖 n.

采用归纳法. 根据 Lebesgue 定理, 存在常数 $\widetilde{T}>0$ 及绝对常数

$$\varepsilon_0 \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2C^2}, \frac{C_0}{2}\right\}\right)$$

满足

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} (1-e^{-\kappa T 2^q})^{\frac{1}{2}} \|\dot{\Delta}_q \theta_0\|_\infty \leqslant \varepsilon_0. \tag{1.13}$$

利用交换子估计–命题 1.5 及命题 1.8 的证明过程 (见第 2 章定理 3.12 的证明), 容易推出: 对于满足

$$\int_0^{\widetilde{T}} \|\theta^n(\tau)\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}} d\tau \leqslant CC_0, \qquad \|\theta^n\|_{\mathcal{L}^2_{\widetilde{T}} \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{\infty,1}} \leqslant 2C\varepsilon_0$$

的 $\widetilde{T}>0$, 有估计:

$$\begin{aligned} &\|\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2_t \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{\infty,1}} + \|\theta^{n+1}\|_{L^1_t \dot{B}^1_{\infty,1}} \\ \leqslant & C\sum_{q\in\mathbb{Z}} (1-e^{-\kappa t 2^q})^{\frac{1}{2}} \|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + \sum_{q\in\mathbb{Z}} \int_0^t \big\|[\Delta_q, v^n\cdot\nabla]\theta^{n+1}(\tau)\big\|_\infty d\tau \\ & + \sum_{q\in\mathbb{Z}} \int_0^t \big\|(S_{q-1}v^n - v^n)\cdot\nabla\Delta_q\theta^{n+1}(\tau)\big\|_\infty d\tau \\ \leqslant & C\sum_{q\in\mathbb{Z}} (1-e^{-\kappa t 2^q})^{\frac{1}{2}} \|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty + C\|\theta^n\|_{\mathcal{L}^2_t \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{\infty,1}} \|\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2_t \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{\infty,1}}, \quad 0<t\leqslant \widetilde{T}. \end{aligned}$$

从而推出

$$\|\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2_T\dot{B}^{\frac{1}{2}}_{\infty,1}} + \|\theta^{n+1}\|_{L^1_T\dot{B}^1_{\infty,1}} \leqslant 2C\varepsilon_0 \leqslant CC_0, \quad T = \widetilde{T}. \tag{1.14}$$

另一方面, 利用命题 1.8 及 Sobolev 嵌入定理 $\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty$, 就有

$$\|\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^\infty_T\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant Ce^{C\int_0^T\|\theta^n(\tau)\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}}d\tau}\|\theta_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\|\theta_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}.$$

综上所述, 我们证明逼近解序列 $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在空间 $\mathcal{L}^\infty_T\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}\cap L^1_T\dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}$ 中一致有界.

注记 1.2 (i) 在导出估计 (1.14) 过程中, 用到归纳迭代技术, 具体地说是在空间 $X(I) = \mathcal{L}^2_t(I;\dot{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}_{\infty,1})\cap L^1_t(I;\dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1})$ 的闭集:

$$\mathcal{X}(I) = \left\{\theta(t)\in X(I); \|\theta\|_{X(I)} \leqslant 2C\sum_{q\in\mathbb{Z}}(1-e^{-\kappa T2^q})^{\frac{1}{2}}\|\dot{\Delta}_q\theta_0\|_\infty = 2C\varepsilon_0\right\},$$

这里 $T\leqslant\tilde{T}$ 是待定常数. 因此, 仅需取 $0<T\leqslant\tilde{T}$ 充分小, 使得

$$2C^2\varepsilon_0 < \frac{1}{2},$$

就可以保证 (1.14) 对所有的 n 成立.

(ii) 如果直接利用时空正则性估计

$$\|v\|_{\mathcal{L}^q(I;\dot{B}^{s+\frac{1}{q}}_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n))} \leqslant C\left[\|v_0(x)\|_{\dot{B}^s_{p,\sigma}} + \|f\|_{\mathcal{L}^\ell(I;\dot{B}^{s+\frac{1}{\ell}-1}_{p,\sigma})}\right], \quad 1\leqslant\ell\leqslant q, \tag{1.15}$$

将对流项视为非线性扰动, 通过双线性估计

$$\|v^n\cdot\nabla\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^1\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} \leqslant C\|v^n\|_{\mathcal{L}^\infty_t\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}}\|\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^1_t\dot{B}^{\frac{d}{p}+1}_{p,1}}, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

可以获得小解的整体存在性. 研究大解的局部存在性需要如下的双线性估计:

$$\|v^n\cdot\nabla\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^1\dot{B}^{\frac{d}{p}}_{p,1}} \leqslant C\|v^n\|_{\mathcal{L}^2_t\dot{B}^{\frac{d}{p}+\frac{1}{2}}_{p,1}}\|\theta^{n+1}\|_{\mathcal{L}^2_t\dot{B}^{\frac{d}{p}+\frac{1}{2}}_{p,1}}, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

然而, 这个双线性估计未必成立. 这充分说明消失结构及频率空间中的分析在研究大解局部适定性中的重要性.

(iii) Chen-Miao-Zhang[CMZ1] 通过建立形如广义 Bernstein 不等式, 即对于任意 $j\in\mathbb{Z}$, 存在常数 c_p 及 C_p 使得

$$c_p2^{\frac{2\alpha j}{p}}\|\dot{\Delta}_j\theta\|_p \leqslant \|\Lambda^\alpha(|\dot{\Delta}_j\theta|^{\frac{p}{2}})\|_2^{\frac{2}{p}} \leqslant C_p2^{\frac{2\alpha j}{p}}\|\dot{\Delta}_j\theta\|_p, \quad p\in[2,\infty),\ \alpha\in[0,1],$$

获得了非局部耗散算子在频段层次上对应的 L^p 框架下的正性估计

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Lambda^{2\alpha}\Delta_j\theta|\Delta_j\theta|^{p-2}\Delta_j\theta dx \geqslant c_p2^{2\alpha j}\|\Delta_j\theta\|_p^p, \quad p\geqslant 2.$$

进而通过 Fourier 局部化方法、频段层次的能量估计与交换子估计

$$\begin{aligned}&\left\|2^{j\sigma}\|[u,\Delta_j]\cdot\nabla\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^+,L^p)}\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}\\ \leqslant& C\|u\|_{\mathcal{L}^2(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+1-\alpha})}\|\theta\|_{\mathcal{L}^2(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+1-\alpha})}\\ \leqslant& C\|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty(\dot B_{p,q}^{\sigma})}\|\theta\|_{\mathcal{L}^1(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+1})},\quad \sigma=\frac{2}{p}+1-2\alpha,\end{aligned}$$

来建立相应于 Cauchy 问题 (1.3) 解的先验估计, 即

$$\|\theta(t)\|_{\mathcal{L}^\infty(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}})}+\|\theta(t)\|_{\mathcal{L}^1(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+1})}\leqslant 2\|\theta_0\|_{\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}}}+C\|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}})}\|\theta\|_{\mathcal{L}^1(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+1})},$$

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}_T^2(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+\frac{1}{2}})}\leqslant C\Big(\left\|\left(1-e^{-\kappa 2^jT}\right)^{\frac{1}{2}}2^{j\frac{2}{p}}\|\Delta_j\theta_0\|_p\right\|_{\ell^q(\mathbb{Z})}+\|\theta\|^2_{\mathcal{L}_T^2(\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}+\frac{1}{2}})}\Big).$$

其中上面的第一个不等式可以建立小解在临界空间 $\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}}$ 中的整体适定性, 第二个不等式结合单模方法就可以推出大解在临界空间 $\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}}$ 中的局部适定性. Chen-Miao-Zhang [CMZ1] 的方法主要基于频段层次非局部耗散算子在 L^p 框架下的正性估计、频段层次的能量估计及交换子估计, 也充分利用了对流项的消失结构.

(iv) Abidi-Hmidi-Keraani [AH, HK1, HK2] 的方法也充分利用了对流项的消失结构, 通过正则化的粒子轨道映射, 将对流项吸收的物质导数中, 将方程转化成新的坐标系下的热传导方程. 作为代价, 热方程中除了出现局部化流场所派生的交换子外, 在非线性项中还增加了平坦空间中的耗散算子与非平坦空间中的耗散算子的差别所派生的交换子. 可以证明在形如 $\dot B^0_{\infty,1}$ 的临界空间中的适定性. 然而, 他们的方法严重地依赖于粒子轨道映射, 这就要求 $\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}}\hookrightarrow L^\infty$. 因此其方法似乎不能处理第二可积指标不为 1 的临界空间 $\dot B_{p,q}^{\frac{2}{p}}$ 中的适定性问题.

第三步. 强收敛. 首先证明 $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{L}_T^\infty\dot B^0_{\infty,1}$ 中的 Cauchy 列. 令 $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, $n>m$ 且

$$\theta^{n,m}:=\theta^n-\theta^m,\qquad v^{n,m}:=v^n-v^m.$$

容易验证

$$\begin{cases}\partial_t\theta^{n+1,m+1}+v^n\cdot\nabla\theta^{n+1,m+1}+\Lambda\theta^{n+1,m+1}=-v^{n,m}\cdot\nabla\theta^{m+1},\\ \theta^{n+1,m+1}(x,0)=0.\end{cases}$$

注意到 $\theta^{n,m}(0)=0$, 利用命题 1.8, 有

$$\|\theta^{n+1,m+1}\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot B^0_{\infty,1}}\leqslant Ce^{C\|\theta^n\|_{L_T^1\dot B^1_{\infty,1}}}\int_0^T\|v^{n,m}\cdot\nabla\theta^{m+1}(\tau)\|_{\dot B^0_{\infty,1}}d\tau.\tag{1.16}$$

根据 Sobolev 嵌入定理 $\dot{B}^0_{\infty,1} \hookrightarrow L^\infty$ 及双线性估计, 可见

$$\|v^{n,m} \cdot \nabla \theta^{m+1}\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \lesssim \|v^{n,m}\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}} \|\theta^{m+1}\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}}. \tag{1.17}$$

将上式代入到 (1.16), 整理就得

$$\|\theta^{n+1,m+1}\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\|\theta^{n,m}\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}} e^{C\|\theta^n\|_{L^1_T \dot{B}^1_{\infty,1}}} \int_0^T \|\theta^{m+1}(\tau)\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}} d\tau.$$

据 (1.14), 可以选取 ε_0 充分小使得

$$\|\theta^{n+1,m+1}\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant \varepsilon \|\theta^{n,m}\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}},$$

这里 $\varepsilon < 1$. 利用归纳方法就可推出

$$\|\theta^{n+1,m+1}\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant \varepsilon^{m+1} \|\theta^{n-m,0}\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C\varepsilon^{m+1}\|\theta_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}}.$$

上式就意味着 $(\theta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 $\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 中的 Cauchy 列. 因此, 存在 $\theta \in \mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 满足 $\{\theta^n\}$ 在空间 $\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1}$ 中强收敛到 θ. 利用 Fatou 定理与 (1.14) 就可以推出 $\theta \in L^1_T \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}$. 进而, 对逼近方程两边取极限, 就可获得 (1.2) 在空间 $X_T \triangleq \mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1} \cap L^1_T \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}$ 中的解.

第四步. 唯一性.

设 $\theta_1, \theta_2 \in X_T$ 是临界 $(\mathrm{QG})_1$ 方程 (1.1) 具相同初值的解. 令

$$\theta_{1,2} := \theta_1 - \theta_2, \quad v_{1,2} := v_1 - v_2.$$

则

$$\begin{cases} \partial_t \theta_{1,2} + v_1 \cdot \nabla \theta_{1,2} + \Lambda \theta_{1,2} = -\theta_{1,2} \cdot \nabla \theta_2, \\ \theta_{1,2}(x,0) = 0. \end{cases}$$

利用 (1.16), (1.17) 及第二步中的讨论, 有

$$\|\theta_{1,2}\|_{\mathcal{L}^\infty_t \dot{B}^0_{\infty,1}} \leqslant C e^{C\|\theta_1\|_{L^1_t \dot{B}^1_{\infty,1}}} \int_0^t \|\theta_{1,2}\|_{\mathcal{L}^\infty_\tau \dot{B}^0_{\infty,1}} \|\theta_2(\tau)\|_{\dot{B}^1_{\infty,1}} d\tau.$$

利用 Gronwall 不等式就得 $\theta_1 = \theta_2$, $v_1 = v_2$, $t \in [0, T]$.

第五步. 光滑效应.

现在给出关于时间加权型的点态型的光滑效应, 即对于所有的 $\beta \in \mathbb{R}^+$, 成立

$$\|t^\beta \theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^\beta_{\infty,1}} \leqslant C_\beta e^{C(\beta+1)\|\theta\|_{L^1_T \dot{B}^1_{\infty,1}}} \|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}}. \tag{1.18}$$

显然

$$\begin{cases} \partial_t (t^\beta \theta) + v \cdot \nabla (t^\beta \theta) + \Lambda (t^\beta \theta) = \beta t^{\beta-1} \theta, \quad t > 0, \\ (t^\beta \theta)(x,0) = 0. \end{cases}$$

当 $\beta = 1$ 时, 由命题 1.8 可见

$$\|t\theta(t)\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^1_{\infty,1}} \leqslant Ce^{C\|\theta\|_{L^1_T \dot{B}^1_{\infty,1}}} \|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}}.$$

假设 (1.18) 对 n 成立, 往证 $n+1$ 时的情形. 对于 $t^{n+1}\theta$ 所满足的方程应用命题 1.8 就得

$$\begin{aligned}\|t^{n+1}\theta(t)\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^{n+1}_{p,1}} &\leqslant C(n+1)e^{C\|\theta\|_{L^1_T \dot{B}^1_{\theta,1}}} \|t^n\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^n_{\infty,1}} \\ &\leqslant C_n e^{C(n+2)\|\theta\|_{L^1_T \dot{B}^1_{\infty,1}}} \|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^0_{\infty,1}}.\end{aligned}$$

对于一般的 $\beta \in \mathbb{R}^+$, 注意到 $[\beta] \leqslant \beta \leqslant [\beta]+1$, 利用插值定理

$$\|t^\beta\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^\beta_{\infty,1}} \lesssim \|t^{[\beta]}\theta\|^{[\beta]+1-\beta}_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^{[\beta]}_{\infty,1}} \|t^{[\beta]+1}\theta\|^{\beta-[\beta]}_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^{[\beta]+1}_{\infty,1}}$$

即可.

第六步. Blow-up 准则. 现在给出一个 Blow-up 准则:

命题 1.10 *设 T^* 是满足 $\theta \in \mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1} \cap L^1_T \dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}$ 的最大存在区间. 如果 $T^* < \infty$, 则存在一个常数 $\varepsilon_0 > 0$ 满足*

$$\lim \inf_{t\to T^*} (T^* - t)\|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty} \geqslant \varepsilon_0. \tag{1.19}$$

证明 容易看出, 如果 $T^* < \infty$, 那么

$$\liminf_{t\to T^*} \sum_{q\in\mathbb{Z}} (1 - e^{-\kappa(T^*-t)2^q})^{\frac{1}{2}} \|\dot{\Delta}_q\theta(t)\|_\infty \geqslant \varepsilon_0. \tag{1.20}$$

否则, 由局部存在性, 具体地从 (1.13) 推知, 可以将解扩展到 $\widetilde{T} > T^*$. 因此

$$\liminf_{t\to T^*} \sum_{q\in\mathbb{Z}} (1 - e^{-\kappa(T^*-t)2^q})^{\frac{1}{2}} \sup_{\tau\leqslant T^*} \|\dot{\Delta}_q\theta(\tau)\|_\infty \geqslant \varepsilon_0. \tag{1.21}$$

利用 Lebesgue 定理, 可见

$$\|\theta\|_{\mathcal{L}^\infty_{T^*}(\dot{B}^0_{\infty,1})} = \infty. \tag{1.22}$$

利用 Bernstein 不等式及 $\|\Delta_q\theta\|_\infty \lesssim \|\theta_0(x)\|_\infty$, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &\leqslant \liminf_{t\to T^*} \left\{ \sum_{q\leqslant N} (1 - e^{-\kappa(T^*-t)2^q})^{\frac{1}{2}} \|\dot{\Delta}_q\theta\|_\infty + \sum_{q\geqslant N} (1 - e^{-\kappa(T^*-t)2^q})^{\frac{1}{2}} \|\dot{\Delta}_q\theta\|_\infty \right\} \\ &\leqslant \liminf_{t\to T^*} \left\{ (T^*-t)^{\frac{1}{2}} \|\theta_0\|_\infty \sum_{q\leqslant N} 2^{\frac{q}{2}} + \|\nabla\theta\|_\infty \sum_{q\geqslant N} 2^{-q} \right\} \\ &\leqslant \liminf_{t\to T^*} \left\{ (T^*-t)^{\frac{1}{2}} \|\theta_0\|_\infty 2^{\frac{N}{2}} + \|\nabla\theta\|_\infty 2^{-N} \right\},\end{aligned} \tag{1.23}$$

选取合适的 N 就得所需要的结果. □

注记 1.3 在 (1.23) 的证明中, N 的选取如下: 选取充分大的 $A>0$ 待定, 取 $2^{-N}=A(T^*-t)$, 则 (1.23) 就变成了

$$\varepsilon_0\leqslant A^{-\frac{1}{2}}\|\theta_0\|_\infty+A\|\nabla\theta\|_\infty(T^*-t).$$

由此推出

$$\frac{\varepsilon_0^3}{8\|\theta_0\|_\infty^2}\leqslant\frac{\varepsilon_0-A^{-\frac{1}{2}}\|\theta_0\|_\infty}{A}\leqslant\|\nabla\theta\|_\infty(T^*-t).$$

故仅需取 $A=4\|\theta_0\|_\infty^2\varepsilon_0^{-2}$ 即可.

5.2 连续模方法与临界 Q-G 方程的整体解

现在采用 Kiselev-Nazarov-Volberg [KNV] 的连续模方法 (modulus of continuity), 证明临界 Q-G 方程在临界 Besov 空间中的整体适定性.

连续模定义与基本事实 称 $[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 上单增的连续凹函数 $\omega(r)$ 是一个连续模, 如果它满足 $\omega(0)=0$. 称函数 $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 具有连续模 ω, 如果它满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\omega(|x-y|),\qquad\forall\,x,y\in\mathbb{R}^d.\tag{2.1}$$

一般来讲, 奇异积分算子不能保持连续模, 但是它对连续模的破坏也不大. 这正是连续模方法的出发点. 事实上, 对于 Riesz 变换, 有如下命题.

命题 2.1 设函数 θ 具有连续模 ω, 则 $u=(-R_2\theta,R_1\theta)$ 具有如下形式的连续模 Ω:

$$\Omega(\xi)=A\bigg(\int_0^\xi\frac{\omega(\eta)}{\eta}d\eta+\xi\int_\xi^\infty\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}d\eta\bigg),\tag{2.2}$$

这里 $A>0$ 是一个固定的常数.

证明 注意到 Riesz 变换是奇异积分算子, 因此它对应的核函数满足

$$K(r,\zeta)=r^{-2}\tilde{\Omega}(\zeta),\qquad\int_{S^1}\tilde{\Omega}(\zeta)d\sigma(\zeta)=0,\tag{2.3}$$

这里 (r,ζ) 表示极坐标. 设函数 θ 具有连续模 ω, 即

$$|\theta(x)-\theta(y)|\leqslant\omega(\xi),\quad|x-y|=\xi.$$

考虑:

$$\text{P.V.}\int K(x-z)\theta(z)dz-\text{P.V.}\int K(y-z)\theta(z)dz,\tag{2.4}$$

这里 P.V. 表示主值积分. 注意到 $\omega(\xi)$ 是正的单增凹函数, 容易看出

$$\int_0^{2\xi}\frac{\omega(r)}{r}dr\leqslant2\int_0^\xi\frac{\omega(r)}{r}dr,\tag{2.5}$$

这里可以通过单增凹函数几何解释直观获得. 因此, 利用消失性及极坐标变换就得

$$\begin{aligned}\left|\text{P.V.}\int_{|x-z|\leqslant 2\xi}K(x-z)\theta(z)dz\right| \leqslant&\left|\text{P.V.}\int_{|x-z|\leqslant 2\xi}K(x-z)(\theta(z)-\theta(x))dz\right|\\ \leqslant&C\int_0^{2\xi}\frac{\omega(r)}{r}dr\leqslant 2C\int_0^{\xi}\frac{\omega(r)}{r}dr.\end{aligned}\tag{2.6}$$

类似地, 有

$$\left|\text{P.V.}\int_{|y-z|\leqslant 2\xi}K(y-z)\theta(z)dz\right|\leqslant 2C\int_0^{\xi}\frac{\omega(r)}{r}dr.\tag{2.7}$$

其次, 令 $\tilde{x}=\dfrac{x+y}{2}$, 简单的分析 (可借助于几何作图), 就得

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|x-z|\geqslant 2\xi}K(x-z)\theta(z)dz-\int_{|y-z|\geqslant 2\xi}K(y-z)\theta(z)dz\right|\\ \leqslant&\left|\int_{|x-z|\geqslant 2\xi}K(x-z)(\theta(z)-\theta(\tilde{x}))dz-\int_{|y-z|\geqslant 2\xi}K(y-z)(\theta(z)-\theta(\tilde{x}))dz\right|\\ \leqslant&\int_{|\tilde{x}-z|\geqslant 3\xi}|K(x-z)-K(y-z)||\theta(z)-\theta(\tilde{x})|dz\\ &+\int_{\frac{3}{2}\xi\leqslant|\tilde{x}-z|\leqslant 3\xi}(|K(x-z)|+|K(y-z)|)|\theta(z)-\theta(\tilde{x})|dz\\ =&I_1+I_2.\end{aligned}\tag{2.8}$$

注意到

$$|K(x-z)-K(y-z)|\leqslant C\frac{|x-y|}{|\tilde{x}-z|^3},\qquad |\tilde{x}-z|\geqslant 3\xi,$$

则

$$I_1\leqslant C\xi\int_{3\xi}^{\infty}\frac{\omega(r)}{r^2}dr,\quad I_2\leqslant C\omega(3\xi)\leqslant 3C\int_0^{\xi}\frac{\omega(r)}{r}dr.$$

这里 I_2 的第二个不等式用到了 ω 的凹性. 将 I_1, I_2 的估计代入 (2.8), 结合 (2.6), (2.7) 就得估计 (2.2), 因此命题 2.1 得证.

基本理念 I 一般来讲, 对流项 $u\cdot\nabla\theta$ 使得 θ 的连续模变坏, 而耗散项 $(-\Delta)^{\alpha}\theta$ 使得 θ 的连续模变好. 因此, 选取连续模的原则是: 确保耗散算子 $(-\Delta)^{\alpha}$ 的作用占主导地位.

基本理念 II 根据解的 Blow-up 准则, 解的整体存在性就归结于证明

$$\sup_{0\leqslant t<T^*}\|\nabla\theta\|_{\infty}<\infty,$$

其中 $T^*<\infty$ 表示最大局部存区间的端点. 我们可以选取连续模 ω 满足

$$\omega'(0)<\infty,\quad \lim_{\xi\to 0+}\omega''(\xi)=-\infty.\tag{2.9}$$

这样一来, 利用连续模的定义就推出

$$\frac{|\theta(t,x)-\theta(t,y)|}{|x-y|}\leqslant\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|}\implies\sup_{0\leqslant t<T^*}\|\nabla\theta(t)\|_\infty\leqslant|\omega'(0)|.\tag{2.10}$$

显然, 解的整体存在性就归结于构造连续模满足 $|\omega'(0)|<\infty$.

整体适定性的证明 设 T^* 是问题 (1.1) 的极大存在区间, 即

$$\theta\in\mathcal{L}^\infty([0,T^*);\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1})\cap L^1_{\rm loc}([0,T^*);\dot{\mathcal{B}}^1_{\infty,1}).$$

利用命题 1.9 中所阐述解的光滑效应知, 存在 $T_0>0$ 满足

$$t\|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty}\leqslant C\|\theta_0\|_{\dot{B}^0_{\infty,1}},\qquad\forall t\in[0,T_0].$$

令 $\lambda>0$ 是待定常数, $T_1\in(0,T_0)$. 定义集合

$$I:=\{T\in[T_1,T^*);\forall t\in[T_1,T],\forall x\neq y\in\mathbb{R}^2,|\theta(x,t)-\theta(y,t)|<\omega_\lambda(|x-y|)\},\tag{2.11}$$

这里 $\omega:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 是严格增加的凹函数, 满足

$$\omega(0)=0,\quad\omega'(0)<+\infty,\quad\lim_{\xi\to0^+}\omega''(\xi)=-\infty,\quad\omega_\lambda(|x-y|)=\omega(\lambda|x-y|).\tag{2.12}$$

连续模 ω 是 Kiselev-Nazarov-Volberg 构造的, 见后面的具体表示式.

第一步. 对于合适的 λ (在适当的条件下), 证明 $T_1\in I$.

首先, 选取正常数 C_0 满足

$$2\|\theta_0\|_{L^\infty}<\omega(C_0)<3\|\theta_0\|_{L^\infty}.\tag{2.13}$$

由于 ω 是严格单增函数, 根据最大值原理, 当 $\lambda|x-y|\geqslant C_0$ 时, 有

$$|\theta(x,T_1)-\theta(y,T_1)|\leqslant2\|\theta_0\|_{L^\infty}<\omega_\lambda(|x-y|),\quad\lambda|x-y|\geqslant C_0.\tag{2.14}$$

其次, 利用中值定理可得

$$|\theta(x,T_1)-\theta(y,T_1)|\leqslant|x-y|\|\nabla\theta(T_1)\|_{L^\infty}.$$

令 $0<\delta_0<C_0$, 利用连续模 ω 的凹性, 就得

$$\lambda|x-y|\leqslant\delta_0\implies\omega_\lambda(|x-y|)\geqslant\frac{\omega(\delta_0)}{\delta_0}\lambda|x-y|.$$

若选取 λ 满足

$$\lambda>\frac{\delta_0}{\omega(\delta_0)}\|\nabla\theta(T_1)\|_{L^\infty},$$

容易推出

$$|\theta(x,T_1)-\theta(y,T_1)|<\omega_\lambda(|x-y|),\quad 0<\lambda|x-y|\leqslant\delta_0. \tag{2.15}$$

现在考虑 $\delta_0\leqslant\lambda|x-y|\leqslant C_0$ 的情形. 利用中值定理及连续模 ω 的单增性, 就得

$$|\theta(x,T_1)-\theta(y,T_1)|\leqslant\frac{C_0}{\lambda}\|\nabla\theta(T_1)\|_{L^\infty}\quad 和\quad \omega(\delta_0)\leqslant\omega_\lambda(|x-y|).$$

选取 λ 满足

$$\lambda>\frac{C_0}{\omega(\delta_0)}\|\nabla\theta(T_1)\|_{L^\infty},$$

因此

$$|\theta(x,T_1)-\theta(y,T_1)|<\omega_\lambda(|x-y|),\quad \delta_0\leqslant\lambda|x-y|\leqslant C_0. \tag{2.16}$$

综合上面关于 λ 不同选取, 若选取 $\omega^{-1}(2\|\theta_0\|_\infty)<\delta_0<C_0$, 就可以统一地取成

$$\lambda=\frac{\omega^{-1}(3\|\theta_0\|_{L^\infty})}{2\|\theta_0\|_{L^\infty}}\|\nabla\theta(T_1)\|_{L^\infty}. \tag{2.17}$$

第二步. 根据上面的构造性证明, 集合 I 是一个区间, 记成 $[T_1,T_*)$. 下面分三种情形来讨论:

情形 1. $T_*=T^*$, 说明 θ 的 Lipschitz 模不会 Blow up, 因此, $T^*=\infty$.

情形 2. $T_*\in I$. 首先, 记 C_0 满足 (2.13), 即

$$2\|\theta_0\|_{L^\infty}<\omega(C_0)<3\|\theta_0\|_{L^\infty}.$$

则对于任意的 $t\in[T_1,T^*)$, 总有

$$\lambda|x-y|\geqslant C_0\implies|\theta(x,t)-\theta(y,t)|\leqslant2\|\theta_0\|_\infty<\omega_\lambda(|x-y|).$$

由于

$$\nabla\theta(t)\in\mathcal{C}((0,T^*);\dot{\mathcal{B}}^0_{\infty,1})\hookrightarrow\mathcal{C}((0,T^*);\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^2)),$$

则对于 $\varepsilon>0$, 存在 η_0, $R>0$ 满足对 $\forall t\in[T_*,T_*+\eta_0]$, 有

$$\|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty}\leqslant\|\nabla\theta(T_*)\|_{L^\infty}+\frac{\varepsilon}{2}\quad 和\quad \|\nabla\theta(T_*)\|_{L^\infty(B_R^c(0))}\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

这里 $B_R(0)$ 表示以原点为心, 半径为 R 的球, 而 $B_R^c(0)$ 表示 $B_R(0)$ 的补集. 因此, 对于

$$\lambda|x-y|\leqslant C_0,\quad 且\ x\ 或\ y\in B^c_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0),$$

则对于 $\forall t \in [T_*, T_* + \eta_0]$, 有

$$|\theta(x,t) - \theta(y,t)| \leqslant |x-y| \|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty\left(B_R^c(0)\right)} \leqslant \varepsilon |x-y|.$$

另一方面, 利用连续模 ω 的凹性, 可见

$$\lambda|x-y| \leqslant C_0 \Longrightarrow \frac{\omega(C_0)}{C_0}\lambda|x-y| \leqslant \omega_\lambda(|x-y|).$$

因此, 取 ε 充分小, 使得

$$\varepsilon < \frac{\omega(C_0)}{C_0}\lambda,$$

则

$$|\theta(x,t) - \theta(y,t)| < \omega_\lambda(|x-y|), \quad \lambda|x-y| \leqslant C_0, \quad 且\ x\ 或\ y \in B^c_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0). \tag{2.18}$$

其次, 考虑 $x, y \in B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0)$ 的情形. 由于 $\|\nabla^2\theta(T_*)\|_{L^\infty} < \infty$ (见命题 1.9), 及

$$\lim_{\xi\to 0^+} \omega''(\xi) = -\infty,$$

则对于任意的 $x \in B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0)$,

$$|\nabla\theta(x, T_*)| < \lambda\omega'(0).$$

根据 $x \longrightarrow |\nabla\theta(x,T_*)|$ 的连续性, 在闭球上有一致的估计:

$$\|\nabla\theta(T_*)\|_{L^\infty\left(B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0)\right)} < \lambda\omega'(0).$$

设 $\delta_1 \ll 1$. 利用 $\|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty}$ 关于时间的连续性, 存在 $\eta_1 > 0$ 使得 $\forall t \in [T_*, T_* + \eta_1]$, 有

$$\|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty\left(B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0)\right)} < \lambda\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \quad \left(用到\ \lim_{\delta\to 0}\lambda\frac{\omega(\delta)}{\delta} = \lambda\omega(0)\right).$$

因此, 当 $\lambda|x-y| \leqslant \delta_1$ 且 $x \neq y$ 均属于 $B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0)$ 时, 总有

$$\begin{aligned} |\theta(x,t) - \theta(y,t)| &\leqslant |x-y| \|\nabla\theta(t)\|_{L^\infty\left(B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0)\right)} \\ &< \lambda|x-y|\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \\ &\leqslant \omega_\lambda(|x-y|), \quad \forall t \in [T_*, T_* + \eta_1]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

最后, 考虑剩余的情形. 由于

$$\forall x, y \in B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0),\ \ \delta_1 \leqslant \lambda|x-y|;\ \ |\theta(x,T_*) - \theta(y,T_*)| < \omega_\lambda(|x-y|),$$

由于区域

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2, |x|,|y|\leqslant R+\frac{C_0}{\lambda},\ \lambda|x-y|\geqslant\delta_1\right\}$$

是 $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ 中的紧集与 $\omega_\lambda(|x-y|)>\omega(\delta_1)$, 存在 $\eta_2>0$ 使得对所有的 $t\in[T_*,T_*+\eta_2]$, 有

$$|\theta(x,t)-\theta(y,t)|<\omega_\lambda(|x-y|),\quad \forall x,y\in B_{R+\frac{C_0}{\lambda}}(0),\ \delta_1\leqslant\lambda|x-y|. \tag{2.20}$$

选取 $\eta=\min(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$, 则 $T_*+\eta\in I$, 这与 T_* 的最大性相矛盾.

情形 3. $T_*\notin I$ 也是不可能的.

根据 θ 关于时间的连续性, 存在 $x\neq y$ 满足

$$\theta(x,T_*)-\theta(y,T_*)=\omega_\lambda(\xi),\quad \xi=|x-y|.$$

我们证明这种情况不能发生, 更精确地讲, 只要证明断言:

$$f'(T_*)<0,\quad 其中\ f(t):=\theta(x,t)-\theta(y,t).$$

就与 $f(t)\leqslant f(T_*)=\omega_\lambda(\xi),\forall t\in[0,T_*]$ 相矛盾, 说明上述景象是不可能发生的.

断言证明框架源于 Kiselev-Nazarov-Volberg 的工作. 这里给出其详细的证明. 利用解的正则性, 可以在经典的意义下定义临界 $(\mathrm{QG})_1$ 的解, 并且有

$$f'(T_*)=v(y,T_*)\cdot\nabla\theta(y,T_*)-v(x,T_*)\cdot\nabla\theta(x,T_*)+\Lambda\theta(y,T_*)-\Lambda\theta(x,T_*). \tag{2.21}$$

直接验证

$$v(y,T_*)\nabla\cdot\theta(y,T_*)-v(x,T_*)\cdot\nabla\theta(x,T_*)\leqslant\Omega_\lambda(\xi)\omega_\lambda'(\xi), \tag{2.22}$$

这里

$$\Omega_\lambda(\xi)=A\left(\int_0^\xi\frac{\omega_\lambda(\eta)}{\eta}d\eta+\xi\int_\xi^\infty\frac{\omega_\lambda(\eta)}{\eta^2}d\eta\right)=\Omega(\lambda\xi). \tag{2.23}$$

另一方面, 我们断言

$$\begin{aligned}\Lambda\theta(y,T_*)-\Lambda\theta(x,T_*)\leqslant&\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\xi}{2}}\frac{\omega_\lambda(\xi+2\eta)+\omega_\lambda(\xi-2\eta)-2\omega_\lambda(\xi)}{\eta^2}d\eta\\&+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\xi}{2}}^\infty\frac{\omega_\lambda(2\eta+\xi)-\omega_\lambda(2\eta-\xi)-2\omega_\lambda(\xi)}{\eta^2}d\eta\\\leqslant&\lambda J(\lambda\xi),\end{aligned} \tag{2.24}$$

这里

$$\begin{aligned}J(\xi)=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\xi}{2}}\frac{\omega(\xi+2\eta)+\omega(\xi-2\eta)-2\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta\\&+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\xi}{2}}^\infty\frac{\omega(2\eta+\xi)-\omega(2\eta-\xi)-2\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta.\end{aligned}$$

从而推出

$$f'(T_*) \leqslant \lambda(\Omega\omega' + J)(\lambda\xi). \tag{2.25}$$

今选取连续模函数如下:

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \xi - \xi^{\frac{3}{2}}, & 若\ 0 \leqslant \xi \leqslant \delta; \\ \delta - \delta^{\frac{3}{2}} + \displaystyle\int_\delta^\xi \frac{\gamma}{\eta(4 + \log(\eta/\delta))} d\eta, & 若\ \xi \geqslant \delta, \end{cases} \tag{2.26}$$

这里 δ, γ 是满足 $0 < \gamma < \delta$ 的小常数. 直接验证就得

$$\Omega(\xi)\omega'(\xi) + J(\xi) < 0, \quad \forall\, \xi \neq 0. \tag{2.27}$$

因此, $f'(T_*) < 0$. 综合上面的讨论, $T^* = \infty$, 且满足估计

$$\forall t \in [T_1, \infty), \quad \|\nabla\theta\|_{L^\infty} \leqslant \lambda\omega'(0) = \lambda. \tag{2.28}$$

这里 λ 由公式 (2.17) 决定.

第三步. 几个断言的详细证明或验证.

(i) (2.22) 的证明. 令 $\xi = |x - y|$, 利用命题 2.1, 可见

$$|\theta(x, T_*) - \theta(y, T_*)| \leqslant \omega(|x - y|) \Longrightarrow |v(x, T_*) - v(y, T_*)| \leqslant \Omega(|x - y|). \tag{2.29}$$

自然就有

$$\begin{aligned} |\theta(x + hv(x, T_*), T_*) - \theta(y + hv(y, T_*), T_*)| &\leqslant \omega(|x - y| + h|v(x, T_*) - v(T_*, y)|) \\ &\leqslant \omega(\xi + h\Omega(\xi)). \end{aligned} \tag{2.30}$$

注意到

$$v(y, T_*) \cdot \nabla\theta(y, T_*) = \frac{d}{dh}\theta(y + hv(y), T_*)\Big|_{h=0}, \tag{2.31}$$

则按导数的定义展开就得

$$\begin{aligned} & v(y, T_*)\nabla\theta(y, T_*) - v(x, T_*)\nabla\theta(x, T_*) \\ = & \lim_{h\to 0} \frac{[\theta(x + hv(x, T_*), T_*) - \theta(y + hv(y, T_*), T_*)] - [\theta(x, T_*) - \theta(y, T_*)]}{h} \\ = & \lim_{h\to 0} \frac{\omega(|x - y| + h(v(x, T_*) - v(y, T_*))) - \omega(\xi)}{h} \\ \leqslant & \lim_{h\to 0} \frac{\omega(\xi + h\Omega(\xi)) - \omega(\xi)}{h} \\ = & \Omega(\xi)\omega'(\xi), \qquad 这里用到\ \theta(x, T_*) - \theta(y, T_*) = \omega(\xi). \end{aligned} \tag{2.32}$$

(ii) (2.24) 的证明. 令

$$\mathcal{P}_h(x) = \frac{C_d h}{(|x|^2 + h^2)^{\frac{d+1}{2}}} \implies \frac{d}{dh}\mathcal{P}_h * \theta(x)\Big|_{h=0} = -\Lambda\theta, \qquad d = 2.$$

因此, 问题就归结为估计 $\mathcal{P}_h * \theta(x) - \mathcal{P}_h * \theta(y)$. 利用平移及旋转不变性, 无妨假设

$$x = \left(\frac{\xi}{2}, 0\right), \qquad y = \left(-\frac{\xi}{2}, 0\right).$$

直接验算, 就有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_h * \theta(x, T_*) - \mathcal{P}_h * \theta(y, T_*) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \left[\mathcal{P}_h\left(\frac{\xi}{2} - \eta, \nu\right) - \mathcal{P}_h\left(-\frac{\xi}{2} - \eta, \nu\right)\right]\theta(T_*, \eta, \nu)d\eta d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}} d\nu \int_0^\infty \left[\mathcal{P}_h\left(\frac{\xi}{2} - \eta, \nu\right) - \mathcal{P}_h\left(-\frac{\xi}{2} - \eta, \nu\right)\right][\theta(T_*, \eta, \nu) - \theta(T_*, -\eta, \nu)]d\eta \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} d\nu \int_0^\infty \left[\mathcal{P}_h\left(\frac{\xi}{2} - \eta, \nu\right) - \mathcal{P}_h\left(-\frac{\xi}{2} - \eta, \nu\right)\right]\omega(2\eta)d\eta \\
&= \int_0^\infty \left[P_h\left(\frac{\xi}{2} - \eta\right) - P_h\left(-\frac{\xi}{2} - \eta\right)\right]\omega(2\eta)d\eta \\
&= \int_0^\xi P_h\left(\frac{\xi}{2} - \eta\right)\omega(2\eta)d\eta + \int_0^\infty P_h\left(\frac{\xi}{2} + \eta\right)[\omega(2\eta + 2\xi) - \omega(2\eta)]d\eta, \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

这里 P_h 表示 1 维的 Poisson 核函数, 并且用到的 Poisson 核的对称性、单调性及

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_h(\eta, \nu)d\nu = P_h(\eta), \qquad \int_0^\infty = \int_0^\xi + \int_\xi^\infty.$$

对 (2.33) 右边的第二个积分作变换 $\tau = \dfrac{\xi}{2} + \eta$, 而对其第一个积分进行如下手术:

$$\int_0^\xi = \int_0^{\frac{\xi}{2}} + \int_{\frac{\xi}{2}}^\xi \oplus \tau = \frac{\xi}{2} - \eta,$$

就可推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_h * \theta(x, T_*) - \mathcal{P}_h * \theta(T_*, y) \leqslant &\int_0^{\frac{\xi}{2}} P_h(\eta)[\omega(\xi + 2\eta) + \omega(\xi - 2\eta)]d\eta \\
&+ \int_{\frac{\xi}{2}}^\infty P_h(\eta)[\omega(2\eta + \xi) - \omega(2\eta - \xi)]d\eta. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

利用

$$\int_0^\infty P_h(\eta)d\eta = \frac{1}{2},$$

及

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}_h*\theta(x,T_*)-\mathcal{P}_h*\theta(y,T_*)-(\theta(x,T_*)-\theta(y,T_*))\\
=&\mathcal{P}_h*\theta(x,T_*)-\mathcal{P}_h*\theta(y,T_*)-\omega(\xi)\\
\leqslant&\int_0^{\frac{\xi}{2}}P_h(\eta)[\omega(\xi+2\eta)+\omega(\xi-2\eta)-2\omega(\xi)]d\eta\\
&+\int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty}P_h(\eta)[\omega(2\eta+\xi)-\omega(2\eta-\xi)-2\omega(\xi)]d\eta,
\end{aligned}
$$

这里用到 $\theta(x,T_*)-\theta(T_*,y)=\omega(\xi)$, 直接推出

$$
\begin{aligned}
-\Lambda\theta(x,T_*)-(-\Lambda\theta(y,T_*))\leqslant&\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^{\frac{\xi}{2}}P_h(\eta)[\omega(\xi+2\eta)+\omega(\xi-2\eta)-2\omega(\xi)]d\eta\\
&+\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty}P_h(\eta)[\omega(2\eta+\xi)-\omega(2\eta-\xi)-2\omega(\xi)]d\eta\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\xi}{2}}\frac{\omega(\xi+2\eta)+\omega(\xi-2\eta)-2\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta\\
&+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty}\frac{\omega(2\eta+\xi)-\omega(2\eta-\xi)-2\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta\\
=&J(\xi),\quad h\longrightarrow0,
\end{aligned}\tag{2.35}
$$

这里用到 P_h 的具体表示式. 注意到 ω 的凹性, 通过比较斜率的大小, 就得 J 表示式中的两个积分均严格为负值.

(iii) (2.27) 的验证. 首先选取两个充分小正常数 $\delta>\gamma>0$, 定义 $\omega(\xi)$ 满足

$$
\begin{cases}
\omega(\xi)=\xi-\xi^{\frac{3}{2}}, & 0\leqslant\xi\leqslant\delta,\\
\omega'(\xi)=\dfrac{\gamma}{\xi(4+\log(\xi/\delta))}, & \xi>\delta
\end{cases}\tag{2.36}
$$

及

$$
\lim_{\xi\to\delta-}\omega'(\xi)\triangleq\omega'_-(\delta)=1,\qquad \lim_{\xi\to\delta+}\omega'(\xi)\triangleq\omega'_+(\delta)=\frac{\gamma}{4\delta}<\frac{1}{4}.
$$

因此, 只要 $\delta>0$ 充分小, 上面所构造的 $\omega(\xi)$ 就是凹函数, 并且满足 (2.9). 下面具体验证选取的连续模在耗散算子上的优势.

情形 1. $0\leqslant\xi\leqslant\delta$ 注意到

$$
\omega(\eta)\leqslant\eta,\ \eta\geqslant0\implies\int_0^{\xi}\frac{\omega(\eta)}{\eta}d\eta\leqslant\xi,\quad\int_{\xi}^{\delta}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}d\eta\leqslant\log\frac{\delta}{\xi},\tag{2.37}
$$

利用分部积分, 易见

$$
\int_{\delta}^{\infty}\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}d\eta=\frac{\omega(\delta)}{\delta}+\gamma\int_{\delta}^{\infty}\frac{1}{\eta^2(4+\log(\eta/\delta))}d\eta\leqslant1+\frac{\gamma}{4\delta}<2.\tag{2.38}
$$

注意到 $\omega'(\xi)<1$, 利用 Ω 的定义, 则

$$\Omega(\xi)\omega'(\xi)\leqslant A\xi\Big(3+\log\frac{\delta}{\xi}\Big)\qquad\forall\,0\leqslant\xi\leqslant\delta.\tag{2.39}$$

现在考虑负值部分 J. 仅考虑其中的第一个积分就足够了. 事实上, 利用 Taylor 公式、$\omega(\xi)$ 的凹性及 $\omega''(\xi)$ 的单调性, 就有

$$\omega(\xi+2\eta)\leqslant\omega(\xi)+2\omega'(\xi)\eta,\quad \omega(\xi-2\eta)=\omega(\xi)-2\omega'(\xi)\eta+2\omega''(\xi)\eta^2.$$

因此

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\xi}{2}}\frac{\omega(\xi+2\eta)+\omega(\xi-2\eta)-2\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta\leqslant\frac{1}{\pi}\xi\omega''(\xi)=-\frac{3}{4\pi}\xi\xi^{-\frac{1}{2}}.\tag{2.40}$$

从而

$$\Omega(\xi)\omega'(\xi)+J(\xi)<\xi\bigg(A\Big(3+\log\frac{\delta}{\xi}\Big)-\frac{3}{4\pi}\xi^{-\frac{1}{2}}\bigg)<0,\quad \xi\in(0,\delta],\delta>0\ \text{充分小}.\tag{2.41}$$

情形 2. $\xi\geqslant\delta$. 注意到

$$\omega(\eta)\leqslant\eta,\ \ 0\leqslant\eta\leqslant\delta;\quad \omega(\eta)\leqslant\omega(\xi),\ \ \delta\leqslant\eta\leqslant\xi.$$

因此

$$\int_0^\xi\frac{\omega(\eta)}{\eta}d\eta\leqslant\bigg(\int_0^\delta+\int_\delta^\xi\bigg)\frac{\omega(\eta)}{\eta}d\eta\leqslant\delta+\omega(\xi)\log\frac{\xi}{\delta}\leqslant\omega(\xi)\Big(2+\log\frac{\xi}{\delta}\Big),\tag{2.42}$$

这里用到如下事实: 对于充分小的 $\delta>0$, $\omega(\xi)=\xi-\xi^{\frac{3}{2}}$ 满足

$$\omega(\xi)\geqslant\omega(\delta)>\frac{\delta}{2}.$$

另外, 对于上面充分小的 $\delta>0$, 若还满足 $\gamma<\frac{\delta}{2}$, 就得

$$\int_\xi^\infty\frac{\omega(\eta)}{\eta^2}d\eta=\frac{\omega(\xi)}{\xi}+\gamma\int_\xi^\infty\frac{1}{\eta^2(4+\log(\eta/\delta))}d\eta\leqslant\frac{\omega(\xi)}{\xi}+\frac{\gamma}{\xi}<\frac{2\omega(\xi)}{\xi}.\tag{2.43}$$

利用 Ω 的表达式, 可见

$$\Omega(\xi)\omega'(\xi)\leqslant A\omega(\xi)\Big(4+\log\frac{\xi}{\delta}\Big)\omega'(\xi)=A\gamma\frac{\omega(\xi)}{\xi},\quad\forall\xi\geqslant\delta.\tag{2.44}$$

下面考虑负部的具体估计. 在上面关于 δ,γ 的取法下, 对于 $\xi\geqslant\delta$, 总有

$$\omega(2\xi)\leqslant\omega(\xi)+\omega'(\xi)\xi\leqslant\omega(\xi)+\frac{\gamma}{4}\leqslant\frac{3}{2}\omega(\xi).$$

利用凹性, 容易看出

$$\omega(2\eta+\xi)-\omega(2\eta-\xi)\leqslant\omega(2\xi),\quad \forall\eta>\frac{\xi}{2}.$$

因此

$$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty}\frac{\omega(2\eta+\xi)-\omega(2\eta-\xi)-2\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta\leqslant-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\xi}{2}}^{\infty}\frac{\omega(\xi)}{\eta^2}d\eta=-\frac{1}{\pi}\frac{\omega(\xi)}{\xi}.\tag{2.45}$$

因此, 只要取 $\gamma>0$ 充分小, 就得

$$\Omega(\xi)\omega'(\xi)+J(\xi)<\frac{\omega(\xi)}{\xi}\Big(A\gamma-\frac{1}{\pi}\Big)<0.\tag{2.46}$$

结合 (2.41) 及 (2.46) 就得情形 2 的结果.

5.3 Caffarelli-Vasseur 的正则化方法

本节主要讨论 Luis Caffarelli 和 Alexis Vasseur 关于临界 Q-G 方程弱解正则性的重要结果. 这个方法适用于如下更一般的具分数阶耗散的漂移扩散方程:

$$\begin{cases}\partial_t\theta+v\cdot\nabla\theta=-\Lambda\theta,\quad \Lambda=(-\Delta)^{1/2},\quad x\in\mathbb{R}^d,\\ \mathrm{div}v=0,\\ \theta(x,0)=\theta_0(x),\end{cases}\tag{3.1}$$

特别当 $d=2$, $v=(-\partial_2\Lambda^{-1}\theta,\partial_1\Lambda^{-1}\theta)\triangleq(-R_2\theta,R_1\theta)$ 时, (3.1) 对应着著名的 Quasi-Geostrophic 方程.

1. 主要结果及相关问题

类似于不可压的 Navier-Stokes 方程, 对于任意的 $\theta_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $v\in L^2([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, 通过低频截断逼近与弱紧致原理, 可以证明 (3.1) 具有 Leray-Hopf 型的整体弱解 (见 5.3 节之 9)

$$\theta(t)\in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2([0,T];\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^d)),\quad \forall T>0.\tag{3.2}$$

Caffarelli 与 Vasseur 采用调和扩张及 De Giorgi-Nash-Moser 迭代技术建立 Leray-Hopf 整体弱解的正则性.

定理 3.1 ($L^2\to L^\infty$ 提升) 设 $\theta(t)\in L^\infty([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2([0,T];\dot H^{1/2}(\mathbb{R}^d))$. 定义

$$\theta_\lambda=(\theta-\lambda)_+,\quad \forall\lambda>0.$$

如果 θ (或 $-\theta$) 对任意的 $\lambda>0$ 满足如下的水平集能量不等式:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \theta_\lambda^2(t_2,x)dx + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2}\theta_\lambda|^2 dxdt \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\lambda^2(t_1,x)dx, \quad 0<t_1<t_2, \tag{3.3}$$

则对任意的 $T>0$, 有

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\theta(T,x)| \leqslant C^* \frac{\|\theta_0\|_{L^2}}{T^{d/2}}. \tag{3.4}$$

注记 3.1 (1) 一般来讲, 我们期望在能量不等式中出现仅出现局部导数, 以便于通过截断获得局部的能量不等式. 但 (3.1) 中出现了非局部算子 Λ, 这在应用 De Giorgi 方法时产生很大的困难. Caffarelli 与 Vasseur 通过上半空间中实施调和扩张将非局部导数转化成局部导数. 事实上, Λ 对应着上半空间上调和扩张的方向导数, 即考虑上半空间的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) + \Delta_x u(x,y) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^d,\ y>0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

一方面, 利用 Poisson 公式

$$u(x,y) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{d+1}{2}}} f(z)dz; \tag{3.6}$$

另一方面

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \Delta_x = (\partial_y + \Lambda_x)(\partial_y - \Lambda_x).$$

可见

$$\partial_y u(x,y) = -\Lambda_x u(x,y). \tag{3.7}$$

令 $y\to 0$

$$\Lambda_x f(x) = \lim_{y\to 0}(-\partial_y u(x,y)) = -\partial_y u(x,0). \tag{3.8}$$

这表明非局部导数 $\Lambda_x f(x)$ 就是相应的调和扩张 u 的法向导数, 即通过提高一个空间维数就可以局部化了.

(2) 非局部算子的内蕴表示. 由于

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_d\, y}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{d+1}{2}}} dz = 1,$$

因此

$$\begin{aligned} -u_y(x,0) &= -\lim_{y\to 0}\frac{u(x,y)-u(x,0)}{y} \\ &= -\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{c_d y}{(|x-z|^2+y^2)^{\frac{d+1}{2}}}\cdot\frac{f(z)-f(x)}{y}dz \\ &= c_d\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f(x)-f(z)}{|x-z|^{d+1}}dz. \end{aligned}$$

这就导出分数阶导数的内蕴刻画

$$\Lambda f(x) = (-\Delta)^{1/2} f(x) = c_d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x) - f(z)}{|x-z|^{d+1}} dz. \tag{3.9}$$

(3) 对于更一般的非局部算子 Λ^s, $s = 1 - a \in (0,2)$, 也可以通过研究上半空间中的椭圆边值问题建立联系, 即考虑

$$\begin{cases} \Delta_x u + \dfrac{a}{y} u_y + u_{yy} = 0, \quad -1 < a < 1, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{3.10}$$

相应的解可以表示成

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} P_a(x-z,y) f(z) dz, \tag{3.11}$$

其中

$$P_a(x,y) = \frac{c_{d,a} y^{1-a}}{(|x|^2 + y^2)^{\frac{d+1-a}{2}}}. \tag{3.12}$$

如果令

$$z = \left(\frac{y}{1-a} \right)^{1-a},$$

则 (3.10) 就可以转化为

$$\begin{cases} \Delta_x u + z^b u_{zz} = 0, \quad b = \dfrac{-2a}{1-a}, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{3.13}$$

相应的广义 Poisson 核函数

$$\tilde{P}(x,z) = \frac{c_{d,a}\, z}{(|x|^2 + (1-a)^2 |z|^{\frac{2}{1-a}})^{\frac{d+1-\alpha}{2}}}. \tag{3.14}$$

这样, 类似于 $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ 的推导, 可以推出

$$\begin{aligned} \Lambda^s f(x) = (-\Delta)^{s/2} f(x) &= -\lim_{y \to 0} y^a u_y(x,y) = -(1-a)^a u_z(x,0) \\ &= c_{d,s} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(x) - f(\eta)}{|x-\eta|^{d+s}} d\eta, \quad s = 1-a. \end{aligned} \tag{3.15}$$

注记 3.2 水平集层次上的能量不等式 (3.3) 类似于守恒律方程中的熵条件. 众所周知, 数量形式的守恒律方程

$$u_t + (f(u))_x = 0 \tag{3.16}$$

可能有很多弱解, 如何确定它是否是真正的物理解是个重要的问题. 一般认为, 守恒律方程的黏性正则化问题

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx} \tag{3.17}$$

解的极限 (在合适拓扑下) 就是容许的物理解. 省略黏性极限的过程, 等价于寻找 $\Phi(u)$ 满足 $\Phi''(u) > 0$ 使得 (3.16) 上的解满足能量不等式. 两边同乘以 $\Phi'(u)$, 可见

$$\Phi'(u)u_t + \Phi'(u)f'(u)u_x = \varepsilon u_{xx}\Phi'(u).$$

令 $F'(u) \triangleq \Phi'(u)f'(u)$, 则

$$\partial_t \Phi(u) + \partial_x F(u) = \varepsilon \partial_x(\Phi'(u)u_x) - \varepsilon \Phi''(u)u_x^2,$$

进而

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \Phi(u) + \partial_x F(u))dx \leqslant 0.$$

将熵函数 $\Phi(u)$ 满足的光滑凸条件 $\Phi''(u) > 0$ 推广到非光滑的情形, 例如, 对于任意 $\lambda > 0$, 取

$$\Phi(u) = \begin{cases} u - \lambda, & u \geqslant \lambda, \\ 0, & u \leqslant \lambda. \end{cases}$$

恰好对应着 (3.3) 的情形. 此时

$$\Phi'(u) = \begin{cases} 1, & u \geqslant \lambda, \\ 0, & u \leqslant \lambda, \end{cases}$$

及

$$F'(u) = \Phi'(u)f'(u), \quad F(u) = \int_\lambda^u f'(x)dx + C.$$

这样, 对于 (3.1) 的弱解 $\theta \in L^2([0,T]; \dot{H}^{1/2})$, 在分布意义下可见

$$\Phi'(\theta)v \cdot \nabla\theta = \operatorname{div}(v\Phi(\theta)), \quad 且 \ -\Phi'(\theta)\Lambda\theta \leqslant -\Lambda\Phi(\theta).$$

用 $\Phi(\theta)\Phi'(\theta)$ 同乘以方程 (3.1) 两边, 可见

$$\Phi(\theta)\Phi'(\theta)\theta_t + \Phi(\theta)\Phi'(\theta)v \cdot \nabla\theta = -\Phi(\theta)\Phi'(\theta)\Lambda\theta \leqslant -\Phi(\theta)\Lambda\Phi(\theta).$$

进而

$$\frac{d}{dt}\Phi(\theta)^2 + \operatorname{div}(v\,\Phi^2(\theta)) \leqslant -2\Phi(\theta)\Lambda\Phi(\theta).$$

注意到 $\Phi(\theta) = \theta_\lambda = \max\{\theta - \lambda, 0\}$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^d} \theta_\lambda^2(t_2, x)dx + 2\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2}\theta_\lambda|^2 dxdt \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \theta_\lambda^2(t_1, x)dx, \quad 0 < t_1 < t_2.$$

在上面推导过程中用到了

$$v\cdot\nabla\Phi(\theta)$$

是有意义的. 对于 Q-G 方程这是可以的. 事实上, 这只需证明

$$\Phi(\theta)\in L^2([0,T];\dot{H}^{1/2}). \tag{3.18}$$

进而 $\nabla\Phi(\theta)\in L^2([0,T];\dot{H}^{-1/2})$, 再由 $v\in L^2(\dot{H}^{1/2})$ 就确保 $v\cdot\nabla\Phi(\theta)$ 有意义. 对于 (3.18), 根据内蕴刻画 (3.15) 有

$$\|\Phi(\theta)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2=c_d\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\Phi(\theta)(x)-\Phi(\theta)(z)}{|x-z|^{d+1/2}}dz\right|^2dx. \tag{3.19}$$

由于

$$\Phi(\theta)(x)-\Phi(\theta)(z)=\begin{cases}\theta(x)-\theta(z) & x,z\in\{\theta\geqslant\lambda\},\\ 0, & x,z\in\{\theta<\lambda\},\\ \theta(x)-\lambda\leqslant\theta(x)-\theta(z), & x\in\{\theta\geqslant\lambda\},\ z\in\{\theta<\lambda\},\\ -(\theta(z)-\lambda)\geqslant\theta(x)-\theta(z), & x\in\{\theta<\lambda\},\ z\in\{\theta\geqslant\lambda\},\end{cases}$$

知上式 (3.19) 有如下的上界:

$$c_d\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\theta(x)-\theta(z)}{|x-z|^{d+1/2}}dz\right|^2dx=\|\theta\|_{\dot{H}^{1/2}}^2.$$

这就证明了 (3.18).

定理 3.2 ($L^\infty\to C^\alpha$ 提升)　对任意 $r>0$, 记 $Q_r=[-r,0]\times[-r,r]^d$. 假设 $\theta(t,x)$ 在区域 $[-4,0]\times\mathbb{R}^d$ 上有界, 且

$$v|_{Q_4}\in L^\infty([-4,0];\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)), \tag{3.20}$$

则存在 $\alpha>0$, 使得 $\theta\in C^\alpha(Q_{1/8})$.

注记 3.3　我们将会看到: 第一, 在定理 3.2 中不需要 $\theta(t,x)$ 的整体有界性, 仅需要局部有界性及与 Poisson 核函数作用后在 ∞ 处的可积性. 第二, 定理 3.1 与定理 3.2 仅依赖于所得的能量不等式 (3.3), 而不依赖于 Λ 的特殊形式.

由定理 3.1 与定理 3.2, 可以获得 Q-G 方程解的 C^α 正则性估计.

定理 3.3　设 θ 是如下方程的解:

$$\begin{cases}\partial_t\theta+u\cdot\nabla\theta=-\Lambda\theta, \quad x\in\mathbb{R}^d,\\ \mathrm{div}u=0, \quad u_j=\overline{R}_j[\theta],\\ \theta(0,x)=\theta_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^d),\end{cases} \tag{3.21}$$

这里 $\overline{R}_j$ 是一个奇异积分算子, 并且假设 θ 满足定理 3.1 给出的水平集能量不等式 (3.3), 则对于任意的 $t_0>0$, 存在 $\alpha>0$ 使得 $\theta(t,x)\in C^\alpha([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$.

注记 3.4 由注记 3.2 知, 方程 (3.21) 的弱解 $\theta(t,x)$ 满足水平集能量不等式 (3.3), 进而由定理 3.1,θ 在 $[t_0,\infty)$ 上总是一致有界的. 注意到奇异积分算子是 L^∞ 到 BMO 有界算子, 说明

$$u(t,x)\in L^\infty([t_0,\infty);\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)).$$

通过合适的尺度变换变换, 定理 3.2 本质上意味着定理 3.3. 概略地讲, 令

$$\widetilde{\theta}(\tilde{t},\tilde{x})\triangleq\theta\Big(t_0\tilde{t}/4+2t_0,t_0\tilde{x}/4+x_0\Big),\quad t_0>0,\ x_0\in\mathbb{R}^d,$$

进而

$$\widetilde{u}(\tilde{t},\tilde{x})=u\Big(t_0\tilde{t}/4+2t_0,t_0\tilde{x}/4+x_0\Big),$$

于是

$$t\in[t_0,2t_0]\longleftrightarrow\tilde{t}\in[-4,0],\quad x\in x_0+B_{t_0}\longleftrightarrow\tilde{x}\in B_4,$$

其中 $B_r\triangleq[-r,r]^d$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的方体. 则 $\widetilde{\theta}(\tilde{t},\tilde{x})$ 是 (3.21) 相应的后向方程的解, 且 $\widetilde{\theta}(\tilde{t},\tilde{x})\in L^\infty(Q_4)$, $\widetilde{u}|_{Q_4}\in L^\infty([-4,0];\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d))$. 这样, 由定理 3.2 知 $\widetilde{\theta}(\tilde{t},\tilde{x})\in C^\alpha(Q_{1/8})$, 即

$$\theta(t,x)\in C^\alpha\big([63t_0/32,2t_0]\times\big(x_0+B_{\frac{1}{32}t_0}\big)\big),\quad t_0>0.$$

注记 3.5 对于方程 (3.21) 而言, 设 θ 满足

$$\theta\in L^\infty([0,\infty);L^2)\cap L^2([0,\infty)\times\dot{H}^{1/2})\cap L^\infty([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d)\cap C^\alpha([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d),\quad\forall t_0>0.$$

则对任意 $\beta<1$ 和 $t_0>0$, 有如下的高阶正则性:

$$\theta\in C^{1,\beta}([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d).\tag{3.22}$$

事实上, 由于正则性问题是一个局部问题, 故仅需考虑 $y_0=(t_0,x_0)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 处的正则性. 通过函数变换

$$\begin{aligned}&\theta(t,x)\to\theta\big(t,x+u(t_0,x_0)(t-t_0)\big)-\theta(t_0,x_0),\\&u(t,x)\to u(t,x+u(t_0,x_0)(t-t_0))-u(t_0,x_0),\end{aligned}\tag{3.23}$$

使得我们可以假定

$$\theta(y_0)=0,\quad u(y_0)=0.$$

进而, 可以通过标准的位势理论证明形如 (3.22) 的正则性, 从而建立了 (3.21) 的经典解的存在性. 我们将在下面予以详细讨论.

注记 3.6 经典的临界 Q-G 方程恰好对应于 (3.21) 的一个特殊形式, 即 $d=2$,

$$u_1=-R_2\theta,\quad u_2=R_1\theta,\quad \widehat{R_j\theta}=\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{\theta}(\xi). \tag{3.24}$$

另一方面, 无黏的 Q-G 方程具有与 3 维 Euler 方程完全类似的结构, 可以说, 它是 3 维 Euler 方程的简化的玩具模型. 这是近年来众多数学家予以关注的内在原因之一. 事实上, 如果记 $\nabla^{\perp}=(-\partial_{x_2},\partial_{x_1})$, 对无黏的 Q-G 方程两边取 $\nabla^{\perp}$ 得

$$\partial_t(\nabla^{\perp}\theta)+u\cdot\nabla(\nabla^{\perp}\theta)=(\nabla u)\cdot\nabla^{\perp}\theta,$$

用物质导数表示就是

$$\frac{D(\nabla^{\perp}\theta)}{Dt}=(\nabla u)\cdot\nabla^{\perp}\theta.$$

这完全类似于涡度形式的 3 维 Euler 方程

$$\frac{D\omega}{Dt}=(\nabla u)\cdot\omega,\qquad \omega=\nabla\times u.$$

2. L^{∞} 范数的估计

本节致力于证明定理 3.1, 主要通过对 θ 的一个单调上升的水平截断函数的非线性迭代来实现. 按照 De Giorgi 的想法, 主要得益于能量不等式

$$\|\theta\|_{L_T^{\infty}L^2}^2+2\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\Lambda^{1/2}\theta|^2dxdt\leqslant\|\theta_0\|_{L^2}^2$$

中所体现的 $|\Lambda^{1/2}\theta|$ 可以被 θ 控制 (某种范数意义下), 与 Sobolev 不等式本身就意味的 θ 可以被 $|\Lambda^{1/2}\theta|$ 控制之间的相互作用, 特别是这些控制不等式具有不同齐次性的尺度结构

$$\|\theta(t)\|_{L^{\frac{2d}{d-1}}}\lesssim\|\Lambda^{1/2}\theta(t)\|_{L^2},\quad \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\Lambda^{1/2}\theta|^2dxdt\leqslant\|\theta_0\|_{L^2}^2.$$

选取能量截断的层次如下:

$$\lambda=C_k=M(1-2^{-k}),\quad M \text{ 待定}.$$

这样对于截断函数 $\theta_k=(\theta-C_k)_+$, 根据注记 3.2 的推导, 就推知 θ_k 满足

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\theta_k^2dx+2\int_{\mathbb{R}^d}|\Lambda^{\frac12}\theta_k|^2dx\leqslant 0. \tag{3.25}$$

目标: 对任意固定 $t_0>0$, 证明 θ 在 $t>t_0$ 上有界.

方式: 引入

$$T_k=t_0(1-2^{-k}),\quad \forall k\in\mathbb{N}, \tag{3.26}$$

及相应的能量与能量耗散部分的水平集

$$U_k = \sup_{t \geqslant T_k} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2 dx \right) + 2 \int_{T_k}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2} \theta_k|^2 dx dt. \tag{3.27}$$

对 (3.25) 从 $s \in (T_{k-1}, T_k)$ 到 $t \in (T_k, \infty)$ 积分, 可见

$$\int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(t) dx + 2 \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2} \theta_k|^2 dx d\tau \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(s) dx,$$

从而

$$\sup_{t \geqslant T_k} \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(t) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(s) dx.$$

类似地, 对 (3.25) 从 $s \in (T_{k-1}, T_k)$ 到 ∞ 积分, 有

$$2 \int_s^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2} \theta_k|^2 dx dt \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(s) dx.$$

这样就推出对所有的 $s \in (T_{k-1}, T_k)$, 有

$$U_k \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(s) dx. \tag{3.28}$$

两边关于 $s \in (T_{k-1}, T_k)$ 取积分平均就得

$$U_k = \frac{2}{T_k - T_{k-1}} \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(s) dx ds \leqslant \frac{2^{k+1}}{t_0} \int_{T_{k-1}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \theta_k^2(t) dx dt, \tag{3.29}$$

这里用到 $T_k = t_0(1 - 2^{-k})$ 的形式. 下面试图用 U_{k-1} 来控制 (3.29) 的右边. 由插值公式

$$L_{t,x}^{\frac{2(d+1)}{d}} = (L_t^{\infty} L_x^2, L_t^2 \dot{H}_x^{1/2})_{\frac{d}{d+1}}, \tag{3.30}$$

相应的插值指标满足

$$\frac{d}{2(d+1)} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{d-1}{2d}\theta, \quad \theta = \frac{d}{d+1}, \ H^{1/2} \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-1}}.$$

就可以推出

$$U_{k-1} \geqslant C^{-1} \|\theta_{k-1}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}([T_{k-1}, \infty) \times \mathbb{R}^d)}. \tag{3.31}$$

注意到 $\theta_k \leqslant \theta_{k-1}$, 我们断言: 如果 $\theta_k > 0$, 则 $\theta_{k-1} > 2^{-k} M$. 事实上,

$$\begin{aligned}
\theta_k > 0 &\iff \theta - C_k > 0 \\
&\iff \theta - C_{k-1} - (C_k - C_{k-1}) > 0 \\
&\iff \theta_{k-1} > M(1 - 2^{-k}) - M(1 - 2^{-k+1}) \\
&\iff \theta_{k-1} > M 2^{-k}.
\end{aligned}$$

这样, 断言就意味着

$$1_{\{\theta_k>0\}} \leqslant \Big(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\Big),$$

自然亦有

$$1_{\{\theta_k>0\}} \leqslant \Big(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\Big)^{\frac{2}{d}}. \tag{3.32}$$

将 (3.32) 代入到 (3.29), 并注意到 (3.31) 及 $\theta_k \leqslant \theta_{k-1}$, 直接估计可见

$$\begin{aligned}
U_k &\leqslant \frac{2^{k+1}}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\theta_{k-1}^2 1_{\{\theta_k>0\}}dxdt\\
&\leqslant \frac{2^{k+1}}{t_0}\int_{T_{k-1}}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\theta_{k-1}^2\Big(\frac{2^k}{M}\theta_{k-1}\Big)^{\frac{2}{d}}dxdt\\
&= 2\frac{2^{\frac{d+2}{d}k}}{t_0M^{2/d}}\int_{T_{k-1}}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\theta_{k-1}^{\frac{2d+2}{d}}dxdt\\
&\leqslant 2C\frac{2^{\frac{d+2}{d}k}}{t_0M^{2/d}}U_{k-1}^{\frac{d+1}{d}}.
\end{aligned}$$

接下来应用如下基本的迭代引理:

引理 3.4 设 $y_k \geqslant 0$, $k\in\mathbb{N}$ 满足

$$y_{k+1}\leqslant Cb^k y_k^{1+\varepsilon},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

这里 $b>1$, $\varepsilon>0$, 则如果

$$y_0\leqslant C^{-1/\varepsilon}b^{-1/\varepsilon^2},$$

有

$$\lim_{k\to\infty}y_k=0.$$

证明 用归纳法立即可证得

$$y_k\leqslant (C^{-1/\varepsilon}b^{-1/\varepsilon^2})b^{-\frac{k}{\varepsilon}},\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

对 $y_k=U_k$ 应用上述引理 3.4, 相应的参数分别为

$$\widetilde{C}=\frac{2C}{t_0M^{2/d}},\quad \varepsilon=\frac{1}{d},\quad b=2^{\frac{d+2}{d}},$$

则由于

$$y_0=U_0=\sup_{t\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}^d}\theta(t)^2dx+\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\Lambda^{1/2}\theta|^2dxdt\leqslant\|\theta_0\|_{L^2}^2<\infty,$$

因此, 只要选取合适的 M 满足

$$\|\theta_0\|_{L^2}^2=\widetilde{C}^{-\frac{1}{\varepsilon}}b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=\Big(\frac{2C}{t_0M^{2/d}}\Big)^{-d}2^{-d(d+2)}=t_0^dM^2(2C)^{-d}2^{-d(d+2)}, \tag{3.33}$$

就有

$$\lim_{k\to\infty} U_k = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{t\geqslant T_k}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\theta_k^2 dx\right) + 2\int_{T_k}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^d}|\Lambda^{1/2}\theta_k|^2 dxdt\right) = 0. \tag{3.34}$$

这就意味着

$$\theta \leqslant M, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

同理, 对于 $-\theta$ 亦有类似的估计. 这样

$$|\theta| \leqslant M, \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{3.35}$$

再由 (3.33) 解出的 M, 就可以推出

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\theta(t,x)| \leqslant \frac{(2C)^{d/2}2^{d(d+2)/2}}{t_0^{d/2}}\|\theta_0\|_{L^2} \triangleq \frac{C^*}{t_0^{d/2}}\|\theta_0\|_{L^2}, \quad \forall t \geqslant t_0 > 0. \tag{3.36}$$

推论 3.5 对于 Cauchy 问题 (3.21) 任意的解 θ, 存在常数 C^* 满足

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\theta(T,x)| \leqslant C^*\frac{\|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{T^{d/2}}, \quad T>0, \tag{3.37}$$

$$\|u(T,x)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^*\frac{\|\theta_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{T^{d/2}}, \quad T>0. \tag{3.38}$$

证明 (3.38) 是 (3.37) 与奇异积分算子 $L^\infty \to \mathrm{BMO}$ 有界性的直接结果. 对 (3.37), 仅需证明 θ 满足定理 3.1 的条件. 由于 θ 是关于 L^2 初值的 Leray-Hopf 弱解, 故仅需证明水平集能量估计 (3.3). 事实上, 这已经在注记 3.2 中给出了详细证明, 只需取 $\Phi_k = (\theta - C_k)_+ = \theta_k$ 即可. 注意到在证明中我们用到了 Cordoba-Cordoba[Cor-AD] 给出的关于凸函数 $\Phi(\theta)$ 的一个点态估计

$$-\Phi'(\theta)\Lambda\theta \leqslant -\Lambda\Phi(\theta). \tag{3.39}$$

注记 3.7 (1) 需要指出的是, 在定理 3.1 中假设的水平集能量不等式是一个具有启发性的一般结果 (见 5.3 节之 9).

(2) 对于 Naiver-Stokes 方程, 由于流场 $u(t,x)$ 是向量函数, 无法通过 u 所谓的水平截断来建立推论 3.5 中的 L^∞ 估计. 这也体现了微分方程与方程组研究方法之间的一个本质的区别.

(3) 与 Naiver-Stokes 方程不同, 即使获得了 Q-G 方程的 Leray-Hopf 整体弱解 θ 的 L^∞ 估计, 仍然无法知道 θ 就是光滑解. 因此, 就需要采用 De Giorgi-Nash-Moser 迭代技术建立 Leray-Hopf 整体弱解 θ 的 Hölder 正则性, 从而证明 Leray-Hopf 整体弱解的正则性.

3. 局部能量不等式

为了利用 De Giorgi 迭代方法来证明 Hölder 正则性, 必须通过空间与时间截断来局部化能量不等式. 由于扩散算子的非局部性, 使得局部化能量不等式变得十分困难! 上半空间上的调和扩张为我们提供了强有力的武器, 即可以将非局部扩散项 $\Lambda\theta$ 视为 θ 调和扩张之后沿着边界的法向导数 (本质上是把一个 Dirichlet 问题转化为一个 Neumann 问题), 参见注记 3.1 中的 (3.5)~(3.8). 这样就容许我们通过标准的截断方法实现局部化: 记 L 是从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 到 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+)$ 的调和延拓算子, 即

$$\begin{cases}-\Delta_{x,z}L(\theta)=0, & (x,z)\in\mathbb{R}^d\times(0,\infty),\\ L(\theta)(x,0)=\theta(x), & x\in\mathbb{R}^d,\end{cases}$$

等价地, 有

$$L(\theta)(x,z)=(P(z,\cdot)*\theta)(x),\quad (x,z)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^+,$$

其中 $P(z,\cdot)$ 是 Poisson 核

$$P(z,x)=c_d\frac{z}{(|x|^2+z^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

则有

$$\Lambda\theta(x)=\partial_\nu[L(\theta)](x)=-\partial_z[L(\theta)](x,0),\quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{3.40}$$

其中 $\partial_\nu(L(\theta))$ 表示 $L(\theta)$ 在边界 $\{(x,0)|x\in\mathbb{R}^d\}$ 上的法向导数.

在接下来, 把上面引入的调和扩张简记为

$$\theta^*(t,x,z)=L(\theta(t,\cdot))(x,z), \tag{3.41}$$

同时, 记 $B_r=[-r,r]^d$ 是仅关于 x 变量的方体, $B_r^*=B_r\times(0,r)\subset B_r\times(0,\infty)$ 是关于 x,z 变量的方体, $[y]_+=\max(y,0)$.

本节的目标就是建立关于 x,z 变量的局部能量估计. Λ 的非局部效应转化为关于额外变量的局部效应. 注意到此时我们已经知道, 对于任意给定的 $T>0$, 有如下的关于 $t>T$ 的一致估计:

$$\|\theta(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\|\theta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant C,$$

特别, 相应于我们考虑的 Q-G 方程, 这意味着

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\|v(t)\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C, \tag{3.42}$$

关于 $t>T$ 一致有界. 这也就诱导了下面命题的主要假设.

命题 3.6 设 $t_1 < t_2, \theta \in L^\infty([t_1,t_2];L^2(\mathbb{R}^d))$ 同时满足 $\Lambda^{1/2}\theta \in L^2([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^d)$ 是 Cauchy 问题 (3.1) 的解, 其中速度场 v 满足

$$\|v\|_{L^\infty([t_1,t_2];\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d))} + \sup_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\left|\int_{B_4} v(t,x)dx\right| \leqslant C_v \tag{3.43}$$

则存在常数 A (依赖于常数 C_v) 满足对任意 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 和截断函数 η 使得 $\eta[\theta^*]_+$ 在 B_4^* 上的限制紧支撑在 $B_4 \times (-4,4)$ 上, 并且

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_4^*}|\nabla(\eta[\theta^*]_+)|^2 dxdzdt + \int_{B_4}(\eta[\theta]_+)^2(t_2,x)dx\\ \leqslant &\int_{B_4}(\eta[\theta]_+)^2(t_1,x)dx + A\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_4}([\nabla\eta][\theta]_+)^2 dxdt\\ &+2\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_4^*}([\nabla\eta][\theta^*]_+)^2 dxdzdt.\end{aligned} \tag{3.44}$$

注记 3.8 (1) 与标准的抛物型估计不同, (3.44) 给出了 $\|\eta\theta\|_{L_t^\infty L_x^2}$ 与 $\|\nabla(\eta\theta^*)\|_{L_t^2 L_{x,z}^2}$ 的估计 (底模少了一维), 因此无法直接获得形如

$$\|\eta\theta^*\|_{L_t^q L_{x,z}^r}$$

的估计; 这种估计从某种意义上是联系 $\nabla(\eta\theta^*)$ 与 $\eta\theta^*$ 的纽带, 包含时空转化的信息. 为了获得 $\eta\theta^*$ 的控制性估计, 就需要对 $\eta\theta^*$ 进行精细的分解, 一部分来源于边界值 $\eta\theta$ 的估计, 其余部分来源于远离这一边界的估计 (见第三步关于支集的传播 (3.63) 及引理 3.7 的证明).

(2) 根据 Hölder 不等式, (3.42) 显然意味着 (3.43). 另一方面, 从假设条件 (3.43) 可以推出

$$\sup_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}\|v(t,x)\|_{L^1(B_4)} \leqslant C_v'.$$

事实上, 记

$$v_{B_4} = \frac{1}{m(B_4)}\int_{B_4} v(x)dx$$

是 v 在 B_4 上的平均, 则

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^1(B_4)} &\leqslant \|v - v_{B_4}\|_{L^1} + \|v_{B_4}\|_{L^1}\\ &\leqslant m(B_4)\left(\frac{1}{m(B_4)}\int_{B_4}|v - v_{B_4}|dx\right) + m(B_4)v_{B_4}\\ &\leqslant m(B_4)\|v\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} + \left|\int_{B_4} v(x)dx\right|\\ &\leqslant (m(B_4)+1)C_v.\end{aligned}$$

再利用插值不等式就得 (3.42) 中的 L^2 估计.

命题 3.6 的证明　对任意的 $t_1 < t < t_2$, 考虑

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_4^*} \eta^2[\theta^*]_+ \Delta\theta^* dxdz = \int_{B_4^*} \eta^2[\theta^*]_+ \Delta[\theta^*]_+ dxdz \\
&= -\int_{B_4^*} \nabla(\eta^2[\theta^*]_+)\cdot\nabla[\theta^*]_+ dxdz + \int_{\partial B_4^*} \eta^2[\theta^*]_+ \frac{\partial[\theta^*]_+}{\partial\nu} d\sigma \\
&= -\int_{B_4^*} \big(\nabla(\eta[\theta^*]_+) + [\theta^*]_+\nabla\eta\big)\cdot\big(\eta\nabla[\theta^*]_+\big) dxdz - \int_{B_4} \eta^2[\theta]_+ \frac{\partial\theta^*}{\partial z}(x,0)dx \\
&= -\int_{B_4^*} \big(\nabla(\eta[\theta^*]_+) + [\theta^*]_+\nabla\eta\big)\cdot\big(\nabla(\eta[\theta^*]_+) - [\theta^*]_+\nabla\eta\big) dxdz + \int_{B_4} \eta^2[\theta]_+ \Lambda\theta(x)dx \\
&= -\int_{B_4^*} |\nabla(\eta[\theta^*]_+)|^2 dxdz + \int_{B_4^*} [\theta^*]_+^2 |\nabla\eta|^2 dxdz + \int_{B_4} \eta^2[\theta]_+ \Lambda\theta(x)dx, \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

其中在第三行用到了 $B_4^* = B_4 \times [0,4)$,

$$\nabla(\eta^2[\theta^*]_+) = \eta\nabla(\eta[\theta^*]_+) + \eta[\theta^*]_+\nabla\eta$$

与 $\eta 1_{B_4^*}$ 在 $B_4 \times (-4,4)$ 上的紧支性. 注意到 θ 满足方程

$$\partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta + \Lambda\theta = 0,$$

分部积分可见

$$\begin{aligned}
-\int_{B_4} \eta^2[\theta]_+ \Lambda\theta dx &= \int_{B_4} \eta^2[\theta]_+ (\partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta) dx \\
&= \int_{B_4} \eta^2[\theta]_+ (\partial_t[\theta]_+ + v\cdot\nabla[\theta]_+) dx \\
&= \frac{d}{dt}\left(\int_{B_4} \eta^2 \frac{[\theta]_+^2}{2} dx\right) - \int_{B_4} \nabla(\eta^2)\cdot v \frac{[\theta]_+^2}{2} dx.
\end{aligned}$$

将上式所得的估计代入 (3.45), 两边关于 t 积分就推出

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_4^*} |\nabla(\eta[\theta^*]_+)|^2 dxdzds + \int_{B_4} \eta^2 \frac{[\theta]_+^2(t_2)}{2} dx \\
\leqslant& \int_{B_4} \eta^2 \frac{[\theta]_+^2(t_1)}{2} dx + \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_4^*} |\nabla\eta|^2 [\theta^*]_+^2 dxdzds \\
&+ \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_4} \eta\nabla\eta\cdot v[\theta]_+^2 dxds\right|. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

下面主要来估计 (3.46) 的最后一项. 利用 Sobolev 不等式与迹定理, 可见

$$\|1_{\{B_4\}}\eta\theta_+\|^2_{L^{\frac{2d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|1_{\{B_4\}}\eta\theta_+\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)}$$

$$
\begin{aligned}
&= C \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla L(1_{\{B_4\}}\eta\theta_+)|^2 dxdz \\
&\leqslant C \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla (1_{\{B_4^*\}}\eta[\theta^*]_+)|^2 dxdz \\
&= C \int_{B_4^*} |\nabla(\eta[\theta^*]_+)|^2 dxdz. \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

在第二行用到了等式

$$
\|f\|^2_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^d)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla L(f)|^2 dxdz, \qquad (3.48)
$$

这可以通过调和函数 $u = L(f)$ 的分部积分

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} u\Delta u dx &= -\int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} u \frac{\partial u}{\partial n} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+^{d+1}} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\Lambda f dx.
\end{aligned}
$$

及 Plancherel 公式而得到. 在 (3.47) 的第三行利用了经典的变分原理并结合如下事实：调和扩张 $L(1_{\{B_4\}}\eta\theta_+)$ 在边界 $z=0$ 上与 $1_{\{B_4^*\}}\eta[\theta^*]_+$ 具有相同的迹. 具体地讲, 这里的变分原理如下：设 $u \in C^2(\bar{\Omega})$(e.g $\Omega = \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$) 是 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$
\begin{cases}
-\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \\
u|_{\partial\Omega} = g
\end{cases}
$$

的解, 则

$$
I(u) = \inf_{\omega \in A} I(\omega), \quad I(\omega) := \int_\Omega \frac{|\nabla \omega|^2}{2} dx,
$$

其中

$$
A := \{\omega \in C^2(\bar{\Omega}) \mid \omega|_{\partial\Omega} = g\}.
$$

最后, 对 (3.46) 的末项, 采用 Hölder 不等式与 Young 不等式就得

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_4} \eta\nabla\eta \cdot v[\theta]_+^2 dxds \right| \\
\leqslant &\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \|1_{\{B_4\}}\eta\theta_+\|^2_{L^{\frac{2d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \|1_{\{B_4\}}(\nabla\eta)v\theta_+\|^2_{L^{\frac{2d}{d+1}}(\mathbb{R}^d)} ds. \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

取 ε 充分小, 由 (3.47) 知 (3.49) 的第一项可被 (3.46) 的左端项吸收. 第二项仅需利用 Hölder 不等式就可推出有如下的上界：

$$
\frac{1}{\varepsilon}\|v\|_{L^\infty([t_1,t_2];L^{2d}(B_4))} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_4} |(\nabla\eta)\theta_+|^2 dxds. \qquad (3.50)
$$

将 (3.49) 与 (3.50) 代入到 (3.46), 就得局部能量不等式 (3.44).

4. *局部 $L^2 \to L^\infty$ 估计及提升*

从现在开始, 采用 De Giorgi 在研究椭圆方程解的 Hölder 正则性时所开发的经典方法. 第一步是建立上述 L^∞ 估计的局部的、可尺度化的 (scalable) 形式. 它体现了 θ 的水平截断的空间与时间局部化形式可以被 (局部的)L^2 范数控制. 第二步是著名的“振荡引理”, 它是研究 Hölder 连续性的关键步骤. 可以粗略地描述如下:

假设 θ 在区域 $Q_4=[-4,0]\times B_4$ 上振荡, 取值在 $[-2,2]$, 并且在多数时间上取负值 (否则可用 $-\theta$ 代替 θ). 当 $\|\theta_+\|_{L^2}$ 充分小时, 前面建立的局部 $L^2\to L^\infty$ 估计意味着 θ_+ 在一个小区域上会更小. 特别地, 可以证明

$$\theta_+|_{Q_1=[-1,0]\times B_1} \leqslant 2-\lambda,$$

这本质上说明在较小区域上减少了 θ 的振荡, 详见引理 3.7. 当然, 我们并非先验地知道 $\|\theta_+\|_{L^2}$ 是充分小的. 我们仅知道如下信息: 在 Q_4 中 θ 起码一半时间为正, 或一半时间为负, 不妨设至少一半时间为负. 这时需要重新建立 De Giorgi 型的等周不等式, 它表明 θ 从 0 变到 1 需要“一定的空间”, 换言之

$$|\{x:\theta(x)\leqslant 1\}|>|\{x:\theta(x)\leqslant 0\}|.$$

在水平截断 $C_k=2-2^{-k}$ 层次上反复用这种论证, 经过有限次之后, 例如 k_0 次之后, 可以得到小 L^2 模的情形, 进而就可以把 θ 的振荡有效地减少 $\lambda 2^{-k_0}$. 这本质上就意味着 θ 的 Hölder 连续性.

本节主要致力于证明第一步 —— 局部的 $L^2\to L^\infty$ 引理, 即在对向量场 v 的适当假设条件下, 可以从 θ 和 θ^* 的局部 L^2 范数来获得 θ 的局部 L^∞ 范数估计!

引理 3.7 *设速度场 $v(t,x)$ 满足*

$$\|v\|_{L^\infty([-4,0];\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d))}+\sup_{-4\leqslant t\leqslant 0}\left|\int_{B_4} v(t,x)dx\right|\leqslant C_v, \tag{3.51}$$

则存在 $\varepsilon_0=\varepsilon_0(d,C_v)>0$ 及 $\lambda=\lambda(d)>0$ 使得 Cauchy 问题 (3.1) 的解满足如下性质: 如果有

$$\theta^*\leqslant 2,\quad (t,x,z)\in[-4,0]\times B_4^*, \tag{3.52}$$

及

$$\int_{-4}^0\int_{B_4^*}[\theta^*]_+^2\,dxdzds+\int_{-4}^0\int_{B_4}[\theta]_+^2\,dxds\leqslant\varepsilon_0, \tag{3.53}$$

则

$$[\theta]_+\leqslant 2-\lambda,\quad (t,x)\in[-1,0]\times B_1. \tag{3.54}$$

注记 3.9 严格地讲, 这并不是一个"纯粹的" $L^2 \to L^\infty$ 估计, 原因是我们已经假设了 θ^* 点态的被 2 所控制. 尽管如此, 由于我们的最终目标只是改进 θ^* 的振荡 (oscillation), 从上界 2 过渡到 $2-\lambda$ 就已足够了.

证明步骤与理念 需要将引理 3.7 的证明分几步进行. 第一步与第二步是预备工作, 给出了辅助的闸函数及循环常数. 第三步主要描述了我们将要证明的循环关系. 实际的证明从第四步才真正开始.

类同于定理 3.1 的证明, 对于单增的常数序列 $C_k \nearrow 2-\lambda$, 考虑其对应的截断序列, 我们将证明当达到 $2-\lambda$ 时相应的截断函数的能量为 0, 这就意味着相应的截断函数恒等于 0.

在进入具体的证明之前, 先概括地阐述证明的理念与方法. 原则上, 我们要证明的是: 如果在柱体 $B_4^* \times [-4,0]$ 上 $[\theta^*]_+ \leqslant 2$, 且

$$\|[\theta^*]_+\|_{L^2(B_4^*\times[-4,0])} \ll 1, \quad \|[\theta]_+\|_{L^2(B_4\times[-4,0])} \ll 1,$$

则有

$$[\theta^*]_+ \leqslant 2-\lambda, \quad B_1^* \times [-1,0] \quad 与 \quad [\theta]_+ \leqslant 2-\lambda, \quad B_1 \times [-1,0].$$

观察 I 借助于下面所构造的闸函数 b_1, 仅需证明

$$[\theta]_+ \leqslant 2-\lambda, \quad B_1 \times [-1,0].$$

原因在于 $[\theta^*]_+$ 可以被 b_1 及 $[\theta]_+$ 的调和扩张 $([\theta]_+)^*$ 所控制.

观察 II 如果 $[\theta]_+$ 的 L^2 范数充分小, 则当 z 很小时, $[\theta^*]_+$ 亦会非常小 (与 $\|\theta_+\|_{L^2}$ 按某种方式具有比例关系). 事实上, 当 Poisson 核磨光 $[\theta]_+$ 的同时 (z 充分小), 与 b_1 对应的部分线性地趋向于 0; 换言之, 通过 b_1 反映出的非局部算子 Λ 整体部分的影响, 随着 $z \to 0$ 而消失, 就相当于

$$\lim_{z\to 0} b_1(z) = 0 \quad (依线性的方式).$$

因此, 当 θ 依单调增加的水平进行截断时, 我们可以几乎忽略 Λ 的影响 (即 b_1 的贡献), 见第五步 (支集性质的传播). 这就消除了关于 z 变量的截断的要求及几乎消除了 Λ 的整体部分的影响.

剩余的仅是在小的"侧边角" (lateral edges) 上, 这是空间截断发生的区域, 并且对于充分小的 z, 同时具有指数衰减的性质 (由闸函数 b_2). 这些性质足以使我们获得对于 A_k (见 (3.61)) 的适当的循环关系, 进而就推出 $\theta_\infty = 0$ 在 $B_1 \times [-1,0]$ 上, 即 $\theta \leqslant 2-\lambda$.

读者将会看到, 下面使用归纳法蕴含了一个交叉提升的特殊形式. 在第四步中有一个直接到 $k \geqslant 12d$ 的"长跳跃", 使我们置于如上 (即第二步中) 描述的合适的归纳框架中, 并且在 θ_+ (L^2 范数) 充分小的条件下开始迭代过程.

第一步. 闸函数.

下面的两个闸函数, b_1 和 b_2, 主要用来控制 θ^* 远离 $D_1^* = B_1 \times \{0\}$ 的值影响 θ^* 在 D_1^* 附近的值的方式.

定义调和函数 b_1 如下:

$$\begin{cases} \Delta b_1 = 0, & B_4^*, \\ b_1 = 2, & \partial B_4^* \setminus \{x \in B_4, z = 0\}, \\ b_1 = 0, & x \in B_4, z = 0. \end{cases}$$

则由极值原理知, 存在 $\lambda > 0$, 使得

$$b_1(x,z) \leqslant 2 - 4\lambda, \quad (x,z) \in B_2^*.$$

b_2 的定义如下:

$$\begin{cases} \Delta b_2 = 0, & (x,z) \in [0,\infty) \times [0,1], \\ b_2(0,z) = 2, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ b_2(x,0) = b_2(x,1) = 0, & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

则存在一致常数 $\overline{C} > 0$(e.g. $\overline{C} = 2\sqrt{2}$), 满足

$$|b_2(x,z)| \leqslant \overline{C} e^{-x/2}. \tag{3.55}$$

事实上, 取比较函数

$$\widetilde{b}_2(x,z) = 2\sqrt{2}\cos(z/2)e^{-\frac{x}{2}},$$

它是调和函数, 并且在边界上的值大于 b_2 在相应边界上的值, 进而由比较定理就可推出 (3.55).

第二步. 常数的设置.

这一步主要是固定一组常数. 这些常数的选择是使读者确信, 这里的迭代证明没有形成逻辑循环及常数的循环依赖.

引理 3.8 *存在 $0 < \delta < 1$ 和 $M > 1$ 满足对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$ 成立*

$$2d\overline{C}e^{-\frac{2^{-k}}{4(\sqrt{2}+1)\delta^k}} \leqslant \lambda 2^{-k-2}, \tag{3.56}$$

$$\frac{M^{-k/2}}{\delta^{\frac{d(k+1)}{2}}} \|P(1)\|_{L^2} \leqslant \lambda 2^{-k-2}, \tag{3.57}$$

$$M^{-k} \geqslant C_0^k M^{-\frac{d+1}{d}(k-3)}, \quad k \geqslant 12d, \tag{3.58}$$

这里 $\overline{C}, \lambda$ 是在第一步中给出的常数, $P(1)$ 是 Poisson 核函数 $P(z)(x)$ 在 $z = 1$ 处的值, 并且绝对常数 C_0 将由第六步中的 (3.74) 给出.

证明 首先选取 $\delta > 0$ 使得 (3.56) 成立. 如果 $\delta < \frac{1}{4}$, 则 (3.56) 的左边被 $2d\overline{C}e^{-c2^k}$ 控制, 进而由指数衰减性, 总可以找到 $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ 使得当 $k > k_0$ 时进一步被 (3.56) 的右边控制. 如果需要的话, 我们可以进一步选取 δ 充分小使得 (3.56) 对于所有的 $k \leqslant k_0$ 都成立.

其次, 对于上面取定的 δ, 我们来选取合适的 M 保证 (3.57), (3.58) 成立. 注意到 (3.57) 等价于

$$\left(\frac{2}{\delta^{d/2}\sqrt{M}}\right)^k \leqslant \frac{\lambda\delta^{d/2}}{4\|P(1)\|_{L^2}}.$$

因此, 只需取

$$M \geqslant \sup\left(\frac{2}{\delta^{d/2}}, \frac{8\|P(1)\|_{L^2}}{\lambda\delta^d}\right)^2$$

即可保证 (3.57) 成立. 事实上, 根据插值的理念, 对于端点 $k = 1$ 或 $k = \infty$ 的情形就可以确定所需的常数, 这样的控制常数对于任意的整数 k 均成立.

最后, 第三个不等式等价于

$$\left(\frac{M}{C_0^d}\right)^{\frac{k}{d}} \geqslant M^{\frac{3(1+d)}{d}}, \quad k \geqslant 12d.$$

对此情形, 只要取 $M \geqslant \sup(1, C_0^{2d})$ 即可. 事实上, 由 $\frac{M^2}{C_0^{2d}} \geqslant M$ 知, 对所有的 $k \geqslant 12d$ 和 $d \in \mathbb{Z}^+$ 有

$$\left(\frac{M}{C_0^d}\right)^{\frac{k}{d}} = \left(\frac{M^2}{C_0^{2d}}\right)^{\frac{k}{2d}} \geqslant M^{\frac{k}{2d}} \geqslant M^6 \geqslant M^{\frac{3(d+1)}{d}},$$

其中在后两个不等式中用到了条件 $M \geqslant 1$.

因此, 可以选取

$$M = \sup\left(1, C_0^{2d}, \left(\frac{2}{\delta^{d/2}}\right)^2, \left(\frac{8\|P(1)\|_{L^2}}{\lambda\delta^d}\right)^2\right).$$

这样, 在接下来的证明中, 常数 λ, δ 及 M 都已是固定常数, 而常数 ε_0 将根据上述固定常数来确定.

第三步. 归纳框架与目标.

令

$$\theta_k = [\theta - C_k]_+, \quad \theta_k^* = [\theta^* - C_k]_+, \quad k \in \mathbb{N},$$

其中 $C_k = 2 - \lambda - \lambda 2^{-k}$, 特别注意到

$$\theta_k^* \neq (\theta_k)^*,$$

并且 θ_k(或 θ_k^*) 关于 k 是递减函数. 我们考虑如下的仅关于 x 变量的截断函数 $\eta_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$1_{\{B_{1+2^{-k-1/2}}\}} \leqslant \eta_k \leqslant 1_{\{B_{1+2^{-k}}\}}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.59}$$

$$|\nabla \eta_k| \leqslant C2^k, \tag{3.60}$$

其中的估计 (3.60) 源于 $\mathrm{dist}(\partial B_{1+2^{-k}}, \partial B_{1+2^{-k-1/2}}) \sim 2^{-k}$. 这样的 η_k 是可以选取到的, 并且显见 η_k 关于 k 递减. 这样记

$$A_k = \int_{-1-2^{-k}}^{0} \int_0^{\delta^k} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\eta_k \theta_k^*)|^2 dxdzdt + \sup_{t\in[-1-2^{-k},0]} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_k \theta_k)^2 dx. \tag{3.61}$$

我们将证明, 下面两个关系式对于任意的 $k \in \mathbb{N}$ 同时成立

$$A_k \leqslant M^{-k}, \tag{3.62}$$

$$\eta_k \theta_k^* = 0, \qquad \delta^k \leqslant z \leqslant \min(2, \delta^{k-1}). \tag{3.63}$$

第四步. 归纳的第一步.

首先证明, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, (3.62) 对于 $0 \leqslant k \leqslant 12d$ 成立, 同时 (3.63) 对于 $k=0$ 成立. 取截断函数 $\eta_k(x)\psi(z)$, 其中 $\psi(z)$ 是仅关于 z 的一个固定的 C_c^∞ 截断函数 (e.g. $\mathrm{supp}\psi(z) \subset [-2,2]$, 且在 $z \in [0,1]$ 上恒为 1), 并对 $\theta^* - C_k$ 在 B_4^* 上应用能量不等式 (3.44) 有

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_4^*} |\nabla(\eta_k \psi \theta_k^*)|^2 dxdzdt + \int_{B_4} (\eta_k \theta_k)^2 (t_2, x) dx \\
\leqslant &\int_{B_4} (\eta_k \theta_k)^2 (t_1, x) dx + A \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_4} ([\nabla \eta_k] \theta_k)^2 dxdt \\
&+ 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_4^*} ([\nabla(\eta_k \psi)] \theta_k^*)^2 dxdzdt.
\end{aligned}$$

上式两边关于 t_1 在 $[-4,-2]$ 上取积分平均, 则对于所有的 $t_2 \in [-1-2^{-k}, 0]$, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^{t_2} \int_0^{\delta^k} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\eta_k \theta_k^*)|^2 dxdzdt + \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_k \theta_k)^2 (t_2, x) dx \\
\leqslant &\frac{1}{2} \int_{-4}^{-2} \int_{B_4} (\eta_k \theta_k)^2 dxdt + A \int_{-4}^{t_2} \int_{B_4} ([\nabla \eta_k] \theta_k)^2 dxdt \\
&+ 2 \int_{-4}^{t_2} \int_{B_4^*} ([\psi \nabla \eta_k + \eta_k \nabla \psi] \theta_k^*)^2 dxdzdt \\
\leqslant &C(1 + A2^{2k}) \int_{-4}^{0} \int_{B_4} [\theta]_+^2 dxdt + C(1 + 2^{2k}) \int_{-4}^{0} \int_{B_4^*} [\theta^*]_+^2 dxdzdt.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

在最后一行中用到了 (3.60) 及 $\theta_k \leqslant [\theta]_+$, $\theta_k^* \leqslant [\theta^*]_+$. 这样, 对于 $0 \leqslant k \leqslant 12d$, 由 (3.53) 知

$$A_k \leqslant C2^{24d}(1 + A)\varepsilon_0,$$

进而只要 ε_0 取的充分小 (i.e. $C2^{24d}(1+A)\varepsilon_0 \leqslant M^{-12d}$) 即可使 (3.62) 成立.

下面来考虑支集性质 (3.63). 注意到 θ 的调和延拓 θ^* 满足

$$\begin{cases} \Delta\theta^* = 0, & (x,z) \in B_4^*, \\ \theta^*|_{z=0} = \theta \leqslant [\theta]_+, & x \in B_4. \end{cases}$$

在 B_4^* 上使用极值原理, 容易看出

$$\theta^* \leqslant (1_{\{B_4\}}\theta_+) * P(z) + b_1(x,z) := F(t,x,z), \quad (t,x,z) \in [-2,0] \times B_4^*. \tag{3.65}$$

事实上, 显然见

$$\begin{cases} \Delta_{x,z} F = 0, \quad (x,z) \in B_4^*, \\ F|_{\partial B_4^* \setminus (\{z=0\})} \geqslant 2, \\ F|_{\{z=0\}\cap B_4} = [\theta]_+. \end{cases}$$

由第一步, 我们知道在 B_2^* 上 $b_1(x,z) \leqslant 2-4\lambda$. 另一方面, 注意到调和扩张 $\theta^* \leqslant 2$ 及局部时空可积条件 (3.53), 由 Hölder 不等式可见

$$\begin{aligned} \|([\theta]_+ 1_{\{B_4\}}) * P(z)\|_{L_x^\infty(z\geqslant 1)} &\leqslant \|[\theta]_+ 1_{\{B_4\}}\|_{L^2} \|P(z)\|_{L^2(z\geqslant 1)} \\ &\leqslant C\|P(1)\|_{L^2}\sqrt{\varepsilon_0} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

现选取 ε_0 充分小使得 $C\sqrt{\varepsilon_0} \leqslant 2\lambda$, 于是

$$\theta^*(t,x,z) \leqslant 2-2\lambda, \quad 1 \leqslant z \leqslant 2,\ t \in [-2,0],\ x \in B_2.$$

因此

$$\theta_0^* = [\theta^* - (2-2\lambda)]_+ = 0, \quad 1 \leqslant z \leqslant 2,\ t \in [-2,0],\ x \in B_2.$$

从而证明了当 $1 = \delta^0 \leqslant z \leqslant 2$ 时 $\eta_0\theta_0^* = 0$, 即 $k=0$ 时 (3.63) 成立.

第五步. 支集性质 (3.63) 的传播.

采用归纳法. 假设 (3.62), (3.63) 对于 k 成立, 来证 (3.63) 对于 $k+1$ 成立, 同时将证明有下面对 k 的估计:

$$\eta_{k+1}\theta_{k+1}^* \leqslant [(\eta_k\theta_k) * P(z)]\eta_{k+1}, \quad (x,z) \in \overline{B}_k^* = B_{1+2^{-k}} \times [0,\delta^k]. \tag{3.67}$$

通过逐个地考察边界 ∂B_k^* 上值的贡献, 进而利用 (底边值的) 调和延拓来控制 $\theta_k^* = [\theta^* - C_k]_+$. 考虑区域 $D := B_{1+2^{-k-1/2}} \times [0,\delta^k]$, 则在边界 $z=\delta^k$ 上, 由归纳假设 (3.63) 知

$$\theta_k^*|_{z=\delta^k} = \eta_k\theta_k^*|_{z=\delta^k} = 0, \quad x \in B_{1+2^{-k-1/2}}.$$

注意到

$$\theta_k^*\big|_{\{z=0\}\cap B_{1+2^{-k-\frac{1}{2}}}} = (\theta - C_k)_+\big|_{B_{1+2^{-k-\frac{1}{2}}}} = (\eta_k\theta_k) * P(z)\big|_{\{z=0\}\cap B_{1+2^{-k-\frac{1}{2}}}},$$

在边界 $\{z=0\}\cap D$ 上, θ_k^* 可被调和函数 $(\eta_k\theta_k)^* = (\eta_k\theta_k) * P(z)$ 所控制.

记

$$x^+ = 1 + 2^{-k-1/2}, \quad x^- = -1 - 2^{-k-1/2}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

在垂直边界 $\{x_i = x^+, x_i = x^-\}\cap D$ 上, 构造相应的控制函数

$$b_2\Big(\frac{x_i - x^+}{\delta^k}, \frac{z}{\delta^k}\Big) + b_2\Big(\frac{x_i - x^-}{\delta^k}, \frac{z}{\delta^k}\Big).$$

事实上, b_2 是调和函数, 并且在边界 $\{x_i = x^+\}\cap D$ 与 $\{x_i = x^-\}\cap D$ 上满足 $b_2 \geqslant 2$. 利用极值原理有

$$\theta_k^* \leqslant \sum_{i=1}^d \Big[b_2\Big(\frac{x_i - x^+}{\delta^k}, \frac{z}{\delta^k}\Big) + b_2\Big(\frac{x_i - x^-}{\delta^k}, \frac{z}{\delta^k}\Big)\Big] + (\eta_k\theta_k) * P(z). \tag{3.68}$$

因此, 由第一步中闸函数 $b_2(x,z)$ 的估计 (3.55) 及第二步中 (3.56) 可见, 对所有的 $x \in B_{1+2^{-k-1}}$ 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d \Big[b_2\Big(\frac{x_i - x^+}{\delta^k}, \frac{z}{\delta^k}\Big) + b_2\Big(\frac{x_i - x^-}{\delta^k}, \frac{z}{\delta^k}\Big)\Big] &\leqslant \overline{C}\sum_{i=1}^d \big(e^{-\frac{|x_i - x^+|}{2\delta^k}} + e^{-\frac{|x_i - x^-|}{2\delta^k}}\big) \\ &\leqslant 2d\overline{C}e^{-\frac{2^{-k}}{4(\sqrt{2}+1)\delta^k}} \leqslant \lambda 2^{-k-2},\end{aligned} \tag{3.69}$$

其中用到了

$$e^{-\frac{2^{-k-1/2} - 2^{-k-1}}{2\delta^k}} = e^{-\frac{2^{-k}(\sqrt{2}-1)}{4\delta^k}} = e^{-\frac{2^{-k}}{4(\sqrt{2}+1)\delta^k}}.$$

由于

$$\begin{aligned}\theta_{k+1}^* &= [\theta^* - (2 - \lambda - \lambda 2^{-k-1})]_+ = [\theta^* - (2 - \lambda - \lambda 2^{-k}) - \lambda 2^{-k-1}]_+ \\ &\leqslant [\theta_k^* - \lambda 2^{-k-1}]_+,\end{aligned}$$

将 (3.69) 及 (3.70) 代入上式, 就得

$$\begin{aligned}\eta_{k+1}\theta_{k+1}^* &\leqslant [(\eta_k\theta_+) * P(z) + \lambda 2^{-k-2} - \lambda 2^{-k-1}]_+\eta_{k+1} \\ &= [(\eta_k\theta_+) * P(z) - \lambda 2^{-k-2}]_+\eta_{k+1}.\end{aligned} \tag{3.70}$$

这当然就意味着 (3.67) 成立. 更进一步, 由 Hölder 不等式、归纳假设 (3.62) 及第二步中 (3.57), 对于 $\delta^{k+1} \leqslant z \leqslant \delta^k$ 有

$$
\begin{aligned}
(\eta_k\theta_k) * P(z) &\leqslant \|\eta_k\theta_k\|_{L_x^2}\|P(z)\|_{L_x^2(z\geqslant\delta^{k+1})} \\
&\leqslant \frac{M^{-k/2}}{\delta^{d(k+1)/2}}\|P(1)\|_{L^2} \\
&\leqslant \lambda 2^{-k-2}.
\end{aligned} \tag{3.71}
$$

这样

$$
\eta_{k+1}\theta_{k+1}^* \leqslant 0, \quad \delta^{k+1} \leqslant z \leqslant \delta^k. \tag{3.72}
$$

特别地, 结合第四步的结果知, (3.63) 对所有的 $0 \leqslant k \leqslant 12d+1$ 都成立. 与此同时, 辅助估计 (3.67) 对所有的 $0 \leqslant k \leqslant 12d$ 均成立.

第六步. 支集性质 (3.62) 的传播.

这一步证明如下断言: 如果 (3.63) 对于 $k-3$ 成立, 并且 (3.62) 对于 $k-3, k-2, k-1$ 成立, 则 (3.62) 对于 k 成立.

首先, 由假设条件及第五步的结果直接就推出 (3.63) 对于 $k-2, k-1, k$ 都成立. 因此, 由第三步中的结果, 只需要证明如下递归不等式:

$$
A_k \leqslant C_0^k (A_{k-3})^{\frac{1+d}{d}}, \quad k \geqslant 12d+1, \tag{3.73}
$$

这里

$$
C_0 = C\frac{2^{2+\frac{2}{d}}}{\lambda^{\frac{2}{d}}}. \tag{3.74}
$$

事实上, 由第二步中的 (3.58) 知

$$
A_k \leqslant C_0^k M^{-(k-3)(\frac{1+d}{d})} \leqslant M^{-k}.
$$

第七步. 迭代估计 (3.73) 的证明.

由于 $\eta_k\theta_k^* 1_{\{0<z<\delta^k\}}$ 与调和延拓 $(\eta_k\theta_k)^*$ 在边界 $z=0$ 上具有相同的迹, 利用 Dirichlet 变分原理及 (3.48) 可见

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\eta_k\theta_k^*)|^2 dxdz &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\eta_k\theta_k^* 1_{\{0<z<\delta^k\}})|^2 dxdz \\
&\geqslant \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla L(\eta_k\theta_k)|^2 dxdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2}(\eta_k\theta_k)|^2 dx.
\end{aligned}
$$

在上式中用 $k-3$ 代替 k, 得

$$
\begin{aligned}
A_{k-3} = &\int_{-1+2^{-k+3}}^0 \int_0^{\delta^{k-3}} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\eta_{k-3}\theta_{k-3}^*)|^2 dxdzdt \\
&+ \sup_{t\in[-1-2^{-k+3},0]} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_{k-3}\theta_{k-3})^2 dx
\end{aligned}
$$

$$\gtrsim \int_{-1+2^{-k+3}}^{0} \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{1/2}(\eta_{k-3}\theta_{k-3})|^2 dxdt$$
$$+ \sup_{t\in[-1-2^{-k+3},0]} \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_{k-3}\theta_{k-3})^2 dx.$$

进而由插值公式 (3.30) 可见

$$A_{k-3} \geqslant C\|\eta_{k-3}\theta_{k-3}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}([-1-2^{-k+3},0]\times\mathbb{R}^d)}. \tag{3.75}$$

另外, 由 (3.67) 及 $P(z)(x) = z^{-d}P(1)(x/z)$ 知

$$\begin{aligned}\|\eta_{k-2}\theta^*_{k-2}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}} &\leqslant \|P(z)(\cdot)\|^2_{L^1_x}\|\eta_{k-3}\theta_{k-3}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}} \\ &\leqslant \|P(1)\|^2_{L^1_x}\|\eta_{k-3}\theta_{k-3}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}}.\end{aligned} \tag{3.76}$$

这样就有

$$\begin{aligned}A_{k-3} &\geqslant C\|\eta_{k-2}\theta^*_{k-2}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}} + C\|\eta_{k-3}\theta_{k-3}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}} \\ &\geqslant C\Big(\|\eta_{k-2}\theta^*_{k-1}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}} + \|\eta_{k-2}\theta_{k-1}\|^2_{L^{\frac{2(d+1)}{d}}_{t,x}}\Big).\end{aligned} \tag{3.77}$$

在最后一行用到了 θ^*_k 与 η_k 关于 k 的递减性.

另一方面, 由于 η_k 仅是空间变量 x 的截断函数 (满足 $\eta_k 1_{\partial B_{1+2^{-k}}} = 0$), 并利用 (3.63) 可见

$$\eta_k\theta^*_k\big|_{\partial\left(B^*_{1+2^{-k}}\times[-\delta^k,\delta^k]\right)} = 0, \tag{3.78}$$

这样, 就可以对 $\eta_k\theta^*_k 1_{\{0<z<\delta^k\}}$ 应用命题 3.6, 即由 (3.44) 知

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B^*_{1+2^{-k}}} |\nabla(\eta_k\theta^*_k 1_{\{0<z<\delta^k\}})|^2 dxdzdt + \int_{B_{1+2^{-k}}} (\eta_k\theta_k)^2(t_2,x)dx$$
$$\leqslant \int_{B_{1+2^{-k}}} (\eta_k\theta_k)^2(t_1,x)dx + A\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{1+2^{-k}}} ([\nabla\eta_k]\theta_k)^2 dxdt$$
$$+ 2\int_{t_1}^{t_2}\int_{B^*_{1+2^{-k}}} ([\nabla\eta_k]\theta^*_k 1_{\{0<z<\delta^k\}})^2 dxdzdt.$$

两边关于 t_1 从 $-1-2^{-k+1} \to -1-2^{-k}$ 取积分平均, 并且类似于 (3.64), 对所有的 $t_2 \in [-1-2^{-k},0]$ 有

$$\int_{-1-2^{-k}}^{t_2}\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(\eta_k\theta^*_k)|^2 dxdzdt + \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_k\theta_k)^2(t_2,x)dx$$
$$\leqslant 2^k \int_{-1-2^{-k+1}}^{-1-2^{-k}}\int_{\mathbb{R}^d} (\eta_k\theta_k)^2 dxdt + A\int_{-1-2^{-k+1}}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^d} ([\nabla\eta_k]\theta_k)^2 dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_{-1-2^{-k+1}}^{t_2}\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d}([\nabla\eta_k]\theta_k^*)^2dxdzdt\\
\leqslant &C(2^k+A2^{2k})\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_{\mathbb{R}^d}[\eta_{k-1}\theta_k]^2dxdt\\
&+C2^{2k}\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d}[\eta_{k-1}\theta_k^*]^2dxdzdt,
\end{aligned}
$$

其中已用到了 $|\nabla\eta_k|^2\leqslant 2^{2k}\eta_{k-1}^2$. 上式关于 $t_2\in[-1-2^{-k},0]$ 取上确界, 就有

$$
\begin{aligned}
A_k\leqslant &C2^{2k}(A+2)\bigg(\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_{\mathbb{R}^d}\eta_{k-1}^2\theta_k^2dxdt\\
&+\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d}\eta_{k-1}^2(\theta_k^*)^2dxdzdt\bigg).
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

进一步, 若 $\theta_k=[\theta-C_k]_+>0$, 即此时 $\theta>C_k=2-\lambda-\lambda2^{-k}$, 则 $\theta_{k-1}>\lambda2^{-k}$, 于是

$$
1_{\{\theta_k>0\}}\leqslant\left(\frac{2^k}{\lambda}\theta_{k-1}\right)^{\frac{2}{d}},
\tag{3.80}
$$

及

$$
1_{\{\eta_{k-1}>0\}}1_{\{\theta_k>0\}}\leqslant\left(\frac{2^k}{\lambda}\eta_{k-2}\theta_{k-1}\right)^{\frac{2}{d}}.
\tag{3.81}
$$

同理, 将 θ 换为 θ^*, 上面两式同样成立, 从而

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_{\mathbb{R}^d}\eta_{k-1}^2\theta_k^2dxdt+\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d}\eta_{k-1}^2(\theta_k^*)^2dxdzdt\\
\leqslant &\frac{2^{2k/d}}{\lambda^{2/d}}\bigg(\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_{\mathbb{R}^d}[\eta_{k-2}\theta_{k-1}]^{\frac{2(d+1)}{d}}dxdt\\
&+\int_{-1-2^{-k+1}}^{0}\int_0^{\delta^k}\int_{\mathbb{R}^d}[\eta_{k-2}\theta_{k-1}^*]^{\frac{2(d+1)}{d}}dxdzdt\bigg),
\end{aligned}
$$

因此, 上式结合 (3.74), (3.79) 得

$$
A_k\leqslant\frac{C2^{k(2+2/d)}}{\lambda^{2/d}}A_{k-3}^{1+1/d}.
\tag{3.82}
$$

如果需要的话, 可以适当选取 C 大一点使得 $C>\lambda^{2/d}$, 这就得到了 (3.73).

这样, 对所有的 $k\in\mathbb{N}$, 归纳假设 (3.62) 与 (3.63) 都成立, 特别令 $k\to\infty$, 就可以推出

$$
[\theta]_+\leqslant 2-\lambda,\qquad (t,x)\in[-1,0]\times B_1.
$$

5. 第二个辅助引理

业已证明: 若 $\theta, \theta^* \leqslant 2$, 并且它们在 $B_4 \times [-4,0]$ 及 $B_4^* \times [-4,0]$ 上的 L^2 范数充分小, 就可以得到

$$[\theta]_+ \leqslant 2-\lambda, \quad B_1 \times [-1,0] \quad 与 \quad [\theta^*]_+ \leqslant 2-\lambda, \quad B_1^* \times [-1,0]. \tag{3.83}$$

这就刻画了 θ 或 θ^* 的振荡的本质减少. 我们下一步的目标是: 在自然的假设条件

$$|\{Q_4^* : \theta^* \leqslant 0\}| \geqslant \frac{|Q_4^*|}{2} \tag{3.84}$$

下, 就足以导出 (3.83). 这一结论的实现主要基于如下事实: 通过能量不等式, 能够给出相邻的水平集

$$\{\ \theta \geqslant 0\ \},\ \{\ \theta \geqslant 1\},\ \{\ \theta \geqslant 2-1/2\ \},\ \{\ \theta \geqslant 2-1/2^2\ \},\cdots$$

之间在测度上的定量衰减. 本节的主要引理就是刻画了水平集 $\{\theta \geqslant 0\}$ 与 $\{\theta \geqslant 1\}$ 之间在测度上的定量分离, 即如果 $\{0<\theta^*<1\}$ 的测度足够小, 就可以推出 $[\theta^*-1]_+$ 的 L^2 范数充分小.

用 $Q_r = B_r \times [-r,0]$ 与 $Q_r^* = B_r^* \times [-r,0]$ 分别表示 $\mathbb{R}^{d+1}$ 及 $\mathbb{R}^{d+2}$ 上的时空方体.

引理 3.9　设速度场 v 满足

$$\|v\|_{L^\infty([-4,0];\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d))} + \sup_{-4\leqslant t\leqslant 0}\left|\int_{B_4} v(t,x)dx\right| \leqslant C_v, \tag{3.85}$$

则对于任意给定的 $\varepsilon_1>0$, 存在 $\delta_1>0$ 仅依赖于维数 d 与 C_v, 使得如下性质成立: 对于漂移扩散方程 (3.1) 的解 θ, 同时满足

$$\begin{cases}\theta^* \leqslant 2, \quad (x,z,t)\in Q_4^*,\\ |\{(x,z,t)\in Q_4^* : \theta^*(x,z,t)\leqslant 0\}| \geqslant \dfrac{|Q_4^*|}{2},\end{cases} \tag{3.86}$$

则如果

$$\big|\{(x,z,t)\in Q_4^* : 0<\theta^*(x,z,t)<1\}\big| \leqslant \delta_1, \tag{3.87}$$

就推出

$$\int_{Q_1}[\theta-1]_+^2 dxdt + \int_{Q_1^*}[\theta^*-1]_+^2 dxdzdt \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}. \tag{3.88}$$

在证明主要引理之前, 先给出著名的 De Giorgi 的等周不等式.

引理 3.10 (De Giorgi 引理)　设 $\omega \in H^1([-r,r]^d)$, $r>0$, 并记

$$\mathcal{A} = \{x : \omega(x) \leqslant 0\},$$

$$\mathcal{B} = \{x : \omega(x) \geqslant 1\},$$

$$\mathcal{C} = \{x : 0<\omega(x)<1\},$$

则有

$$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leqslant Cr^{d+1}\|\nabla\omega\|_{L^2(\mathcal{C})}|\mathcal{C}|^{1/2}, \tag{3.89}$$

其中 C 是仅依赖维数 d 的常数.

证明 对于 $y \in B_r$, 定义

$$\widetilde{\omega}(y) = \begin{cases} 0, & \omega(y) \leqslant 0, \\ \omega(y), & 0 < \omega(y) < 1, \\ 1, & \omega(y) \geqslant 1. \end{cases}$$

令

$$\chi(s) = 1_{\{y_1 + s\frac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|} \in \mathcal{C}\}}(s), \qquad \forall y_1 \in \mathcal{A}, \quad y_2 \in \mathcal{B}.$$

注意到 $B_r = [-r,r]^d \subset B(0, d^{\frac{1}{2}}r) = \{|x| \leqslant d^{\frac{1}{2}}r\}$, 则

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}||\mathcal{B}| &= \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{B}} dy_2 dy_1 = \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{B}} (\widetilde{\omega}(y_2) - \widetilde{\omega}(y_1)) dy_2 dy_1 \\
&= \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{B}}\int_0^{|y_2-y_1|} \nabla\widetilde{\omega}\Big(y_1 + s\frac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|}\Big) \cdot \frac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|} ds dy_2 dy_1 \\
&= \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{B}}\int_0^{|y_2-y_1|} \chi\nabla\omega\Big(y_1 + s\frac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|}\Big) \cdot \frac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|} ds dy_2 dy_1 \\
&\leqslant \int_{\mathcal{A}}\int_{\mathcal{B}}\int_0^{2d^{\frac{1}{2}}r} \chi\Big|\nabla\omega\Big(y_1 + s\frac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|}\Big)\Big| ds dy_2 dy_1.
\end{aligned}$$

令 $\rho = |y_1 - y_2|$, $\nu = \dfrac{y_2-y_1}{|y_2-y_1|}$, 进而由 $\mathcal{B} \subset B(y_1, 2d^{\frac{1}{2}}r)$, 极坐标表示与 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}||\mathcal{B}| &\leqslant \int_{\mathcal{A}}\int_0^{2d^{\frac{1}{2}}r}\int_{S_{d-1}}\int_0^{2d^{\frac{1}{2}}r} 1_{\{y_1+s\nu\in\mathcal{C}\}}|\nabla\omega(y_1+s\nu)|\rho^{d-1} ds d\nu d\rho dy_1 \\
&\leqslant Cr^d \int_{\mathcal{A}}\int_{S_{d-1}}\int_0^{2d^{\frac{1}{2}}r} 1_{\{y_1+s\nu\in\mathcal{C}\}} \frac{|\nabla\omega(y_1+s\nu)|}{s^{d-1}} s^{d-1} ds d\nu dy_1 \\
&\leqslant Cr^d \int_{\mathcal{A}}\int_{B(0,2d^{\frac{1}{2}}r)} 1_{\{y_1+y_2\in\mathcal{C}\}} \frac{|\nabla\omega(y_1+y_2)|}{|y_2|^{d-1}} dy_2 dy_1 \\
&\leqslant Cr^d \int_{B(0,3d^{\frac{1}{2}}r)} 1_{\{y_1\in\mathcal{C}\}}|\nabla\omega(y_1)| dy_1 \int_{B(0,2d^{\frac{1}{2}}r)} \frac{1}{|y_2|^{d-1}} dy_2 \\
&\leqslant Cr^{d+1}\|\nabla\omega\|_{L^2(\mathcal{C})}|\mathcal{C}|^{1/2}.
\end{aligned}$$

现在致力于引理 3.9 的证明.

引理 3.9 的证明 选取 $\varepsilon_1 \ll 1$. 由如下的局部能量不等式

$$\int_{-4}^{0}\int_{B_4^*}|\nabla(\eta[\theta^*]_+)|^2dxdzdt+\int_{B_4}(\eta[\theta]_+)^2(0,x)dx$$
$$\leqslant\int_{B_4}(\eta[\theta]_+)^2(-4,x)dx+A\int_{-4}^{0}\int_{B_4}([\nabla\eta][\theta]_+)^2dxdt$$
$$+2\int_{-4}^{0}\int_{B_4^*}([\nabla\eta][\theta^*]_+)^2dxdzdt,$$

及在 Q_4^* 上 $\theta^*\leqslant 2$, 就可以推出 (通过选取合适的截断函数 $\eta(x,z)$)

$$\int_{-4}^{0}\int_{B_{r_0}^*}\left|\nabla[\theta^*]_+\right|^2dxdzdt\leqslant C, \tag{3.90}$$

其中 $r_0\in[1,4)$ 是待定常数 (i.e. 满足 (3.98)). 令

$$K=\frac{4\int_{-4}^{0}\int_{B_{r_0}^*}|\nabla[\theta^*]_+|^2dxdzdt}{\varepsilon_1}, \tag{3.91}$$

则由 Tchebichev 不等式可见

$$\left|\left\{t\middle|\int_{B_{r_0}^*}|\nabla[\theta^*]_+|^2(t)dxdz\geqslant K\right\}\right|\leqslant\int_{-4}^{0}\frac{\int_{B_{r_0}^*}|\nabla[\theta^*]_+|^2(t)dxdz}{K}dt\leqslant\frac{\varepsilon_1}{4}. \tag{3.92}$$

利用 De Giorgi 引理, 对所有的

$$t\in\left\{t\in[-4,0]\,\middle|\,\int_{B_{r_0}^*}|\nabla[\theta^*]_+|^2(t)dxdz\leqslant K\right\},$$

就得

$$|\mathcal{A}(t)||\mathcal{B}(t)|\leqslant Cr_0^{d+2}|\mathcal{C}(t)|^{1/2}\|\nabla\theta^*(t)\|_{L^2(B_{r_0}^*)}\leqslant C^*|\mathcal{C}(t)|^{1/2}K^{1/2}, \tag{3.93}$$

这里

$$\mathcal{A}(t)=\{(x,z)\in B_{r_0}^*\mid\theta^*(x,z)\leqslant 0\},$$
$$\mathcal{B}(t)=\{(x,z)\in B_{r_0}^*\mid\theta^*(x,z)\geqslant 1\},$$
$$\mathcal{C}(t)=\{(x,z)\in B_{r_0}^*\mid 0<\theta^*(x,z)<1\}.$$

记 $\delta_1=\varepsilon_1^8$, 及

$$I=\left\{t\in[-4,0]\,\middle|\,|\mathcal{C}(t)|^{1/2}\leqslant\varepsilon_1^3\text{ 且 }\int_{B_{r_0}^*}|\nabla[\theta^*]_+|^2(t)dxdz\leqslant K\right\}.$$

由 Tchebichev 不等式及 (3.87) 知

$$\left|\left\{t \in [-4,0] \ \left| \left|\mathcal{C}(t)\right|^{1/2} > \varepsilon_1^3\right.\right\}\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1^6}\int_{-4}^{0}|\mathcal{C}(t)|dt$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_1^6}\int_{-4}^{0}\int_{B_{r_0}^*} 1_{\{0<\theta^*<1\}}dxdzdt$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon_1^6}\left|\left\{ (x,z,t) \in Q_4^* \ \middle| 0 < \theta^* < 1 \right\}\right|$$
$$\leqslant \frac{\delta_1}{\varepsilon_1^6} \leqslant \varepsilon_1^2 \leqslant \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

进而由上式及 (3.92) 得

$$\Big|[-4,0]\setminus I\Big| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} \qquad (\text{表明 } I \text{ 与 } [-4,0] \text{ 的接近程度}). \tag{3.94}$$

其次, 对于 $t \in I$ 且满足 $|\mathcal{A}(t)| \geqslant \dfrac{1}{4}$ 的所有的 t, 由 (3.91), (3.93) 知

$$|\mathcal{B}(t)| \leqslant \frac{C^*|\mathcal{C}(t)|^{1/2}K^{1/2}}{|\mathcal{A}(t)|} \leqslant \frac{4C^*C\varepsilon_1^3}{\varepsilon^{1/2}} \leqslant C\varepsilon_1^{5/2} \leqslant \varepsilon_1^2. \tag{3.95}$$

特别地, 对这些 t 也满足

$$\int_{B_{r_0}^*}[\theta^*]_+^2 dxdz = \int_{\mathcal{B}(t)\cup\mathcal{C}(t)}[\theta^*]_+^2 dxdz \leqslant 4(|\mathcal{B}(t)| + |\mathcal{C}(t)|)$$
$$\leqslant 4(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^6) \leqslant 8\varepsilon_1^2.$$

进一步, 对任意的 $z \in \mathbb{R}^+$ 有 Newton-Leibniz 公式

$$\int_{B_{r_0}}[\theta]_+^2(t)dx = \int_{B_{r_0}}[\theta^*]_+^2(x,z,t)dx - 2\int_0^z\int_{B_{r_0}}[\theta^*]_+(t)\partial_{\bar z}[\theta^*]_+dxd\bar z,$$

上式关于 z 在 $[0,r_0]$ 上积分平均, 可见

$$\int_{B_{r_0}}[\theta]_+^2(t)dx \leqslant \frac{1}{r_0}\int_{B_{r_0}^*}[\theta^*]_+^2(t)dxdz + 2\left|\int_{B_{r_0}^*}[\theta^*]_+(t)\partial_{\bar z}[\theta^*]_+dxd\bar z\right|$$
$$\leqslant \int_{B_{r_0}^*}[\theta^*]_+^2 dxdz + 2\Big(\int_{B_{r_0}^*}[\theta^*]_+^2 dxdz\Big)^{1/2}\sqrt{K}$$
$$\leqslant 8\varepsilon_1^2 + 2\sqrt{8}\varepsilon_1 C\varepsilon_1^{-1/2} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}. \tag{3.96}$$

注意到上式是对所有满足 $|\mathcal{A}(t)| \geqslant 1/4$ 的 $t \in I$ 方成立的.

下面将证明

$$|\mathcal{A}(t)| \geqslant \frac{1}{4}, \quad \forall t \in I \cap [-1,0]. \tag{3.97}$$

首先断言, 对于合适的 $r_0\in[1,4)$, 存在 $t_0\leqslant -1$ 使得 $|\mathcal{A}(t_0)|\geqslant 1/4$. 如若不然, 则对所有的 $t\in[-4,-1]$ 都有 $|\mathcal{A}(t)|\leqslant 1/4$, 进而

$$\begin{aligned}\Big|\{\ Q_4^*\ |\ \ \theta^*\leqslant 0\ \}\Big| &= \int_{-4}^{0}\int_{B_4^*} 1_{\{\theta^*\leqslant 0\}}dxdzdt\\ &\leqslant \int_{-4}^{-1}|\mathcal{A}(t)|dt+|B_{r_0}^*|+4\cdot|B_4^*\setminus B_{r_0}^*|\\ &\leqslant \frac{3}{4}+4|B_4^*|-3|B_{r_0}^*|.\end{aligned}$$

如果选取 r_0 使得 $3|B_{r_0}^*|>2|B_4^*|+3/4$, 即

$$r_0\geqslant\left(\frac{4^{d+1}+1/2^{d+1}}{3/2}\right)^{\frac{1}{d+1}},\tag{3.98}$$

就得到 $|\{Q_4^*|\theta^*\leqslant 0\}|<|Q_4^*|/2$, 显然与 (3.86) 矛盾. 于是对于满足 (3.98) 的 r_0 断言成立! 进而由 (3.96) 知, 对于这个 $t_0\leqslant -1$, 也有

$$\int_{B_{r_0}}[\theta]_+^2(t_0)dx\leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}.$$

下面采用逐次提升的过程证明 (3.97). 利用局部的能量不等式 (3.44),

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\int_{B_4^*}|\nabla(\eta[\theta^*]_+)|^2dxdzdt+\int_{B_4}(\eta[\theta]_+)^2(t,x)dx\\ \leqslant&\int_{B_4}(\eta[\theta]_+)^2(t_0,x)dx+A\int_{t_0}^{t}\int_{B_4}([\nabla\eta][\theta]_+)^2dxdt\\ &+2\int_{t_0}^{t}\int_{B_4^*}([\nabla\eta][\theta^*]_+)^2dxdzdt.\end{aligned}$$

其中具体地选取截断函数 $\eta(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\eta\subset B_{r_0+r}\subset B_4; \quad \eta\equiv 1,\ \ x\in B_{r_0}\\ 0\leqslant\eta\leqslant 1; \quad |\nabla\eta|\leqslant\dfrac{C}{r},\end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned}\int_{B_{r_0}}[\theta]_+^2(t,x)dx&\leqslant\int_{B_{r_0+r}}(\eta[\theta]_+)^2(t_0,x)dx+\frac{C(t-t_0)}{r}\\ &\leqslant\int_{B_{r_0}}[\theta]_+^2(t_0,x)dx+C|B_{r_0+r}\setminus B_{r_0}|+\frac{C(t-t_0)}{r}\\ &\leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}+Cr+\frac{C(t-t_0)}{r}.\end{aligned}$$

选取 r 满足

$$Cr + C\sqrt{\varepsilon_1} \leqslant \frac{1}{128}, \tag{3.99}$$

因此, 对于 $t - t_0 \leqslant \delta^* = \dfrac{r}{128C}$, 有

$$\int_{B_{r_0}} [\theta]_+^2(t)dx \leqslant \frac{1}{64}. \tag{3.100}$$

注意到这里选取的 δ^* 不依赖于 ε_1, 因此可以假设 $\varepsilon_1 \ll \delta^*$. 利用 Newton-Leibniz 公式知

$$[\theta^*]_+(z) = [\theta]_+ + \int_0^z \partial_{\bar z}[\theta^*]_+ d\bar z \leqslant [\theta]_+ + \sqrt{z}\Big(\int_0^z |\partial_{\bar z}[\theta^*]_+|^2 d\bar z\Big)^{1/2}.$$

这样, 对任意的 $t - t_0 \leqslant \delta^*$, $t \in I$, $z \leqslant \varepsilon_1^2$ 和任意 x, 有

$$[\theta^*]_+(x,z,t) \leqslant [\theta]_+(x,t) + \varepsilon_1\Big(\int_0^{\varepsilon_1^2} |\partial_z[\theta^*]_+|^2 dz\Big)^{1/2}. \tag{3.101}$$

两边关于 x 在 B_{r_0} 上取 L^2 范数, 进而可见

$$\begin{aligned}\|[\theta^*]_+\|_{L_x^2(B_{r_0})} &\leqslant \|[\theta]_+\|_{L_x^2(B_{r_0})} + \varepsilon_1\|\nabla[\theta^*]_+\|_{L^2_{x,z}(B^*_{r_0})}\\ &\leqslant \frac{1}{8} + \varepsilon_1\sqrt{K}\\ &\leqslant \frac{1}{8} + C\sqrt{\varepsilon_1} \leqslant \frac{1}{4}.\end{aligned} \tag{3.102}$$

因此, 利用 Tchebichev 不等式, 对任意固定的 $z \leqslant \varepsilon_1^2$ 有

$$\Big|\Big\{\ x \in B_{r_0}\ \Big|\ [\theta^*]_+ \geqslant 1\Big\}\Big| \leqslant \frac{\|[\theta^*]_+\|^2_{L^2(B_{r_0})}}{1^2} \leqslant \frac{1}{16}. \tag{3.103}$$

两边再关于 z 在 $[0,\varepsilon_1^2]$ 上积分得

$$\Big|\Big\{\ \dot z \leqslant \varepsilon_1^2, x \in B_{r_0} | [\theta^*]_+(t) \geqslant 1\Big\}\Big| \leqslant \frac{\varepsilon_1^2}{16}, \qquad t - t_0 \leqslant \delta^*,\ \ t \in I. \tag{3.104}$$

首先限制在 $B_{r_0} \times [0,\varepsilon_1^2]$ 上考虑 $|\mathcal{A}(t)|$. 由于 $|\mathcal{C}(t)| \leqslant \varepsilon_1^6$ 有

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}(t)| &\geqslant \Big|\Big\{(x,z) \in B_{r_0} \times [0,\varepsilon_1^2]\ \Big|\ [\theta^*]_+ \leqslant 0\Big\}\Big|\\ &\geqslant |B_{r_0}|\varepsilon_1^2 - \Big|\Big\{(x,z) \in B_{r_0} \times [0,\varepsilon_1^2] \Big| [\theta^*]_+(t) \geqslant 1\Big\}\Big| - |\mathcal{C}(t)|\\ &\geqslant ((2r_0)^d - 1/16)\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1^6 \geqslant \varepsilon_1^2/2, \qquad t - t_0 \leqslant \delta^*,\ \ t \in I.\end{aligned}$$

自然在 $B^*_{r_0}$, 更有

$$|\mathcal{A}(t)| \geqslant \varepsilon_1^2/2, \qquad t - t_0 \leqslant \delta^*,\ \ t \in I.$$

利用 De Giorgi 等周不等式 (3.95) 知

$$|\mathcal{B}(t)| \leqslant \frac{C^*|\mathcal{C}(t)|^{1/2}K^{1/2}}{|\mathcal{A}(t)|} \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}, \qquad t-t_0 \leqslant \delta^*,\ \ t\in I. \tag{3.105}$$

因此, 重新回到 $B^*_{r_0}$ 上, 给出 $|\mathcal{A}(t)|$ 的精确下界估计为

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}(t)| &\geqslant |B^*_{r_0}| - |\mathcal{B}(t)| - |\mathcal{C}(t)| \\ &\geqslant 2^d r_0^{d+1} - C\sqrt{\varepsilon_1} - \varepsilon_1^6 \geqslant 1/4, \quad \forall\ \ t\in[t_0, t_0+\delta^*]\cap I.\end{aligned} \tag{3.106}$$

断言 总存在 $t_1 \in I\cap[t_0+\delta^*/2, t_0+\delta^*]$ 使得 $|\mathcal{A}(t_1)| \geqslant 1/4$ 成立.

事实上, 若 $I\cap[t_0+\delta^*/2, t_0+\delta^*] = \varnothing$, 则应有

$$[t_0+\delta^*/2, t_0+\delta^*] \subset [-4,0]\setminus I,$$

即应有

$$\delta^*/2 \leqslant \varepsilon_1/2.$$

这与条件 $\varepsilon_1 \ll \delta^*$ 相矛盾. 这样, 就能对 t_1 重复上面的过程, 逐次迭代就得到一个单增序列 $\{t_n\}$ 满足

$$t_0 + \frac{n\delta^*}{2} \leqslant t_n \leqslant 0,$$

使得

$$|\mathcal{A}(t)| \geqslant 1/4, \quad t\in[t_n, t_n+\delta^*]\cap I \supset [t_n, t_{n+1}]\cap I.$$

因此, 当 n 充分大时, 就可以推出

$$|\mathcal{A}(t)| \geqslant 1/4, \quad t\in I\cap[-1,0]. \tag{3.107}$$

最后来完成辅助引理的证明. 由等周不等式 (3.95) 知

$$|\mathcal{B}(t)| \leqslant \varepsilon_1^2, \quad t\in I\cap[-1,0] \tag{3.108}$$

因而有

$$\begin{aligned}|\{(x,z,t)\in B^*_{r_0}\times[-1,0]:\theta^*\geqslant 1\}| &\leqslant \int_{I\cap[-1,0]} |\mathcal{B}(t)|dt + |[-4,0]\setminus I|\cdot|B^*_{r_0}| \\ &\leqslant \varepsilon_1^2 + \frac{\varepsilon_1}{2}2^d r_0^{d+1} \leqslant C\varepsilon_1.\end{aligned} \tag{3.109}$$

由于 $[\theta^*-1]_+ \leqslant 1$, 进而又有

$$\int_{B^*_{r_0}\times[-1,0]} [\theta^*-1]_+^2 dxdzdt \leqslant C\varepsilon_1. \tag{3.110}$$

下面建立 θ 相对应的估计. 对任意固定的 t, x, 有

$$\theta - \theta^*(z) = -\int_0^z \partial_{\bar{z}}\theta^* d\bar{z},$$

进而知

$$\begin{aligned}[\theta-1]_+^2 &\leqslant 2\left([\theta^*(z)-1]_+^2 + \left(\int_0^z |\nabla[\theta^*]_+|d\bar{z}\right)^2\right)\\ &\leqslant 2[\theta^*(z)-1]_+^2 + 2z\int_0^z |\nabla[\theta^*]_+|^2 d\bar{z}.\end{aligned}$$

两边关于 z 在 $[0, \sqrt{\varepsilon_1}]$ 上取积分平均得

$$[\theta-1]_+^2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_1}}\int_0^{\sqrt{\varepsilon_1}} [\theta^*-1]_+^2 dz + 2\sqrt{\varepsilon_1}\int_0^{\sqrt{\varepsilon_1}} |\nabla[\theta^*]_+|^2 dz$$

因此, 两边再关于 (x,t) 在 $B_{r_0}\times[-1,0]$ 上积分, 由 (3.90), (3.110) 就得

$$\int_{-1}^0\int_{B_{r_0}} [\theta-1]_+^2 dxdt \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1}. \tag{3.111}$$

6. **振荡引理** (oscillation lemma)

第一个辅助引理本质上建立了, 当 $0\leqslant\theta^*\leqslant 2$ 且在 Q_4^* 上的能量范数非常小, 则在较小的时空方体块 Q_1^* 上 $\theta^*\leqslant 2-\lambda$. 这表明 θ 的振荡实际上是减少的. 现在的目的就是要去掉这个能量范数"充分小"的假设条件. 在第二个辅助引理中证明了, 如果 $\theta^*\leqslant 0$ "占 Q_4^* 的半数以上", 则只需条件 —— 从 $\{\theta^*\leqslant 0\}$ 过渡到 $\{\theta^*\geqslant 1\}$ 有个非常小的 "空间 (room)", 就足以推出 $[\theta^*-1]_+$ 在较小的 Q_1^* 上有任意小的能量范数, 这一结论本质上是由于在起步阶段 $[\theta-1]_+$ 具有充分小的范数. 这最终导致了如下的两分性结果: 或者 θ 的支集本质上减小 (最终能满足引理 3.9 的小条件), 或者 θ 本质上处处都变小 (我们的目标).

命题 3.11 *设速度场 v 满足 (3.51) 或 (3.85), 并且漂移扩散方程 (3.1) 的解 θ 同时满足*

$$\begin{cases}\theta^*\leqslant 2, \quad (x,z,t)\in Q_4^*,\\ \left|\{(x,z,t)\in Q_4^*:\theta^*(x,z,t)\leqslant 0\}\right| \geqslant \dfrac{|Q_4^*|}{2},\end{cases} \tag{3.112}$$

则存在 $\lambda^*>0$ 使得

$$\theta^*\leqslant 2-\lambda^*, \quad (x,z,t)\in Q_{1/8}^*, \tag{3.113}$$

这里 λ^* 仅依赖于维数 d 和常数 C_v.

证明 对于在辅助引理 3.7 中出现的常数 ε_0, 选择 ε_1 满足 $4C\sqrt{\varepsilon_1}\leqslant\varepsilon_0$, 并记 δ_1 是引理 3.9 所确定的依赖于 ε_1 的常数, 进而令

$$K_+ = E\Big(\frac{|Q_4^*|}{2\delta_1}\Big) + 1, \tag{3.114}$$

其中 $E(a)$ 表示实数 a 的整数部分, 则对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant K_+$, 定义

$$\overline{\theta}_k^* = 2(\overline{\theta}_{k-1}^* - 1), \quad \overline{\theta}_0^* = \theta^* \tag{3.115}$$

(这种定义格式与引理 3.9 中的结论相匹配). 由于 $\overline{\theta}_k^* - 2 = 2(\overline{\theta}_{k-1}^* - 2)$, 可见

$$\overline{\theta}_k^* = 2^k(\theta^* - 2) + 2. \tag{3.116}$$

直接验证: $\overline{\theta}_k^*$ 是 (3.1) 的解, 利用 (3.112) 及简单事实

$$\overline{\theta}_k^* \leqslant 0 \Longleftrightarrow \theta^* \leqslant 2(1 - 2^{-k}),$$

直接推出: 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant K_+$ 有

$$\begin{cases} \overline{\theta}_k^* \leqslant 2, & (x,z,t) \in Q_4^*, \\ |\{(x,z,t) \in Q_4^* : \overline{\theta}_k^*(x,z,t) \leqslant 0\}| \geqslant \dfrac{|Q_4^*|}{2}, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k \leqslant K_+. \tag{3.117}$$

情形 I. 首先假设对所有这样的 k 都有

$$|\{(x,z,t) \in Q_4^* \,|\, 0 < \overline{\theta}_k^* < 1\}| \geqslant \delta_1, \tag{3.118}$$

则由 (3.115) 可见

$$\begin{aligned} |\{\overline{\theta}_k^* \leqslant 0\}| \geqslant |\{\overline{\theta}_k^* < 0\}| &= |\{\overline{\theta}_{k-1}^* < 1\}| \\ &= |\{\overline{\theta}_{k-1}^* \leqslant 0\}| + |\{0 < \overline{\theta}_{k-1}^* < 1\}| \\ &\geqslant |\{\overline{\theta}_{k-1}^* \leqslant 0\}| + \delta_1, \end{aligned}$$

进而有

$$|\{\overline{\theta}_k^* \leqslant 0\}| \geqslant |\{\theta^* \leqslant 0\}| + k\delta_1.$$

特别地

$$|\{\overline{\theta}_{K_+}^* \leqslant 0\}| \geqslant |\{\theta^* \leqslant 0\}| + K_+\delta_1 \geqslant \frac{|Q_4^*|}{2} + \frac{|Q_4^*|}{2} = |Q_4^*|,$$

此意味着

$$\overline{\theta}_{K_+}^* \leqslant 0, \quad \text{a.e. } Q_4^*,$$

即 $2^{K_+}(\theta^* - 2) + 2 \leqslant 0$. 换言之, 也就是

$$\theta^* \leqslant 2 - 2^{-K_+}, \quad \text{a.e. } (x,z,t) \in Q_4^*. \tag{3.119}$$

这种情形显然已经达到目标.

情形 II. 如果存在某个 $0 \leqslant k_0 \leqslant K_+$ 使得

$$\left|\left\{ Q_4^* \;\middle|\; 0 < \overline{\theta}_{k_0}^* < 1\right\}\right| \leqslant \delta_1,$$

则利用引理 3.9 可见

$$\int_{Q_1} [\overline{\theta}_{k_0} - 1]_+^2 dxdt + \int_{Q_1^*} [\overline{\theta}_{k_0}^* - 1]_+^2 dxdzdt \leqslant C\sqrt{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{3.120}$$

由 (3.115) 知 $[\overline{\theta}_{k_0+1}^*]_+ = 2[\overline{\theta}_{k_0}^* - 1]_+$, 进而有

$$\int_{Q_1} [\overline{\theta}_{k_0+1}]_+^2 dxdt + \int_{Q_1^*} [\overline{\theta}_{k_0+1}^*]_+^2 dxdzdt \leqslant \varepsilon_0.$$

再利用引理 3.7, 就可以推出

$$[\overline{\theta}_{k_0+1}]_+ \leqslant 2 - \lambda, \quad (x,z,t) \in Q_{1/4}. \tag{3.121}$$

进一步由 (3.116) 得

$$\theta \leqslant 2 - 2^{-(k_0+1)}\lambda \leqslant 2 - 2^{-K_+}\lambda. \tag{3.122}$$

最后, 构造闸函数 b_3 如下:

$$\begin{cases} \Delta b_3 = 0, & (x,z) \in B_{1/4}^*, \\ b_3 = 2, & (x,z) \in \partial B_{1/4}^* \setminus \{x \in B_{1/4}, z = 0\}, \\ b_3 = 2 - 2^{-K_+}\min\{\lambda, 1\}, & (x,z) \in \{x \in B_{1/4}, z = 0\}. \end{cases}$$

则由极大值原理知, 存在 $\lambda^* \in (0, 2^{-K_+}\min\{\lambda, 1\})$ 使得

$$b_3 \leqslant 2 - \lambda^*, \quad (x,z) \in B_{1/8}^*. \tag{3.123}$$

进而由比较原理可见

$$\theta^* \leqslant 2 - \lambda^*, \quad (x,z,t) \in Q_{1/8}^*.$$

7. **定理 3.2 的证明 ($L^\infty \to C^\alpha$ 的提升)**

第一步. 对任意固定的 $t_0 > 0$, 考虑 $t \in [2t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d$, 定义

$$F_0(s,y) = \theta\Big(t + \frac{t_0}{4}s,\ x + \frac{t_0}{4}(y + x_0(s))\Big), \tag{3.124}$$

其中平移的中心轨道是由

$$\begin{cases} \dot{x}_0(s) = \dfrac{1}{|B_4|}\displaystyle\int_{x_0(s)+B_4} v(t + st_0/4, x + yt_0/4)dy, \\ x_0(0) = 0 \end{cases} \tag{3.125}$$

所决定. 由 Cauchy-Lipschitz 定理知 $x_0(s)$ 是唯一确定的粒子轨道. 这样 θ 在 (t,x) 处的 Hölder 连续性就转化为研究 $F_0(s,y)$ 在 $(0,0)$ 处的 Hölder 连续性. 由于 $\theta\in L^\infty([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$, 可以定义

$$\tilde{\theta}_0^*(s,y,z)=\frac{4}{\sup_{Q_4^*}F_0^*-\inf_{Q_4^*}F_0^*}\Big(F_0^*-\frac{\sup_{Q_4^*}F_0^*+\inf_{Q_4^*}F_0^*}{2}\Big), \tag{3.126}$$

$$v_0(s,y)=v(t+st_0/4,x+(y+x_0(s))t_0/4)-\dot{x}_0(s), \tag{3.127}$$

这里 $F_0^*=L(F_0)$ 是 $F_0(s,y)$ 在上半空间上的调和延拓. (3.126) 就保证了

$$|\tilde{\theta}_0^*(s,y,z)|\leqslant 2,\quad (s,y,z)\in Q_4^*,$$

并且 $(\tilde{\theta}_0,v_0)$ 是方程 (3.1) 的解. 事实上, 这只需证明 (F_0,v_0) 是方程 (3.1) 的解, 即

$$\begin{aligned}\partial_sF_0+v_0\cdot\nabla_yF_0&=\frac{t_0}{4}\Big(\partial_t\theta+\dot{x}_0(s)\cdot\nabla_x\theta+(v-\dot{x}_0(s))\cdot\nabla_x\theta\Big)\\&=\frac{t_0}{4}(\partial_t\theta+v\cdot\nabla_x\theta)=-\frac{t_0}{4}\Lambda_x\theta=-\Lambda_yF_0.\end{aligned}$$

与此同时, 由 (3.127) 知, 对任意的 $s\in[-4,0]$ 有

$$\|v_0(s,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}}=\|v(t+st_0/4,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}},\quad 且 \int_{B_4}v_0(s,y)dy=0.$$

对 $k\in\mathbb{Z}^+$, 归纳地定义如下:

$$\begin{aligned}&F_k(s,y)=F_{k-1}(\mu s,\mu(y+x_k(s))),\\&\tilde{\theta}_k^*(s,y,z)=\frac{4}{\sup_{Q_4^*}F_k^*-\inf_{Q_4^*}F_k^*}\Big(F_k^*-\frac{\sup_{Q_4^*}F_k^*+\inf_{Q_4^*}F_k^*}{2}\Big),\\&\dot{x}_k(s)=\frac{1}{|B_4|}\int_{x_0(s)+B_4}v_{k-1}(\mu s,\mu y)dy,\\&x_k(0)=0,\\&v_k(s,y)=v_{k-1}\big(\mu s,\mu(y+x_k(s))\big)-\dot{x}_k(s),\end{aligned}$$

其中 μ 是待定常数. 由上面构造过程及构造形式知

$$|\tilde{\theta}_k^*|\leqslant 2,\quad \int v_kdy=0,$$

且可以归纳地证明

$$\|v_k(s,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}}=\|v_{k-1}(\mu s,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}}=\|v(t+\mu^kst_0/4,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}}.$$

同时可以证明 $(\tilde{\theta}_k, v_k)$ 是方程 (3.1) 的解. 事实上, 假设 $(\tilde{\theta}_{k-1}, v_{k-1})$ 是方程 (3.1) 的解, 要证明 $(\tilde{\theta}_k, v_k)$ 满足方程 (3.1), 只需验证 (F_k, v_k) 是方程 (3.1) 的解, 即

$$\begin{aligned}\partial_s F_k + v_k \cdot \nabla_y F_k &= \mu\Big(\partial_s F_{k-1} + \dot{x}_k(s)\cdot\nabla F_{k-1} + (v_{k-1} - \dot{x}_k(s))\cdot\nabla F_{k-1}\Big)\\ &= \mu(\partial_s F_{k-1} + v_{k-1}\cdot\nabla F_{k-1}) = -\mu\Lambda F_{k-1} = -\Lambda_y F_k.\end{aligned}$$

第二步. 对任意的 k, 应用振荡引理 3.11, 如果

$$\Big|\Big\{\ \tilde{\theta}_k^* \leqslant 0\ \Big\}\Big| \geqslant \frac{1}{2}|Q_4^*| \quad \Big(\text{或 } |\{-\tilde{\theta}_k^* \leqslant 0\}| \geqslant \frac{1}{2}|Q_4^*|\Big),$$

就可以推出

$$\tilde{\theta}_k^* \leqslant 2 - \lambda^* \quad (\text{或 } -\tilde{\theta}_k^* \leqslant 2 - \lambda^*), \quad (t, x, z) \in Q_{1/8}^*.$$

再由 $|\theta_k^*| \leqslant 2$, 总有

$$\Big|\sup_{Q_{1/8}^*} \tilde{\theta}_k^* - \inf_{Q_{1/8}^*} \tilde{\theta}_k^*\Big| \leqslant 4 - \lambda^*. \tag{3.128}$$

由 $\tilde{\theta}_k^*$ 的表达式知

$$\sup_{Q_{1/8}^*} \tilde{\theta}_k^* - \inf_{Q_{1/8}^*} \tilde{\theta}_k^* = \frac{4}{\sup_{Q_4^*} F_k^* - \inf_{Q_4^*} F_k^*}\Big(\sup_{Q_{1/8}^*} F_k^* - \inf_{Q_{1/8}^*} F_k^*\Big) \leqslant 4 - \lambda^*,$$

进而得

$$\sup_{Q_{1/8}^*} F_k^* - \inf_{Q_{1/8}^*} F_k^* \leqslant \Big(1 - \frac{\lambda^*}{4}\Big)\Big(\sup_{Q_4^*} F_k^* - \inf_{Q_4^*} F_k^*\Big).$$

由 F_k^* 的表达式, 进一步有

$$\begin{aligned}&\sup_{(s,y,z)\in Q_4^*} F_k^*(s,y,z) - \inf_{(s,y,z)\in Q_4^*} F_k^*(s,y,z)\\ =&\sup_{(s,y,z)\in Q_4^*} F_{k-1}^*(\mu s, \mu y + \mu x_k(s), \mu z) - \inf_{(s,y,z)\in Q_4^*} F_{k-1}^*(\mu s, \mu y + \mu x_k(s), \mu z).\end{aligned}$$

再注意到

$$\begin{aligned}|\dot{x}_k(s)| &\leqslant \frac{1}{|B_4|}\int_{x_k(s)+B_4} |v_{k-1}(\mu s, \mu y)| dy\\ &\leqslant \frac{1}{|B_4|}|B_4|^{1/p'}\Big(\int_{x_k(s)+B_4} |v_{k-1}(\mu s, \mu y)|^p dy\Big)^{1/p}\\ &= |B_4|^{-1/p}\mu^{-d/p}\Big(\int_{\mu x_k(s)+\mu B_4}\Big|v_{k-1}(\mu s, y) - \frac{1}{|\mu B_4|}\int v_{k-1}(\mu s, \bar{y}) d\bar{y}\Big|^p dy\Big)^{1/p}\\ &\leqslant C_p\|v_{k-1}(\mu s, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}}\\ &= C_p\|v(t + \mu^k s t_0/4, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}}.\end{aligned} \tag{3.129}$$

对于 $-4 \leqslant s \leqslant 0$, $y \in B_4$, $p > 1$ 及 $v \in L^\infty([t_0,\infty);\mathrm{BMO})$, 可以选取 μ 充分小使得

$$|\mu y + \mu x_k(s)| \leqslant 4\mu(1 + C_p\|v\|_{L_t^\infty(\mathrm{BMO})}) \leqslant C(p)\mu \leqslant 1/8. \tag{3.130}$$

这样就有

$$\begin{aligned}&\sup_{(s,y,z)\in Q_4^*} F_{k-1}^*(\mu s, \mu y + \mu x_k(s), \mu z) - \inf_{(s,y,z)\in Q_4^*} F_{k-1}^*(\mu s, \mu y + \mu x_k(s), \mu z)\\ \leqslant& \sup_{(s,y,z)\in Q_{1/8}^*} F_{k-1}^*(s,y,z) - \inf_{(s,y,z)\in Q_{1/8}^*} F_{k-1}^*(s,y,z).\end{aligned}$$

进而

$$\sup_{Q_{1/8}^*} F_k^* - \inf_{Q_{1/8}^*} F_k^* \leqslant \Big(1 - \frac{\lambda^*}{4}\Big)\Big(\sup_{Q_{1/8}^*} F_{k-1}^* - \inf_{Q_{1/8}^*} F_{k-1}^*\Big).$$

经由迭代可见

$$\sup_{Q_{1/8}^*} F_k^* - \inf_{Q_{1/8}^*} F_k^* \leqslant \Big(1 - \frac{\lambda^*}{4}\Big)^k\Big(\sup_{Q_{1/8}^*} F_0^* - \inf_{Q_{1/8}^*} F_0^*\Big). \tag{3.131}$$

第三步. 由构造可知

$$\begin{aligned}
F_1^*(s,y,z) &= F_0^*(\mu s, \mu y + \mu x_1(s), \mu z),\\
F_2^*(s,y,z) &= F_1^*(\mu s, \mu y + \mu x_2(s), \mu z) = F_0^*(\mu^2 s, \mu^2 y + \mu^2 x_2(s) + \mu x_1(\mu s), \mu^2 z),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
F_k^*(s,y,z) &= F_{k-1}^*(\mu s, \mu y + \mu x_k(s), \mu z)\\
&= F_0^*\Big(\mu^k s, \mu^k y + \sum_{j=1}^{k} \mu^j x_j(\mu^{k-j}s), \mu^k z\Big)\\
&= \theta^*\Big(t + \mu^k s\frac{t_0}{4}, x + \frac{t_0}{4}\big(\mu^k y + \sum_{0\leqslant j\leqslant k} \mu^j x_j(\mu^{k-j}s)\big), \mu^k z\frac{t_0}{4}\Big).
\end{aligned} \tag{3.132}$$

首先设 $s=0$ 来考虑 θ 在 x 处的 Hölder 连续性. 由 (3.131) 和 (3.132) 知

$$\sup_{y\in B_{1/8}} \theta\Big(t, x + \frac{t_0}{4}\mu^k y\Big) - \inf_{y\in B_{1/8}} \theta\Big(t, x + \frac{t_0}{4}\mu^k y\Big) \leqslant C\Big(1 - \frac{\lambda^*}{4}\Big)^k. \tag{3.133}$$

可以选取 $\alpha > 0$ 使得

$$1 - \frac{\lambda^*}{4} < \mu^\alpha,$$

进而对任意的 $|y_1 - y_2| > 0$, 可以选取合适的 k 满足

$$\Big(\frac{1 - \lambda^*/4}{\mu^\alpha}\Big)^k \leqslant |y_1 - y_2|^\alpha, \quad 或 \quad \Big(1 - \frac{\lambda^*}{4}\Big)^k \leqslant (\mu^k |y_1 - y_2|)^\alpha.$$

这样, 对任意的 $y_1, y_2 \in B_{\frac{1}{8}}$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 与 $\alpha > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\theta\left(t, x+\frac{t_0}{4}\mu^k y_1\right)-\theta\left(t, x+\frac{t_0}{4}\mu^k y_2\right)\right| \\
\leqslant & \sup_{y\in B_{1/8}} \theta\left(t, x+\frac{t_0}{4}\mu^k y\right)-\inf_{y\in B_{1/8}} \theta\left(t, x+\frac{t_0}{4}\mu^k y\right) \\
\leqslant & C(\mu^k|y_1-y_2|)^\alpha.
\end{aligned}$$

现在考虑一般的 $s \in [0, 1/8]$ 与 $y \in B_{1/8}$. 由 (3.129) 及 $x_j(s) = \int_0^s \dot{x}_j(\tau)d\tau$ 得

$$r_k(s) := \sum_{j=0}^{k} \mu^j x_j(\mu^{k-j}s) \leqslant C\sum_{j=0}^{k} \mu^j \mu^{k-j}|s| \leqslant Ck\mu^k|s|.$$

类似地, 可以选取 $\alpha > 0$ 使得

$$1-\frac{\lambda^*}{4} < \mu^\alpha,$$

进而对任意的 $|s_1-s_2|>0, |y_1-y_2|>0$, 可以选取合适的 k 使得

$$\left(\frac{1-\lambda^*/4}{\mu^\alpha}\right)^k \leqslant |s_1-s_2|^\alpha + |y_1-y_2|^\alpha,$$

这里总不妨假设 $\mu^k|y_1-y_2| > 2Ck\mu^k|s_1-s_2|$ 成立, 否则, 可以选取更大的合适的 k 使得满足

$$\left(\frac{1-\lambda^*/4}{\mu^\alpha}\right)^k \leqslant |s_1-s_2|^\alpha.$$

这样, 对于任意的 $(s_1, y_1), (s_2, y_2) \in Q_{1/8}$, 存在 $k \in \mathbb{N}$ 与 $\alpha > 0$ 使得

$$\begin{aligned}
&\left|\theta\left(t+\mu^k s_1\frac{t_0}{4}, x+\frac{t_0}{4}(\mu^k y_1 + r_k(s))\right)-\theta\left(t+\mu^k s_2\frac{t_0}{4}, x+\frac{t_0}{4}(\mu^k y_2 + r_k(s))\right)\right| \\
\leqslant & \sup_{(s,y)\in Q_{\frac{1}{8}}} \theta\left(t+\mu^k s\frac{t_0}{4}, x+\frac{t_0}{4}(\mu^k y + r_k(s))\right) \\
& - \inf_{(s,y)\in Q_{\frac{1}{8}}} \theta\left(t+\mu^k s\frac{t_0}{4}, x+\frac{t_0}{4}(\mu^k y + r_k(s))\right) \\
\leqslant & C(\mu^k|s_1-s_2|)^\alpha + C(\mu^k|y_1-y_2|)^\alpha.
\end{aligned}$$

这也就意味着 θ 在 (t, x) 是 C^α- Hölder 连续的.

8. 高阶正则性

在这一小节, 我们证明解的高阶正则性, 即如下命题:

命题 3.12 设 θ 是如下的方程 (含 Q-G 方程):

$$\begin{cases}\partial_t\theta + u\cdot\nabla\theta + \Lambda\theta = 0, \quad x\in\mathbb{R}^d,\\ \mathrm{div} u = 0, \quad u_j = \overline{R}_j[\theta],\\ \theta(0,x) = \theta_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^d)\end{cases} \tag{3.134}$$

的解, 并且 (由定理 3.3 知) 满足

$$\begin{aligned}\theta &\in L^\infty([0,\infty);L^2)\cap L^2([0,\infty)\times \dot{H}^{1/2})\\ &\quad\cap L^\infty([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d)\cap C^\alpha([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d), \quad \forall t_0>0.\end{aligned} \tag{3.135}$$

则对任意 $\beta<1$ 和 $t_0>0$, 有如下的高阶正则性:

$$\theta\in C^{1,\beta}([t_0,\infty)\times\mathbb{R}^d). \tag{3.136}$$

证明 我们的目的是证明方程的解 θ 在一个固定的点 $y_0=(t_0,x_0)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\subset\mathbb{R}^{d+1}$ 上的高阶正则性. 通过函数变换

$$\theta(t,x)\to\theta\big(t,x+u(t_0,x_0)(t-t_0)\big)-\theta(t_0,x_0),$$

$$u(t,x)\to u(t,x+u(t_0,x_0)(t-t_0))-u(t_0,x_0),$$

使得可以假定

$$\theta(y_0)=0, \quad u(y_0)=0.$$

注意到线性微分方程

$$\partial_t\theta+\Lambda\theta=0$$

的基本解为如下的 Poisson 核

$$P(t,x)=\frac{C_d t}{(|x|^2+t^2)^{\frac{d+1}{2}}}. \tag{3.137}$$

这样, 按照发展方程的半群理论, (3.134) 的解可以表示为

$$\theta(t,x)=P(t,\cdot)*\theta_0(x)-g(t,x), \tag{3.138}$$

其中

$$\begin{aligned}g(t,x)&=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}P(t-t_1,x-x_1)\mathrm{div}\big(u(t_1,x_1)\theta(t_1,x_1)\big)dx_1dt_1\\ &=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\nabla_x\widetilde{P}(y-y_1)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1, \qquad y\triangleq(t,x)\in\mathbb{R}^{d+1},\end{aligned} \tag{3.139}$$

这里 $\widetilde{P}(t,x)$ 是 $P(t,x)$ 的扩张

$$\widetilde{P}(t,x)=\begin{cases} P(t,x), & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

同时, 通过分部积分把导数转移到 $\widetilde{P}$ 上, 这使得

$$\nabla_x\widetilde{P}(t,x)=\begin{cases} \dfrac{Ctx}{(|x|^2+t^2)^{\frac{d+3}{2}}}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases} \tag{3.140}$$

变为奇异积分算子对应的核函数.

第一步. 易见, 对任意的 $t>0$, (3.138) 的第一项是光滑的, 并且仅依赖于初始值. 下面主要考虑第二项 $g(y)$ 的正则性. 对于固定的 $e\in S^{d+1}$ (S^{d+1} 是 $R^{d+1}_{t,x}$ 中的单位球) 及任意 $h>0$, 来考虑 $g(y_0)-g(y_0+he)$. 直接可见

$$\begin{aligned} g(y_0)-g(y_0+he)&=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} Q_0(y_0-y_1,he)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1,\\ &=\int_{B(y_0,10h)\cap\{t_1\geqslant 0\}} Q_0(y_0-y_1,he)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\\ &\quad+\int_{B^c(y_0,10h)\cap\{t_1\geqslant 0\}} Q_0(y_0-y_1,he)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\\ &:=I+II, \end{aligned} \tag{3.141}$$

其中

$$Q_0(y,he)=\nabla_x\widetilde{P}(y)-\nabla_x\widetilde{P}(y+he), \tag{3.142}$$

并且 $B(y_0,10h)$ 是以 y_0 为中心以 $10h$ 为半径的球, 而 $B^c(y_0,10h)$ 是其在 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的补集. 对于 I, 被积部分 Q_0 没有可利用的消失性, 因而只能分开独立估计

$$\begin{aligned} I&=\int_{B(y_0,10h)\cap\{t_1\geqslant 0\}}[\nabla_x\widetilde{P}(y_0-y_1)-\nabla_x\widetilde{P}(y_0+he-y_1)]\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\\ &=\int_{B(y_0,10h)} 1_{\{t_1\geqslant 0\}}\nabla_x\widetilde{P}(y_0-y_1)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\\ &\quad-\int_{B(y_0+he,9h)} 1_{\{t_1\geqslant 0\}}\nabla_x\widetilde{P}(y_0+he-y_1)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\\ &\quad-\int_{B(y_0,10h)\setminus B(y_0+he,9h)} 1_{\{t_1\geqslant 0\}}\nabla_x\widetilde{P}(y_0+he-y_1)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\\ &:=I_1-I_2-I_3. \end{aligned}$$

考虑 I_1. 注意到 $\theta\in C^\alpha((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)(\alpha>0)$, 由奇异积分算子的性质知 $u_j=\overline{R}_j[\theta]\in C^\alpha$. 再结合 $\theta(y_0)=u(y_0)=0$, 可见

$$|u(y_1)\theta(y_1)|=|\big(u(y_1)-u(y_0)\big)\big(\theta(y_1)-\theta(y_0)\big)|\leqslant\min(C|y_1-y_0|^{2\alpha},C). \tag{3.143}$$

再由 (3.140) 知

$$|I_1| \leqslant C \int_{B(y_0,10h)} \frac{1}{|y_1 - y_0|^{d+1-2\alpha}} dy_1 \leqslant Ch^{2\alpha}. \tag{3.144}$$

再考虑 I_2. 注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{B(y_0+he,9h)} 1_{\{t_1 \geqslant 0\}} \nabla_x \widetilde{P}(y_0 + he - y_1) dy_1 \\
=&\int_{B(0,9h)} 1_{\{t_1 \geqslant 0\}} \nabla_x \widetilde{P}(y_1) dy_1 \\
=&C \int_{B(0,9h)} 1_{\{t_1 \geqslant 0\}} \frac{t_1 x_1}{(|x_1|^2 + t_1^2)^{\frac{d+3}{2}}} dx_1 dt_1 \\
=&0.
\end{aligned}$$

因此在 I_2 中加上或减去 $\theta(y_0+he)u(y_0+he)$ 倍乘上面考虑的积分, 不改变其值. 又由于

$$\begin{aligned}
&|\theta(y_1)u(y_1) - \theta(y_0 + he)u(y_0 + he)| \\
\leqslant&|\theta(y_1)(u(y_1) - u(y_0 + he))| + |u(y_0 + he)(\theta(y_1) - \theta(y_0 + he))| \\
\leqslant&|\theta(y_1) - \theta(y_0)||(u(y_1) - u(y_0 + he))| \\
&+ |u(y_0 + he) - u(y_0)||(\theta(y_1) - \theta(y_0 + he))| \\
\leqslant&Ch^\alpha |y_0 + he - y_1|^\alpha.
\end{aligned}$$

进而有

$$|I_2| \leqslant Ch^\alpha \int_{B(y_0+he,11h)} \frac{1}{|y_0 + he - y_1|^{d+1-\alpha}} dy_1 \leqslant Ch^{2\alpha}. \tag{3.145}$$

对于 I_3, 注意到当 $y_1 \in B(y_0, 10h) \setminus B(y_0+he, 9h)$, 有 $|y_0 - y_1| \approx |y_0 + he - y_1| \approx 9h$, 类似于估计 I_1 可见

$$|I_3| \leqslant Ch^{2\alpha}. \tag{3.146}$$

这样, 对于区域 $B(y_0, 10h)$ 的贡献, 有

$$|I| \leqslant Ch^{2\alpha}. \tag{3.147}$$

考虑 $B^c(y_0, 10h)$ 上的积分, 这时可以利用 $\nabla_x \widetilde{P}$ 的消失性. 即对于所有的 $y_1 \in B^c(y_0, 10h)$, 有

$$|\nabla_x \widetilde{P}(y_1) - \nabla_x \widetilde{P}(y_1 + he)| \leqslant C \frac{h}{|y_1 - y_0|^{d+2}}. \tag{3.148}$$

于是, 对所有的 $2\alpha < 1$ 有

$$|II| \leqslant C \int_{|y_1-y_0| \geqslant 10h} \frac{h}{|y_1 - y_0|^{d+2}} |u(y_1)||\theta(y_1)| dy_1$$

$$\leqslant C\int_{|y_1-y_0|\geqslant 10h}\frac{h}{|y_1-y_0|^{d+2-2\alpha}}dy_1$$
$$\leqslant C_\alpha h^{2\alpha}.$$

综上所述知, 若 $\theta\in C^\alpha((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$, $2\alpha<1$, 则有

$$|g(y_0)-g(y_0+he)|\leqslant Ch^{2\alpha}.$$

进而, 用“鞋带提升”手法重复使用上述过程, 最终会得到 $\theta\in C^\alpha$, $\forall\alpha<1$.

第二步. 要得到 θ 的高于 C^1 的正则性, 需要考虑如下的二阶差商:

$$Q_1(y,he)=\nabla_x[\widetilde{P}(y+he)+\widetilde{P}(y-he)-2\widetilde{P}(y)]. \tag{3.149}$$

有

$$g(y_0+he)+g(y_0-he)-2g(y_0)=\int_{\mathbb{R}^{d+1}}1_{\{t_1\geqslant 0\}}Q_1(y_0-y_1,he)u(y_1)\theta(y_1)dy_1. \tag{3.150}$$

注意到

$$Q_1(y,he)=Q_0(y,he)-Q_0(y-he,he),$$

因此, 当 $|y-y_0|\leqslant 20h$ 时, 据上面处理 I 的方法 (最终得到 (3.147)), 并结合 $\theta\in C^\alpha(\alpha<1)$ 的性质就可以推出

$$\left|\int_{B(y_0,20h)}1_{\{t_1\geqslant 0\}}Q_1(y_0-y_1,he)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\right|\leqslant Ch^{2\alpha}. \tag{3.151}$$

对于 $|y-y_0|\geqslant 20h$ 且 $y\notin\mathcal{T}_h=[t_0-h,t_0+h]\times\mathbb{R}^d$, 有

$$|Q_1(y_0-y_1,he)|\leqslant C\frac{h^2}{|y_0-y_1|^{d+3}}. \tag{3.152}$$

因此对所有的 $\alpha<1$, 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|y_1-y_0|\geqslant 20h,y\notin\mathcal{T}_h}1_{\{t_1\geqslant 0\}}Q_1(y_0-y_1,he)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\right|\\ \leqslant& C\int_{|y_1-y_0|\geqslant 20h}\frac{h^2}{|y_1-y_0|^{d+3}}|y_1-y_0|^{2\alpha}dy_1\\ \leqslant& Ch^{2\alpha}.\end{aligned} \tag{3.153}$$

下面仅需估计在 $\mathcal{T}_h\setminus B(y_0,20h)$ 积分区域上的贡献. 由 Q_1 的表达式

$$Q_1(y_1-y_0,he)=Q_0(y_1-y_0,he)-Q_0(y_1-y_0-he,he),$$

及 Q_0 的估计可见

$$\left|Q_1(y_1-y_0,he)\right| \leqslant C\frac{h}{|y_1-y_0|^{d+2}} \leqslant C\frac{h}{|x_1-x_0|^{d+2}}. \tag{3.154}$$

又注意到在 $\mathcal{T}_h \setminus B(y_0,20h)$ 上, $|x_1-x_0| \geqslant |y_1-y_0|-|t_1-t_0| \geqslant 19h$. 因此对所有的 $\alpha<1$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{|y_1-y_0|\geqslant 20h, y\in\mathcal{T}_h} 1_{\{t_1\geqslant 0\}} Q_1(y_0-y_1,he)\cdot u(y_1)\theta(y_1)dy_1\right| \\
\leqslant & C\int_{t_0-h}^{t_0+h}\int_{|x_1-x_0|\geqslant 19h}\frac{h}{|x_1-x_0|^{d+2-2\alpha}}ddt_1 \\
\leqslant & C\frac{1}{h^{1-2\alpha}}\int_{t_0-h}^{t_0+h} dt_1 \leqslant Ch^{2\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.155}$$

综上就给出了 $\theta\in C^{1,\beta}$, $\beta<1$.

9. *弱解的存在性*

在此小节中给出方程 (3.1) 的满足截断能量不等式 (3.3) 的逼近解的存在性. 把区域限制在 $B_1\times[0,\infty]$ 上 (这里 $B_1=[-1,1]^d$), 并在 (3.1) 中增加人为耗散项 $-\varepsilon\Delta\theta$. 首先需要给出全局算子 Λ 作用于 θ 后在区域 B_1 上的合适意义. 记 λ_k^2 与 $\sigma_k(x)$ 满足

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_k+\lambda_k^2\sigma_k=0, &\qquad x\in B_1,\\
\sigma_k|_{\partial B_1}=0 &
\end{aligned} \tag{3.156}$$

是 Laplace 算子的第 k 个特征值与第 k 个特征函数. 注意到

$$\sigma_k^*(x,z)=\sigma_k(x)e^{-\lambda_k z} \tag{3.157}$$

是 σ_k 在半无限柱体 $Q_1=B_1\times[0,\infty]$ 上的调和扩张, 并且在侧边界上取 0 值, 在底边上有

$$\partial_\nu\sigma_k^*(x,0)=-\frac{\partial}{\partial z}\sigma_k^*(x,z)|_{z=0}=\lambda_k\sigma_k(x), \tag{3.158}$$

其中 ∂_ν 是法向导数; 同时, 由 Green 公式可见

$$\int_{B_1}\sigma_k\Lambda\sigma_k dx=\int_{B_1}\lambda_k\sigma_k^2dx=\int_{\partial Q_1}\sigma_k^*\partial_\nu\sigma_k^*dx=\int_{Q_1}|\nabla\sigma_k^*|^2dxdz, \tag{3.159}$$

并且只需 $\sum\limits_k f_k^2\lambda_k$ 收敛, $g=\sum\limits_k f_k\sigma_k\in\dot{H}^{1/2}(B_1)$. 事实上, 由 σ_k 在 L^2 中的标准正交性知

$$\|g\|_{\dot{H}^{1/2}(B_1)}^2=\int_{B_1}g(x)\Lambda g(x)dx=\int_{B_1}\Big(\sum_k f_k\sigma_k(x)\Big)\cdot\Big(\sum_k f_k\lambda_k\sigma_k(x)\Big)dx$$

$$= \sum_k f_k^2 \lambda_k \int_{B_1} \sigma_k^2 dx = \sum_k f_k^2 \lambda_k.$$

现在致力于在 $[0,\infty) \times B_1$ 上求解正则化方程

$$\partial_t \theta + \operatorname{div}(v\theta) = \varepsilon \Delta \theta - \Lambda \theta, \tag{3.160}$$

这里 Λ 被理解为算子

$$\Lambda \sigma_k = \lambda_k \sigma_k = \partial_\nu \sigma_k^*|_{z=0}. \tag{3.161}$$

首先不妨设 $v \in L^\infty$, $\operatorname{div} v = 0$, 则可以直接应用 Galerkin 方法: 把 (3.160) 限制在 σ_k, $1 \leqslant k \leqslant k_0$ 上求解, 亦即对于方程 (3.160) 与 σ_k, $1 \leqslant k \leqslant k_0$ 作 L^2 内积得到的新方程, 寻求满足如下形式:

$$\theta = \theta_{\varepsilon,k_0} = \sum_{k=1}^{k_0} f_k(t)\sigma_k(x) \tag{3.162}$$

的解. 容易看出 $f_k(t)$ 满足如下的常微分方程:

$$\begin{cases} f_k'(t) = -[\varepsilon\lambda_k^2 + \lambda_k] f_k(t) + \displaystyle\sum_{l=1}^{k_0} a_{k,l} f_l(t), \quad 1 \leqslant k \leqslant k_0, \\ f_k(0) = \displaystyle\int_{B_1} \theta_0(x)\sigma_k(x)dx, \end{cases} \tag{3.163}$$

其中

$$a_{k,l} = \int_{B_1} v(t,x) \cdot \nabla \sigma_k(x) \sigma_l(x) dx, \quad 1 \leqslant k,l \leqslant k_0.$$

由于 $\operatorname{div} v = 0$, 易见矩阵 $(a_{k,l})$ 是反对称矩阵. 这就导致了如下估计:

$$\sum_{k=1}^{k_0} f_k^2(t_2) + 2\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{k_0} (\varepsilon\lambda_k^2 + \lambda_k) f_k^2(s) ds = \sum_{k=1}^{k_0} f_k^2(t_1), \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2. \tag{3.164}$$

特别地, θ_{ε,k_0} 满足如下的能量不等式:

$$\begin{aligned} &\|\theta_{\varepsilon,k_0}(t_2)\|_{L^2(B_1)}^2 + 2\int_{t_1}^{t_2} \left(\|\theta_{\varepsilon,k_0}(s)\|_{\dot{H}^{1/2}(B_1)}^2 + \varepsilon \|\theta_{\varepsilon,k_0}(s)\|_{\dot{H}^1(B_1)}^2 \right) ds \\ &\quad = \|\theta_{\varepsilon,k_0}(t_1)\|_{L^2(B_1)}^2. \end{aligned} \tag{3.165}$$

注意到这里我们理解 $\dot{H}^{1/2}(B_1)$ 是在 θ 到上半空间的柱体 $B_1 \times [0,\infty)$ 的调和延拓的意义下的, 即有

$$\|\theta^*\|_{\dot{H}^1(B_1\times[0,\infty))} \leqslant \|\theta\|_{\dot{H}^{1/2}(B_1)},$$

其中

$$\theta^* = \theta^*_{\varepsilon,k_0} = \sum_{k=1}^{k_0} f_k(t)\sigma_k(x)e^{-\lambda_k z}.$$

考察当 $k_0 \to \infty$ 时的收敛问题. 记 θ_ε 是 θ_{ε,k_0} 在 L^2 下的极限 (实际上是强极限). 如果用函数

$$\gamma \in L^\infty([0,T];L^2(B_1)) \cap L^2([0,T];\dot{H}^1(B_1)) \tag{3.166}$$

(在 L^2 内积下) 去测试 θ_{ε,k_0}, 由于 θ_{ε,k_0} 在 $L^2(B_1\times[0,\infty))$ 上强收敛, 因此可以对积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_1} \nabla\gamma\cdot v\theta_{\varepsilon,k_0}dxds \tag{3.167}$$

取极限. 特别地, 取

$$\gamma = [\theta_\varepsilon - \lambda]_+ \equiv \theta_{\varepsilon,\lambda}$$

(显然 (3.166) 成立), 就有 (3.167) 收敛于

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_1} \nabla\frac{[\theta_{\varepsilon,k_0}]^2}{2}\cdot vdxds = 0, \tag{3.168}$$

其中最后一步用到了 v 的自由散度性质. 这就导致了如下推论:

推论 3.13　*θ_ε 满足定理 3.1 的假设条件 (不依赖于 ε), 并且进而有*

$$\|\theta_\varepsilon(T)\|_{L^\infty(B_1)} \leqslant \frac{C}{T^{d/2}}\|\theta_\varepsilon(0)\|_{L^2(B_1)} \leqslant \frac{C}{T^{d/2}}\|\theta_0\|_{L^2(B_1)}. \tag{3.169}$$

推论 3.14　*弱解的存在性定理 (即推论 3.13) 对于 $v\in L^2([0,T]\times B_1)$ 仍然成立, 并且不依赖于 v 的 L^2 范数.*

证明　可以通过磨光化来逼近 v, 即考虑 $v_\delta = J_\delta v$. 显然, 上面的论述都成立, 并且由 v 的自由散度条件知这些估计都不依赖于 δ. □

推论 3.15　*对于 $\theta_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$, 弱解的存在性定理 (即推论 3.13) 在 $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ 上亦成立, 这里 $T>0$ 任意.*

证明　可以通过重新调整前面的定理来应用于方体 $B_M = [-M,M]^d$ 上, 只要作如下变换 (这里省略了 ε):

$$\overline{\theta}(t,x) = M^{d/2}\theta(Mt,Mx) \equiv M^{d/2}\theta(s,y),$$
$$\overline{v}(t,x) = M^{d/2}v(Mt,Mx) \equiv M^{d/2}v(s,y)$$

即可. 显然, 对任意的 $y\in B_M$, 有 $x\in B_1$, 且只要 $v\in L^2(B_M)$ 且自由散度, 对 $\overline{\theta}(t,x)$ 就可以应用推论 3.13. 由于此变换保持 L^2 范数不变, 因此

$$\sup_{B_M} M^{d/2}\theta(s,y) \leqslant \frac{C}{(s/M)^{d/2}},$$

或

$$\sup_{B_M} \theta(s, y) \leqslant \frac{C}{s^{d/2}}.$$

再令 $M \to \infty$ 就得到所需要的结果. □

注记 3.10 由于所有的估计均不依赖于 ε, 因而可以取 $\varepsilon \to 0$ 获得极限方程的弱解, 并且它还满足截断的能量不等式.

注意到相同的方法可以应用到高阶正则性. 事实上, 高阶正则性的证明仅仅依赖于 ε- 正则化的方程所满足的截断形式的局部化能量不等式 (不依赖于 ε 的). 因此, 可以通过取 $\varepsilon \to 0$, 就可获得极限问题的经典解.

第 6 章　可压的 Navier-Stokes 方程

6.1　引　　言

本章考虑 $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n (n=2,3)$ 上可压的 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \nabla P(\rho) = 0, \\ (\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $\rho(t,x)$ 与 $u(t,x)$ 分别表示流体的密度与速度, 压力 $P = P(\rho)$ 是密度 ρ 的一个适当的光滑函数, Lamé 系数 μ 与 λ 满足

$$\mu > 0, \quad 及\ \lambda + 2\mu > 0, \tag{1.2}$$

它确保了 $\mu\Delta + (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div}$ 是椭圆型算子.

1962 年, Nash [Nash] 在初始密度不具真空情形下, 建立了可压的 Navier-Stokes 方程 (1.1) 光滑解的局部适定性. 随后, Matsumura 与 Nishida [Mat-N] 在 1979 年证明了在平衡态附近光滑小解的整体适定性. 辛周平 [Xin] 1998 年证明了当初始密度具有紧支集时, 光滑解在有限时刻产生 Blow-up 现象. 最近, 对于任意的大初值, Lions [Lions] 证明了问题 (1.1) 整体弱解的存在性. 然而, 弱解的唯一性仍然是一个公开问题, 即使对于二维的情形仍然如此.

在确保唯一性的前提下, 寻求尽可能大的初始函数空间及相应的工作空间来求解可压的 Navier-Stokes 方程 (1.1) 是件自然的事情. 对于不可压的 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(x,0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

而言, Fujita-Kato [FK1] 率先给出了一个研究方法, 证明了 (1.3) 在齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}$ 中小解的整体适定性. 事实上, 对于大多数的齐次临界空间而言,(1.3) 对应的小初值问题的解同样是整体适定的. 为了说明问题, 现给出一般的临界空间的定义.

若 (u,p) 是 Cauchy 问题 (1.3) 的一个解, 那么

$$\big(u_\lambda(t,x),p_\lambda(t,x)\big)\triangleq\big(\lambda u(\lambda^2t,\lambda x),\lambda^2p(\lambda^2t,\lambda x)\big) \tag{1.4}$$

仍然是问题 (1.3) 的一个解. 如果 $\|\cdot\|_X$ 在尺度变换 (1.4) 下保持不变, 就称函数空间 X 是临界空间. 显然, 对于可压的 Navier-Stokes 方程 (1.1), 没有严格意义下保持方程不变的尺度变换. 但是, 作为类比, 也可以引入拟尺度变换来进行类似的数学分析. 容易验证, 如果 (ρ,u) 是可压的 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题 (1.1) 的一个解, 那么

$$\big(\rho_\lambda(t,x),u_\lambda(t,x)\big)\triangleq\big(\rho(\lambda^2t,\lambda x),\lambda u(\lambda^2t,\lambda x)\big),\quad P\longrightarrow\lambda^2P$$

也是 Cauchy 问题 (1.1) 的一个解, 这就启发我们引入如下定义:

定义 1.1　称函数空间 X 是关于 (1.1) 的临界空间, 如果 $\|\cdot\|_X$ 在变换

$$(\rho,u)\longrightarrow(\rho_\lambda,u_\lambda)\triangleq\big(\rho(\lambda^2t,\lambda x),\lambda u(\lambda^2t,\lambda x)\big)$$

下保持不变 (或在相差一个不依赖于 λ 的常数倍意义下).

按照上述定义, 一个自然的选择是齐次 Sobolev 空间 $\dot H^{\frac n2}\times\big(\dot H^{\frac n2-1}\big)^n$. 然而, $\dot H^{\frac n2}\not\hookrightarrow L^\infty$, 在 $\rho_0-\bar\rho\in\dot H^{\frac n2}$ 条件下, 我们不能期望给出密度函数的点态估计, 即 L^∞ 范数估计. 作为替代, 对于某个 $\bar\rho$, 选择初始函数 (ρ_0,u_0) 满足

$$(\rho_0-\bar\rho,u_0)\in\dot B^{\frac n2}_{2,1}\times\big(\dot B^{\frac n2-1}_{2,1}\big)^n,$$

这是保持同度及嵌入关系 $\dot B^{\frac n2}_{2,1}\hookrightarrow L^\infty$ 的选择. Danchin[Dan2] 证明了问题 (1.1) 在临界空间 $\dot B^{\frac n2}_{2,1}\times\big(\dot B^{\frac n2-1}_{2,1}\big)^n$ 中小解的整体适定性, 具体地讲, 证明了如下结论:

定理 1.1　设 $\bar\rho>0$ 满足 $P'(\bar\rho)>0$. 存在两个正常数 c 与 M 使得对于所有的 (ρ_0,u_0) 满足

$$(\rho_0-\bar\rho,u_0)\in\dot{\mathcal B}^{\frac n2-1,\frac n2}\times\dot B^{\frac n2-1}_{2,1},\quad 且\ \|\rho_0-\bar\rho\|_{\dot{\mathcal B}^{\frac n2-1,\frac n2}}+\|u_0\|_{\dot B^{\frac n2-1}_{2,1}}\leqslant c.$$

则问题 (1.1) 存在唯一的解 (ρ,u) 满足 $(\rho-\bar\rho,u)\in F^{\frac n2}$ 及

$$\|(\rho_0-\bar\rho,u)\|_{F^{\frac n2}}\leqslant M\big(\|\rho_0-\bar\rho\|_{\dot{\mathcal B}^{\frac n2-1,\frac n2}}+\|u_0\|_{\dot B^{\frac n2-1}_{2,1}}\big),$$

这里

$$F^s\triangleq L^1(\mathbb R^+;\dot{\mathcal B}^{s+1,s})\cap C(\mathbb R^+;\dot{\mathcal B}^{s-1,s})\times\Big(L^1(\mathbb R^+;\dot B^{s+1}_{2,1})\cap C(\mathbb R^+;\dot B^{s-1}_{2,1})\Big)^n.$$

空间 $\dot{\mathcal B}^{s,\sigma}$ 的具体定义可以参见 6.2 节.

另一方面, Weissler [We1] 将 Fujita-Kato 型的结果推广到临界 Lebesgue 空间 L^n, Cannone [Can1-Can2] 进而将这一结果推广到具有负正则指标的临界 Besov 空间, 使得初值状态空间可以容许具有自相似结构的初值 (仅需放宽适定性定义中强意义下的连续依赖形式), 这样就可以获得具有重要物理意义的自相似解. 具体地说, 他证明了存在某个适当小的常数 c, 只要初始函数 u_0 满足

$$\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{n}{p}}_{p,\infty}} \leqslant c, \quad p > n,$$

Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题 (1.3) 就是整体适定的, 其中连续依赖是在弱意义下的连续依赖. 需要指出的是, 初始状态空间不仅包含物理空间中熟知的具有自相似结构的初值函数, 同时也包括具有高振荡的初值函数, 这类初值在临界空间 $\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}$ 或 L^n 中的范数可以充分大! 因此, Cannone 构造了 $\dot{H}^{\frac{n}{2}-1}$ 或 L^n 中具有高振荡初值的大解的整体存在性. 事实上, 容易构造具有高振荡初值函数如下:

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{x_3}{\varepsilon}\right)(-\partial_2\phi(x), \partial_1\phi(x), 0),$$

这里 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\varepsilon > 0$ 充分小. 一个重要的问题是对于具有高振荡的初始函数, 是否可以证明可压 Navier-Stokes 的 Cauchy 问题 (1.1) 是整体适定的?

对于函数空间熟悉的读者立即就会意识到, 解决这一问题的关键是将 Danchin 的定理 1.1 推广到具有负正则指标的临界空间, 这样的临界空间可以确保具高振荡的初值在负指数的临界空间的范数下充分小. 与 Cannone 在研究不可压 Navier-Stokes 方程是所用到的空间类似, 我们期待如下函数空间:

$$\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1} \times (\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})^n, \qquad \forall p > n$$

是研究可压 Navier-Stokes 方程具高振荡的初值问题的合适的状态空间. 分析 Danchin 给出的定理 1.1 的证明, 容易看出在 L^2 框架下, 频段层次的能量估计既可以方便地捕获方程组的光滑效应与阻尼效应, 同时也可以充分利用其耦合结构. 然而, 当 $p > 2$ 时, 很难像 L^2 框架一样利用耦合结构, Danchin [CMZ7] 的方法就不再适用了. 本章以 Chen-Miao-Zhang 在 [CM27] 中发展的一个基于线性化方程的 Green 矩阵在不同频率上特性的新方法基础, 在 Hybrid-Besov 空间中研究 Navier-Stokes 的 Cauchy 问题 (1.1) 是整体适定性.

问题的转化 记

$$a(t,x) \triangleq \frac{\rho(\varpi^{-2}t, \varpi^{-1}x)}{\bar{\rho}} - 1, \quad v(t,x) \triangleq \varpi^{-1}u(\varpi^{-2}t, \varpi^{-1}x), \quad \varpi \triangleq (P'(\bar{\rho}))^{\frac{1}{2}}.$$

则 Cauchy 问题 (1.1) 可以写成

$$
\begin{cases}
\partial_t a + v \cdot \nabla a + \mathrm{div} v = -a \mathrm{div} v, \\
\partial_t v + v \cdot \nabla v - \mathcal{A} v + \nabla a = -L(a)\mathcal{A} v - K(a)\nabla a, \\
(a, v)|_{t=0} = (a_0, v_0),
\end{cases}
\tag{1.5}
$$

这里

$$
\mathcal{A} = \bar{\mu}\Delta + (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\nabla \mathrm{div}, \quad K(a) = \frac{P'(\bar{\rho}(1+a))}{(1+a)P'(\bar{\rho})} - 1, \quad L(a) = \frac{a}{1+a},
$$

相应的参数是

$$
\bar{\mu} = \frac{\mu}{\bar{\rho}}, \qquad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\bar{\rho}}.
$$

记

$$
d \triangleq \Lambda^{-1} \mathrm{div} v, \quad \Omega \triangleq \Lambda^{-1} (\widetilde{\mathrm{curl}} v)^i_j.
$$

根据

$$
\Delta v^i = \partial_i \mathrm{div} v + \partial_j (\widetilde{\mathrm{curl}}\, v)^i_j, \quad \text{其中 } (\widetilde{\mathrm{curl}} v)^i_j = \partial_j v^i - \partial_i v^j,
$$

就可以看出 (a, d, Ω) 满足

$$
\begin{cases}
\partial_t a + \Lambda d + v \cdot \nabla a = F, \\
\partial_t d - \bar{\nu}\Delta d - \Lambda a + v \cdot \nabla d = G, \\
\partial_t \Omega - \bar{\mu}\Delta\Omega = H, \\
(a, d, \Omega)|_{t=0} = (a_0, \Lambda^{-1}\mathrm{div} v_0, \Lambda^{-1}\widetilde{\mathrm{curl}} v_0),
\end{cases}
\tag{1.6}
$$

这里 $\bar{\nu} = 2\bar{\mu} + \bar{\lambda}$ 及

$$
\begin{aligned}
&F = -a \mathrm{div} v, \\
&G = v \cdot \nabla d - \Lambda^{-1}\mathrm{div}\big(v \cdot \nabla v + L(a)\mathcal{A} v + K(a)\nabla a\big), \\
&H = -\Lambda^{-1}\mathrm{curl}\big(v \cdot \nabla v + L(a)\mathcal{A} v\big), \\
&v = -\Lambda^{-1}\nabla d - \Lambda^{-1}\mathrm{div}\Omega.
\end{aligned}
$$

方法的说明　为了阐述 Chen-Miao-Zhang [CMZ7] 的方法. 首先考察 (1.6) 的具对流项的线性化方程:

$$
\begin{cases}
\partial_t a + \Lambda d = -v \cdot \nabla a + F, \\
\partial_t d - \bar{\nu}\Delta d - \Lambda a = -v \cdot \nabla d + G, \\
(a, d)|_{t=0} = (a_0, d_0),
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

这里 $\Lambda = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. 设 $\mathcal{G}(x, t)$ 是线性方程组

$$
\begin{cases}
\partial_t a + \Lambda d = 0, \\
\partial_t d - \bar{\nu}\Delta d - \Lambda a = 0
\end{cases}
$$

对应的 Green 矩阵, 则 (1.7) 的解 (a,d) 可以表示成如下形式:

$$\begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} = \mathcal{G}(x,t) * \begin{pmatrix} a_0 \\ d_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{G}(x,t-\tau) * \begin{pmatrix} F - v\cdot\nabla a \\ G - v\cdot\nabla d \end{pmatrix} d\tau. \tag{1.8}$$

为了获得 (a,d) 在 Besov 空间中的估计, 自然要研究 Green 矩阵 $\mathcal{G}(x,t)$ 在频率空间的局部化, 即其 Fourier 变换支撑在环 $\mathcal{C}$ 上的性质. 类似于第 1 章热算子半群的的局部化估计

$$\operatorname{supp}\hat{f} \subset \lambda\mathcal{C} \Longrightarrow \|e^{t\Delta}f\|_{L^p} \leqslant Ce^{-ct\lambda^2}\|f\|_{L^p}, \quad t>0, \quad \lambda>0, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty$$

在 Cannone 等的工作中所扮演的角色, 欲获得 $\mathcal{G}(x,t)$ 的局部化估计, 必须研究 $\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)$ 的点态估计与行为. 粗略地讲, 对于低频部分 $|\xi|\lesssim 1$, $\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)$ 的行为类似于热核, 即

$$|D_\xi^\alpha \widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)| \leqslant Ce^{-\vartheta|\xi|^2 t}(1+|\xi|)^{|\alpha|}(1+t)^{|\alpha|},$$

此意味着

$$\|\mathcal{G} * f\|_{L^2} \leqslant Ce^{-ct\lambda^2}\|f\|_{L^2}, \qquad \operatorname{supp}\hat{f}\subset\lambda\mathcal{C}, \quad \lambda\lesssim 1. \tag{1.9}$$

对于 $|\xi|\gg 1$, $\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)$ 具有如下精确的展开:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t) = e^{-\bar{\nu}^{-1}t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-\bar{\nu}|\xi|^2 t}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ + \widehat{\mathcal{G}}^1(\xi,t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \widehat{\mathcal{G}}^2(\xi,t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

这里 $\widehat{\mathcal{G}}^1$ 与 $\widehat{\mathcal{G}}^2$ 满足估计

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha \widehat{\mathcal{G}}^1| &\leqslant C|\xi|^{-|\alpha|-1}\big(e^{-\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}} + e^{-\vartheta|\xi|^2 t}\big), \\ |\partial_\xi^\alpha \widehat{\mathcal{G}}^2| &\leqslant C|\xi|^{-|\alpha|-2}\big(e^{-\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}} + e^{-\vartheta|\xi|^2 t}\big).\end{aligned}$$

由此就推出对于任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 成立估计

$$\|\mathcal{G}^1 * f\|_{L^p} \leqslant C\lambda^{-1}e^{-ct}\|f\|_{L^p}, \quad \|\mathcal{G}^2 * f\|_{L^p} \leqslant C\lambda^{-2}e^{-ct}\|f\|_{L^p},$$

$$\operatorname{supp}\hat{f}\subset\lambda\mathcal{C}, \quad \lambda\gg 1. \tag{1.10}$$

由于 $\mathcal{G}$ 在高频和低频具有不同的行为, 自然就启发我们引入 Hybrid-Besov 空间. 事实上, 从估计 (1.8), (1.9) 与 (1.10), 容易获得如下在 Hybrid-Besov 空间框架下的估计: 对于任意的 $1\leqslant r\leqslant\infty$,

$$
\begin{aligned}
&\|a\|_{\widetilde{L}_T^r(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1+\frac{2}{r},s})}+\|d\|_{\widetilde{L}_T^r(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1+\frac{2}{r},s-1+\frac{2}{r}})}\\
\leqslant& C\Big[\|a_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s}}+\|d_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}}+\|F\|_{L_T^1(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s})}+\|G\|_{L_T^1(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1})}\\
&+\|v\cdot\nabla a\|_{L_T^1(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s})}+\|v\cdot\nabla d\|_{L_T^1(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1})}\Big],
\end{aligned}\tag{1.11}
$$

这里 $s_p\triangleq s-\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{2}$. 我们观察到, 如果选取 $s=\dfrac{n}{p}$, $p>n$, d_0 的高频部分对应的正则性指标 $s-1$ 小于零, 这就确保当 d_0 具有高振荡时, d_0 在 Hybrid-Besov 空间 $\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}$ 范数意义下很小, 详见命题 2.3.

不幸的是估计 (1.11) 式并不能直接应用到可压 Navier-Stokes 方程 (1.1) 的高振荡初值问题. 事实上, 如果将对流项 $v\cdot\nabla a$ 视为扰动部分, 无论 v 多么光滑, 函数 a 均有一阶导数损失! 为了克服这个困难, 需要求助于 Lagrange 坐标变换, 使得在新的系统 (1.7) 下, 对流项在不计出现一个交换子的意义下消失. 这个思想可见第 3 章与第 4 章的讨论.

记 $s_p\triangleq s-\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{2}$, 定义工作空间如下:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}^s\triangleq\Big\{&(a,d)\in\Big(L^1(\mathbb{R}^+;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p+1,s})\cap C(\mathbb{R}^+;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s})\Big)\\
&\times\Big(L^1(\mathbb{R}^+;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p+1,s+1})\cap C(\mathbb{R}^+;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1})\Big)^n\Big\}.
\end{aligned}
$$

本章的主要目的就是要证明如下定理:

定理 1.2　设 $\bar\rho$ 是满足 $P'(\bar\rho)>0$ 的正常数. 存在两个正数 η 与 M 使得对于所有的满足 $\rho_0-\bar\rho\in\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}$, $u_0\in\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}$ 与

$$
\|\rho_0-\bar\rho\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}+\|u_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\leqslant\eta \tag{1.12}
$$

的初值 (ρ_0,u_0), 成立如下结果:

(1) 存在性. 若 $2\leqslant p<2n$, $p\leqslant\min\left(4,\dfrac{2n}{n-2}\right)$, 则 Cauchy 问题 (1.1) 存在一个整体解 $(\rho-\bar\rho,u)\in\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}$ 满足

$$
\|(\rho-\bar\rho,u)\|_{\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}}\leqslant M\big(\|\rho_0-\bar\rho\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}+\|u_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\big).
$$

(2) 唯一性. 若 $2\leqslant p\leqslant n$, 则上面获得的解在 $\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}$ 中是唯一的.

注记 1.1　(i) 与 Danchin 的定理 1.1 相比较, 定理 1.2 可以容许具高振荡的初始函数 u_0, 例如

$$
u_0(x)=\sin\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\phi(x),\quad \phi(x)\in(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^n,
$$

只要 ε 充分小, 就满足

$$\|u_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} \ll 1, \quad 其中\ p > n.$$

(ii) 定理 1.2 对于一般的空间维数同样成立, 这里限制 $n = 2,3$ 的目的是为获得具有高振荡的初始速度情形下的整体解. 这里给出的方法适合于其他双曲与抛物耦合的模型.

6.2 Hybrid-Besov 空间与局部化引理

本节仍然采用第 1 章 Littlewood-Paley 理论中采用的标准记号. 用 $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathcal{Z}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n); D^\alpha \hat{f}(0) = 0; \forall \alpha \in \left(\mathbb{N} \cup 0\right)^n\}$ 的对偶空间. 令 $R_0 > 0$ 是命题 3.3 中确定的常数, 定义 Hybrid-Besov 空间如下:

定义 2.1 设 $s, \sigma \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Hybrid-Besov 空间 $\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}$ 定义为

$$\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma} \triangleq \left\{f \in \mathcal{Z}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} < +\infty\right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \triangleq \sum_{2^k \leqslant R_0} 2^{ks}\|\Delta_k f\|_{L^2} + \sum_{2^k > R_0} 2^{k\sigma}\|\Delta_k f\|_{L^p}.$$

特别, 记

$$\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma} \triangleq \dot{\mathcal{B}}_{2,2}^{s,\sigma}.$$

类似于前面几章讨论, 可以定义时空 Hybrid-Besov 空间 $\mathcal{L}_T^r(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma})$, 它对应的范数为

$$\|f\|_{\mathcal{L}_T^r(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma})} \triangleq \sum_{2^k \leqslant R_0} 2^{ks}\|\Delta_k f\|_{L_T^r L^2} + \sum_{2^k > R_0} 2^{k\sigma}\|\Delta_k f\|_{L_T^r L^p}.$$

容易验证

$$\mathcal{L}_T^1(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}) = L_T^1(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}); \quad 及 \quad \mathcal{L}_T^r(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}) \subseteq L_T^r(\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}), \quad r > 1.$$

作为 Bernstein 不等式、Bony 仿积估计与 Hybrid-Besov 空间定义的直接结论, 有

引理 2.1 (a) 嵌入定理:

$$\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_2,\sigma} \subseteq \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_1,\sigma}, \ 若\ s_1 \geqslant s_2; \quad \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma_2} \subseteq \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma_1}, \ 若\ \sigma_1 \leqslant \sigma_2.$$

(b) 插值定理: 对于 $s_1, s_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ 及 $\theta \in [0,1]$, 有如下插值公式:

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\theta s_1+(1-\theta)s_2,\,\theta\sigma_1+(1-\theta)\sigma_2}} \leqslant \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_1,\sigma_1}}^{\theta} \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_2,\sigma_2}}^{(1-\theta)}.$$

(c) 点态估计 —— 嵌入不等式:

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}.$$

(d) Besov 空间与 Hybrid-Besov 空间的关系:

$$\dot{B}_{2,1}^{s} \subseteq \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,s-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}} \subseteq \dot{B}_{p,1}^{s-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}, \quad p \geqslant 2.$$

引理 2.2 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则有如下的乘积估计 (见第 1 章):

(a) 若 $s_1, s_2 \leqslant \dfrac{n}{p}$ 及 $s_1+s_2 > n\max\left(0, \dfrac{2}{p}-1\right)$. 则

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_1}}\|g\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_2}}.$$

(b) 若 $s_1 \leqslant \dfrac{n}{p}, s_2 < \dfrac{n}{p}$ 及 $s_1+s_2 \geqslant n\max\left(0, \dfrac{2}{p}-1\right)$. 则

$$\|fg\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_1+s_2-\frac{n}{p}}} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}_{p,1}^{s_1}}\|g\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{s_2}}.$$

命题 2.3 设 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), p > n$. 若 $\phi_\varepsilon(x) \triangleq e^{i\frac{x_1}{\varepsilon}}\phi(x)$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\|\phi_\varepsilon\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} \leqslant C\varepsilon^{1-\frac{n}{p}},$$

这里 C 是不依赖 ε 的常数.

证明 对于待定的 $j_0 \in \mathbb{N}$, 由 Bersnstein 不等式, 就得

$$\sum_{j\geqslant j_0} 2^{(\frac{n}{p}-1)j}\|\Delta_j\phi_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant C2^{(\frac{n}{p}-1)j_0}.$$

对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 注意到 $e^{i\frac{x_1}{\varepsilon}} = (-i\varepsilon\partial_1)^N e^{i\frac{x_1}{\varepsilon}}$, 分部积分就得

$$\Delta_j\phi_\varepsilon(x) = (i\varepsilon)^N 2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{y_1}{\varepsilon}}\partial_{y_1}^N(h(2^j(x-y))\phi(y))dy, \quad h(x) \triangleq (\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x),$$

对于上式利用 Young 不等式, 可见

$$\|\Delta_j\phi_\varepsilon\|_{L^q} \leqslant C\varepsilon^N\max(2^{Nj}, 2^{(1-\frac{1}{q})nj}), \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

选取 $N > \dfrac{n}{p'}$, 上式意味着

$$\sum_{0\leqslant j<j_0} 2^{(\frac{n}{p}-1)j}\|\Delta_j\phi_\varepsilon\|_{L^p} \leqslant C\varepsilon^N 2^{(N-1+\frac{n}{p})j_0},$$

$$\sum_{j\leqslant \ln R_0} 2^{(\frac{n}{2}-1)j}\|\Delta_j\phi_\varepsilon\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^N.$$

选取 j_0 满足 $2^{j_0} \sim \varepsilon^{-1}$, 就推得

$$\|\phi_\varepsilon\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} \leqslant C\varepsilon^{1-\frac{n}{p}}. \qquad \square$$

设 $v(t,x) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}; {\rm Lip}(\mathbb{R}^n))$. 定义粒子轨道映射 ψ 与 ψ_j 如下:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\psi(t,x) = v(t,\psi(t,x)), \quad \psi(0,x) = x, \\ &\frac{d}{dt}\psi_j(t,x) = S_{j-1}v(t,\psi_j(t,x)), \quad \psi_j(0,x) = x, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

引理 2.4 设 $1 \leqslant p < \infty$. 则有

$$\|f \circ \psi(t,x)\|_{L^p} \leqslant e^{V(t)}\|f\|_{L^p}, \quad \|f \circ \psi(t,x)\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty},$$

在本章中, $V(t) \triangleq \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau$.

证明 注意到

$$\partial_t \det(\nabla\psi) = {\rm div}\, v \det(\nabla\psi),$$

及变量代换就推出引理 2.4. $\square$

引理 2.5 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则对于任意的 $j, k \in \mathbb{Z}$, 成立

$$\begin{aligned} &\|\Delta_j(\Delta_k f \circ \psi_k)\|_{L^p} \leqslant C2^{-(j-k)}e^{CV(t)}\|\Delta_k f\|_{L^p}, \\ &\|S_j(\Delta_k f \circ \psi_k)\|_{L^p} \leqslant Ce^{CV(t)}\big(V(t) + 2^{j-k}\big)\|\Delta_k f\|_{L^p}, \end{aligned}$$

这里 C 是不依赖 j, k 的常数.

证明 设 $\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^n$ 是球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的一个光滑的单位分解, 满足

$$\xi'_\ell \neq 0, \quad \xi' \in {\rm supp}\, \alpha_\ell(\xi'), \qquad 这里\ \xi' = (\xi'_1, \cdots, \xi'_n) \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

那么, 将 $\varphi(\xi)$ 作如下分解:

$$\varphi(\xi) = \sum_{\ell=1}^n i\xi_\ell \hat{\theta}_\ell(\xi), \ \hat{\theta}_\ell(\xi) \triangleq (i\xi_\ell)^{-1}\alpha_\ell(\xi/|\xi|)\varphi(\xi).$$

因此

$$\Delta_j f = 2^{-j}\sum_{\ell=1}^n \partial_\ell(2^{jn}\theta_\ell(2^j\cdot) * f) \triangleq 2^{-j}\sum_{\ell=1}^n \partial_\ell(\bar{\Delta}_{j\ell}f), \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{2.1}$$

分部积分就得

$$\Delta_j(\Delta_k f \circ \psi_k) = \sum_{\ell=1}^n 2^{nj-j}\int_{\mathbb{R}^n} \theta_\ell(2^j(x-y))\partial_\ell((\Delta_k f)(\psi_k(y)))dy.$$

则由 Bernstein 估计、Young 不等式及引理 2.4 就得

$$\begin{aligned}\|\Delta_j(\Delta_k f\circ\psi_k)\|_{L^p}&\leqslant C2^{-j}\|(\nabla\Delta_k f)(\psi_k)\|_{L^p}\|\nabla\psi_k\|_{L^\infty}\\&\leqslant C2^{-j}e^{V(t)}\|\nabla\Delta_k f\|_{L^p}\|\nabla\psi_k\|_{L^\infty}\\&\leqslant C2^{k-j}e^{V(t)}\|\Delta_k f\|_{L^p}\|\nabla\psi_k\|_{L^\infty}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

另一方面，利用 (2.1), 推出

$$S_j(\Delta_k f\circ\psi_k)=2^{-k}\sum_{\ell=1}^n S_j(\partial_\ell(\bar\Delta_{k\ell}f)\circ\psi_k).$$

令 $g(x)\triangleq(\mathcal{F}^{-1}\chi)(x)$, 作坐标变换 $y\mapsto\psi_k^{-1}(y)$, 然后进行分部积分就推出

$$\begin{aligned}S_j(\Delta_k f\circ\psi_k)=&2^{nj-k}\sum_{\ell=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}g(2^j(x-y))\partial_\ell(\bar\Delta_{k\ell}f)(\psi_k(y))dy\\=&2^{nj-k}\sum_{\ell=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}g(2^j(x-\psi_k^{-1}(y)))\partial_\ell(\bar\Delta_{k\ell}f)(y)\det(\nabla\psi_k^{-1})dy\\=&2^{nj-k}\sum_{\ell=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\Big\{2^j\partial_l\psi_k^{-1}(\partial_{y_\ell}g)(2^j(x-\psi_k^{-1}(y)))\det(\nabla\psi_k^{-1})\\&+g(2^j(x-\psi_k^{-1}(y)))\partial_\ell\det(\nabla\psi_k^{-1})\Big\}\bar\Delta_{k\ell}f(y)dy.\end{aligned}$$

因此, 利用 Young 不等式就得

$$\begin{aligned}\|S_j(\Delta_k f\circ\psi_k)\|_{L^p}\leqslant&C2^{j-k}\|\nabla\psi_k^{-1}\|_{L^\infty}^{n+1}\|\Delta_k f\|_{L^p}\\&+C2^{-k}\|\nabla^2\psi_k^{-1}\|_{L^\infty}\|\nabla\psi_k^{-1}\|_{L^\infty}^{n-1}\|\Delta_k f\|_{L^p}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

因此, 利用 2.3 节引理 3.1、(2.2) 及 (2.3) 就完成局部化引理的证明. □

对于 Laplace 算子及分数阶的耗散算子, 容易验证如下交换子估计, 证明见第 2 章或文献 [CMW].

引理 2.6 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 对于任意的 $j\in\mathbb{Z}$, 成立

$$\begin{aligned}&\|\Delta(\Delta_j f\circ\psi_j)-(\Delta\Delta_j f)\circ\psi_j\|_{L^p}\leqslant C2^{2j}e^{CV(t)}V(t)\|\Delta_j f\|_{L^p},\\&\|\Lambda(\Delta_j f\circ\psi_j)-(\Lambda\Delta_j f)\circ\psi_j\|_{L^p}\leqslant C2^{j}e^{CV(t)}V(t)^{\frac12}\|\Delta_j f\|_{L^p},\end{aligned}$$

这里 C 是不依赖于 j,k 的常数.

类似于热传导方程的时空正则化估计, 有如下在 Hybrid-Besov 空间框架下的正则化估计:

命题 2.7 设 $s,\sigma\in\mathbb{R}$ 及 $p,r\in[1,\infty]$. 假设 $u_0\in\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}, f\in L^1_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}$. 则热传导方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u = f, \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

存在唯一的解 u 满足

$$\|u\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s+\frac{2}{r},\sigma+\frac{2}{r}}} \leqslant C\big(\|u_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} + \|f\|_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}\big).$$

证明 对热传导方程的 Cauchy 问题对应的积分方程

$$u(t) = e^{\nu t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{\nu(t-s)\Delta} f(s)ds,$$

两边进行局部化, 然后关于 x 变量取 L^q 范数 $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, 就得

$$\|\Delta_j u(t)\|_{L^q} \leqslant Ce^{-ct2^{2j}}\|\Delta_j u_0\|_{L^q} + C\int_0^t e^{-c(t-s)2^{2j}}\|\Delta_j f(s)\|_{L^q} ds.$$

两边关于变量 t 取 L^r, 就得

$$\|\Delta_j u(t)\|_{L_T^r L^q} \leqslant C2^{-\frac{2}{r}j}\|\Delta_j u_0\|_{L^q} + C2^{-\frac{2}{r}j}\|\Delta_j f(s)\|_{L_T^1 L^q}.$$

对于上式在低频 $2^j \leqslant R_0$ 和高频 $2^j > R_0$ 情形下分别选取 $q = 2$ 和 $q = p$, 再利用 Hybrid-Besov 空间的定义就完成命题 2.7 的证明. □

作为本节的结束, 我们罗列在第 2 章中证明的关于抛物方程解的光滑效应的两个结论, 它们在唯一性的证明中将起着重要的作用.

命题 2.8 设 $p, q, r \in [1, \infty], s \in \mathbb{R}, \bar{\mu} > 0, \bar{\lambda} + \bar{\mu} > 0, u_0 \in \dot{B}_{p,q}^{s-1}, f \in \mathcal{L}_t^1(\dot{B}_{p,q}^{s-1})$. 记 u 是如下线性抛物型方程的 Cauchy 问题:

$$\partial_t u - \bar{\mu}\Delta u + (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\nabla \text{div} u = f, \quad u(0, x) = u_0(x)$$

的解, 则对于任意的 $t \in [0, T]$, 有如下估计:

$$\|u\|_{\mathcal{L}_t^r(\dot{B}_{p,q}^{s-1+2/q})} \leqslant C\big(\|u_0\|_{\dot{B}_{p,q}^{s-1}} + \|f(\tau)\|_{\mathcal{L}_t^1(\dot{B}_{p,q}^{s-1})}\big).$$

命题 2.9 设 $s \in \left(-n\min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}\right), 1 + \frac{n}{p}\right)$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. 记 v 是满足 $\nabla v \in L_T^1 \dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}$ 的向量场. 假设 $f_0 \in \dot{B}_{p,q}^s$, $g \in L_T^1(\dot{B}_{p,q}^s)$, f 是如下输运方程:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f = g, \quad f(0, x) = f_0$$

的解. 则对于任意的 $t \in [0, T]$, 成立估计

$$\|f\|_{\mathcal{L}_t^\infty(\dot{B}_{p,q}^s)} \leqslant e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}} d\tau}\left(\|f_0\|_{\dot{B}_{p,q}^s} + \int_0^t \|g(\tau)\|_{\dot{B}_{p,q}^s} d\tau\right).$$

6.3 不具对流项的线性化方程的 Green 矩阵与解的正则性估计

本节考虑线性化的可压 Navier-Stokes 方程中的前两个方程对应的自由情形:

$$\begin{cases} \partial_t a + \Lambda d = 0, \\ \partial_t d - \bar{\nu}\Delta d - \Lambda a = 0, \\ (a, d)|_{t=0} = (a_0, d_0). \end{cases} \tag{3.1}$$

首先给出它对应的 Green 矩阵的显式表示式.

引理 3.1 设 $\mathcal{G}$ 是线性化方程组 (3.1) 对应的 Green 矩阵. 则 $\widehat{\mathcal{G}}$ 有如下具体的表示公式:

$$\widehat{\mathcal{G}}(\xi, t) = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_+ e^{\lambda_- t} - \lambda_- e^{\lambda_+ t}}{\lambda_+ - \lambda_-} & -\left(\dfrac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\right)|\xi| \\ \left(\dfrac{e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-}\right)|\xi| & \dfrac{\lambda_+ e^{\lambda_+ t} - \lambda_- e^{\lambda_- t}}{\lambda_+ - \lambda_-} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

这里

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2}\bar{\nu}|\xi|^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\nu}^2|\xi|^4 - 4|\xi|^2}.$$

证明 用算子 Λ 作用于线性化方程组 (3.1) 的第一个方程, 就得

$$(\Lambda d)_t + \Delta a = \bar{\nu}\Delta(\Lambda d).$$

结合 (3.1) 中的第二个方程, 就得

$$a_{tt} = -(\Lambda d)_t = \Delta a + \bar{\nu}\Delta a_t.$$

两边取 Fourier 变换, 上述方程在频率空间上具有如下形式:

$$\begin{cases} \hat{a}_{tt} + \bar{\nu}|\xi|^2\hat{a}_t + |\xi|^2\hat{a} = 0, \\ \hat{a}(\xi, 0) = \hat{a}_0(\xi), \quad \hat{a}_t(\xi, 0) = -|\xi|\hat{d}_0(\xi). \end{cases} \tag{3.3}$$

容易看出 $\lambda_\pm$ 是 (3.3) 对应的特征方程的两个特征根. 因此, (3.3) 的解具有如下形式:

$$\hat{a}(\xi, t) = A(\xi)e^{\lambda_-(\xi)t} + B(\xi)e^{\lambda_+(\xi)t}.$$

利用初始条件, 就得

$$A = \frac{\lambda_+\hat{a}_0 + |\xi|\hat{d}_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad 和 \quad B = \frac{-|\xi|\hat{d}_0 - \lambda_-\hat{a}_0}{\lambda_+ - \lambda_-},$$

此意味着

$$\hat{a}(\xi,t)=\left(\frac{\lambda_+e^{\lambda_-t}-\lambda_-e^{\lambda_+t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\hat{a}_0(\xi)-\left(\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)|\xi|\hat{d}_0(\xi). \tag{3.4}$$

这就决定了 $\widehat{\mathcal{G}^{11}}$ 及 $\widehat{\mathcal{G}^{12}}$.

另一方面, 通过计算 (3.1) 的第二个方程的 Fourier 变换, 即有

$$\hat{d}_t=-\bar{\nu}|\xi|^2\hat{d}+|\xi|\hat{a}.$$

因此

$$\hat{d}(\xi,t)=e^{-\bar{\nu}|\xi|^2t}\left[\hat{d}(\xi,0)+|\xi|\int_0^t e^{\bar{\nu}|\xi|^2\tau}\hat{a}(\xi,\tau)d\tau\right].$$

将 (3.4) 代入上面的等式, 利用关系式

$$\lambda_\pm+\bar{\nu}|\xi|^2=-\lambda_\mp,\quad \lambda_-\lambda_+=|\xi|^2,$$

最终得到

$$\hat{d}(\xi,t)=\left(\frac{e^{\lambda_+t}-e^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)|\xi|\hat{a}_0(\xi)+\left(\frac{\lambda_+e^{\lambda_+t}-\lambda_-e^{\lambda_-t}}{\lambda_+-\lambda_-}\right)\hat{d}_0(\xi),$$

这也就决定了 $\widehat{\mathcal{G}^{21}}$ 及 $\widehat{\mathcal{G}^{22}}$. □

下面考察 $\widehat{\mathcal{G}}$ 的点态估计及在高频情形下 $\widehat{\mathcal{G}}$ 的展开形式.

引理 3.2 (a) 给定 $R>0$, 存在一个依赖 R 的常数 $\vartheta=\vartheta(R)$ 满足对于任意的多重指标 α 及 $|\xi|\leqslant R$, 成立如下估计:

$$|D_\xi^\alpha\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)|\leqslant Ce^{-\vartheta|\xi|^2t}(1+|\xi|)^{|\alpha|}(1+t)^{|\alpha|}, \tag{3.5}$$

这里 $C=C(R,|\alpha|)$.

(b) 存在依赖 $\bar{\nu}$ 的两个常数 R 与 ϑ 满足对于 $|\xi|\geqslant R$, 成立如下展开:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)=&e^{-\bar{\nu}^{-1}t}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+e^{-\bar{\nu}|\xi|^2t}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\\&+\widehat{\mathcal{G}}^1(\xi,t)\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\widehat{\mathcal{G}}^2(\xi,t)\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中 $\widehat{\mathcal{G}}^1$ 及 $\widehat{\mathcal{G}}^2$ 满足估计

$$|\partial_\xi^\alpha\widehat{\mathcal{G}}^1|\leqslant C|\xi|^{-|\alpha|-1}\left(e^{-\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}}+e^{-\vartheta|\xi|^2t}\right), \tag{3.7}$$

$$|\partial_\xi^\alpha\widehat{\mathcal{G}}^2|\leqslant C|\xi|^{-|\alpha|-2}\left(e^{-\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}}+e^{-\vartheta|\xi|^2t}\right), \tag{3.8}$$

这里 $C=C(|\alpha|,\bar{\nu})$.

注记 3.1 注意到与 $\widehat{\mathcal{G}}^1=-|\xi|E(|\xi|,t)$ 不同, $\widehat{\mathcal{G}}^2$ 其实是一个对角矩阵, 见 (3.9). 由于 $\widehat{\mathcal{G}}^2$ 中这两个非零对角元素可以被 (3.8) 的右边控制, 我们就不再关心其具体形式而将其视为一个数量函数.

证明 证明的方法源于 Hoff-Zumbrun [H-Zum] 的工作. 利用引理 3.1, 直接计算就得估计 (3.5). 下面给出 (b) 的证明. 记

$$p(z,r)=z^2+\bar{\nu}r^2z+r^2.$$

定义围道 Γ_+,Γ_- 及 Γ_0 是复平面上以 $-\bar{\nu}^{-1}$, $-\bar{\nu}r^2+\bar{\nu}^{-1}$ 及 0 为中心, 半径为 $\bar{\nu}^{-1}/2$ 的圆. 令

$$\begin{cases} E(r,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_-\cup\Gamma_+}\frac{e^{tz}}{p(z,r)}dz,\\ F(r,t)=E_t(r,t)+\bar{\nu}r^2E(r,t),\end{cases}$$

则容易验证 E, F 分别是象征 $p(z,r)$ 对应的常微分算子具不同初始条件的基本解, 即满足

$$\begin{cases} p(\partial_t,r)E=p(\partial_t,r)F=0,\\ E(r,0)=0,\quad F(r,0)=1,\\ E_t(r,0)=1,\quad F_t(r,0)=0.\end{cases}$$

事实上, 注意到 $r=|\xi|$, 根据常微分方程的理论, E 与 F 具有如下形式:

$$E(\xi,t)=A_E(\xi)e^{\lambda_-t}+B_E(\xi)e^{\lambda_+t},$$
$$F(\xi,t)=A_F(\xi)e^{\lambda_-t}+B_F(\xi)e^{\lambda_+t}.$$

利用 E 与 F 的初始条件, 推出

$$A_E=\frac{-1}{\lambda_+-\lambda_-},\quad B_E=\frac{1}{\lambda_+-\lambda_-},\quad A_F=\frac{\lambda_+}{\lambda_+-\lambda_-},\quad B_F=\frac{-\lambda_-}{\lambda_+-\lambda_-}.$$

根据 Cauchy 定理就得上面 E 与 F 的表示公式.

记 $\hat{a},\hat{d}$ 是引理 3.1 及其证明过程中给出的函数. 利用 (3.3) 就得

$$\hat{a}(\xi,t)=F(|\xi|,t)\hat{a}_0(\xi)-|\xi|E(|\xi|,t)\hat{d}_0(\xi),\quad \widehat{\mathcal{G}^{21}}=\widehat{\mathcal{G}^{12}},$$

即

$$\widehat{\mathcal{G}^{11}}(\xi,t)=F(|\xi|,t),\quad \widehat{\mathcal{G}^{12}}(\xi,t)=-|\xi|E(|\xi|,t),\quad \widehat{\mathcal{G}^{21}}(\xi,t)=|\xi|E(|\xi|,t).$$

从 (3.2) 中给的 $\widehat{\mathcal{G}}^{22}$ 的表示公式容易看出, 通过引入函数

$$H(r,t)=e^{-\bar{\nu}r^2t}\int_0^t e^{\bar{\nu}r^2\tau}E(r,\tau)d\tau=\frac{\lambda_-e^{\lambda_-t}-\lambda_+e^{\lambda_+t}}{|\xi|^2(\lambda_+-\lambda_-)},$$

就可以给出 $\widehat{\mathcal{G}}^{22}$ 的另一个表现形式

$$\widehat{\mathcal{G}^{22}}(\xi,t)=e^{-\bar{\nu}|\xi|^2t}-|\xi|^2H(\xi,t).$$

这样, Green 矩阵的 Fourier 变换写成如下形式:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}=&\begin{bmatrix} e^{-\bar{\nu}^{-1}t} & 0 \\ 0 & e^{-\bar{\nu}|\xi|^2t}\end{bmatrix}-|\xi|E(|\xi|,t)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\\ &+\begin{bmatrix} F(|\xi|,t)-e^{-\bar{\nu}^{-1}t} & 0 \\ 0 & -|\xi|^2H(\xi,t)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因此, 按照表示式 (3.6) 中 $\widehat{\mathcal{G}}$ 的表示形式, 就得

$$\widehat{\mathcal{G}}^1(\xi,t)=-|\xi|E(|\xi|,t),\quad \widehat{\mathcal{G}}^2(\xi,t)=\begin{bmatrix} F(|\xi|,t)-e^{-\bar{\nu}^{-1}t} & 0 \\ 0 & -|\xi|^2H(\xi,t)\end{bmatrix}.\tag{3.9}$$

余下的主要任务是证明 (3.7) 与 (3.8). 对于充分大的 $r>10\bar{\nu}^{-1}$, 通过坐标变换 $w=z+\bar{\nu}r^2-\bar{\nu}^{-1}$, 得到

$$\begin{aligned}r\int_{\Gamma_-(r)}\frac{e^{tz}}{p(z,r)}dz&=-e^{(\bar{\nu}^{-1}-\bar{\nu}r^2)t}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{tw}}{\bar{\nu}rw}\left[1-\frac{(w+\bar{\nu}^{-1})^2}{\bar{\nu}r^2w}\right]^{-1}dw\\ &=\sum_{j=0}^{\infty}r^{-2j-1}\left[-e^{(\bar{\nu}^{-1}-\bar{\nu}r^2)t}\int_{\Gamma_0}\frac{(w+\bar{\nu}^{-1})^{2j}}{(\bar{\nu}w)^{j+1}}e^{tw}dw\right],\end{aligned}$$

这里 C 是一个绝对常数.

为表述简单, 用 $b_j(t)$ 表示上式右边的围道积分, 则

$$|b_j(t)|\leqslant C(\bar{\nu})e^{\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}}(\widetilde{C}\bar{\nu}^{-1})^{2j},$$

这里 $\widetilde{C}$ 是一个绝对常数. 如果选取 $r>2\bar{\nu}^{-1}$ 充分大, 则上式右边括号中的项可以被

$$C(\bar{\nu})e^{(\bar{\nu}^{-1}-\bar{\nu}r^2)t}e^{\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}}(\widetilde{C}\bar{\nu}^{-1})^{2j}\leqslant C(\bar{\nu})e^{-\frac{\bar{\nu}r^2t}{2}}(\widetilde{C}\bar{\nu}^{-1})^{2j}$$

控制. 两边关于 r 求 k 阶导数, 就有

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\int_{\Gamma_-}\frac{re^{tz}}{p(z,r)}dz=-e^{\bar{\nu}^{-1}t}\sum_{j=0}^{\infty}b_j(t)\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{\ell}e^{-\bar{\nu}r^2t}\right]\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-\ell}r^{-2j-1}\right].$$

注意到 $\partial_r^{\ell}e^{-\bar{\nu}r^2t}\leqslant C(\ell)r^{-\ell}e^{-\frac{2}{3}\bar{\nu}r^2t}$, 只要 $r>2\widetilde{C}\bar{\nu}^{-1}$ 充分大, 就得

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\int_{\Gamma_-}\frac{re^{tz}}{p(z,r)}dz\right|\\&\leqslant Ce^{(\bar\nu^{-1}-\frac{2}{3}\bar\nu r^2)t}\sum_{j=0}^{\infty}|b_j(t)|r^{-2j-1-k}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\frac{(2j+k-\ell)!}{(2j)!}\\&\leqslant C(\bar\nu,k)e^{-\frac12\bar\nu r^2t}r^{-k-1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\widetilde C\bar\nu^{-1}}{r}\right)^{2j}\frac{(2j+k-\ell)!}{(2j)!}\\&\leqslant C(\bar\nu,k)e^{-\frac12\bar\nu r^2t}r^{-k-1}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

另一方面, 借助于坐标变换 $w=z+\bar\nu^{-1}$, 有

$$\begin{aligned}r\int_{\Gamma_+(r)}\frac{e^{tz}}{p(z,r)}dz&=e^{-\bar\nu^{-1}t}\int_{\Gamma_0}\frac{e^{tw}}{\bar\nu r^2w}\left[1-\frac{(w-\bar\nu^{-1})^2}{\bar\nu rw}\right]^{-1}dw\\&=\sum_{j=0}^{\infty}r^{-2j-1}(-1)^j\left[e^{-\bar\nu^{-1}t}\int_{\Gamma_0}\frac{(w-\bar\nu^{-1})^{2j}}{(\bar\nu w)^{j+1}}e^{tw}dw\right].\end{aligned}$$

方括号里面的项可以被

$$C(\bar\nu)e^{-\frac{\bar\nu^{-1}}{2}t}(\widetilde C\bar\nu^{-1})^{2j}$$

所控制. 那么, 类似于 (3.10) 的推导过程, 就得

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k\int_{\Gamma_+}\frac{re^{tz}}{p(z,r)}dz\right|\leqslant C(\bar\nu)e^{-\frac{\bar\nu^{-1}}{2}t}r^{-k-1}.\tag{3.11}$$

根据估计 (3.10) 与 (3.11), 通过 E,F 与 H 的表达式就得估计 (3.7) 和 (3.8). □

利用引理 3.2, 可以证明 Green 矩阵 $\mathcal G$ 对应的光滑效应, 这将在定理 1.2 的证明过程中起到重要的作用.

命题 3.3 设 $\mathcal C$ 是 $\mathbb R^n$ 中以原点为中心的环. 那么存在依赖于 $\bar\nu$ 的正数 R_0,C,c 满足若 $\operatorname{supp}\hat u\subset\lambda\mathcal C$, 成立如下结论:

(a) 若 $\lambda\leqslant R_0$, 则

$$\|\mathcal G*u\|_{L^2}\leqslant Ce^{-c\lambda^2t}\|u\|_{L^2};\tag{3.12}$$

(b) 若 $b\leqslant\lambda\leqslant R_0$, 则对于任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 成立

$$\|\mathcal G*u\|_{L^p}\leqslant C(1+b^{-n-1})e^{-c\lambda^2t}\|u\|_{L^p};\tag{3.13}$$

(c) 若 $\lambda>R_0$, 则对于任意的 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 成立

$$\|\mathcal G^1*u\|_{L^p}\leqslant C\lambda^{-1}e^{-ct}\|u\|_{L^p},\tag{3.14}$$

$$\|\mathcal G^2*u\|_{L^p}\leqslant C\lambda^{-2}e^{-ct}\|u\|_{L^p}.\tag{3.15}$$

证明　(a) 借助于 Plancherel 定理, 有

$$\|\mathcal{G} * u\|_{L^2} = \|\widehat{\mathcal{G}}(\xi)\hat{u}(\xi)\|_{L^2} \leqslant C\|e^{-\vartheta|\xi|^2 t}\hat{u}(\xi)\|_2 \leqslant Ce^{-c\lambda^2 t}\|u\|_2,$$

这里用到了 (3.5) 及 $\hat{u}(\xi)$ 的支集性质.

(b) 令 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 在 $\mathcal{C}$ 的附近 1. 令

$$g(t,x) \triangleq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)d\xi.$$

欲证明 (3.13), 仅需证明

$$\|g(x,t)\|_{L^1} \leqslant C(1+b^{-n-1})e^{-c\lambda^2 t}. \tag{3.16}$$

利用 (3.5), 推出

$$\int_{|x|\leqslant\lambda^{-1}} |g(x,t)|dx \leqslant C\int_{|x|\leqslant\lambda^{-1}}\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(\lambda^{-1}\xi)||\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)|d\xi dx \leqslant Ce^{-c\lambda^2 t}. \tag{3.17}$$

令 $L \triangleq \dfrac{x\cdot\nabla_\xi}{i|x|^2}$. 注意到 $L(e^{ix\cdot\xi}) = e^{ix\cdot\xi}$, 分部积分就得

$$\begin{aligned} g(x,t) =& \int_{\mathbb{R}^n} L^{n+1}(e^{ix\cdot\xi})\phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)d\xi \\ =&(-1)^{n+1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(L^*)^{n+1}\big(\phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)\big)d\xi. \end{aligned}$$

由 Leibnitz 公式及 (3.5), 推知

$$\begin{aligned} &\big|(L^*)^{n+1}\big(\phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)\big)\big| \\ \leqslant& C|\lambda x|^{-(n+1)} \sum_{|\gamma|=n+1,|\beta|\leqslant|\gamma|} \lambda^{|\beta|}|(\nabla^{\gamma-\beta}\phi)(\lambda^{-1}\xi)|e^{-\vartheta|\xi|^2 t}(1+|\xi|)^{|\beta|}(1+t)^{|\beta|}. \end{aligned}$$

借助于估计

$$\begin{aligned} e^{-\vartheta|\xi|^2 t}(1+|\xi|)^{|\beta|}(1+t)^{|\beta|} &\leqslant Ce^{-\vartheta|\xi|^2 t}(1+t^{|\beta|}+|\xi|^{|\beta|}+t^{|\beta|}|\xi|^{|\beta|}) \\ &\leqslant Ce^{-\frac{\vartheta}{2}|\xi|^2 t}(1+|\xi|^{-2|\beta|}+|\xi|^{|\beta|}+|\xi|^{-|\beta|}), \end{aligned}$$

就推知对于满足 $b \lesssim |\xi| \sim \lambda \leqslant R_0$ 的 ξ, 成立

$$\big|(L^*)^{n+1}\big(\phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{\mathcal{G}}(\xi,t)\big)\big| \leqslant C(1+b^{-n-1})|\lambda x|^{-(n+1)}e^{-\frac{\vartheta}{2}|\xi|^2 t},$$

这又意味着

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geqslant\frac{1}{\lambda}} |g(x,t)|dx &\leqslant C(1+b^{-n-1})e^{-c\lambda^2 t}\lambda^n \int_{|x|\geqslant\frac{1}{\lambda}} |\lambda x|^{-n-1}dx \\ &\leqslant C(1+b^{-n-1})e^{-c\lambda^2 t}. \end{aligned}$$

上式结合 (3.17) 就推出估计 (3.16).

(c) 令

$$g^1(t,x) \triangleq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \phi(\lambda^{-1}\xi) \widehat{\mathcal{G}}^1(\xi,t) d\xi.$$

由于被积函数支撑在 $\{\xi : |\xi| \sim \lambda > R_0\}$, 则利用 (3.7) 就推出

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leqslant\lambda^{-1}} |g^1| dx &\leqslant C \int_{|x|\leqslant\lambda^{-1}} \int |\phi(\lambda^{-1}\xi)||\xi|^{-1} \big(e^{-\frac{\bar{\nu}^{-1}t}{2}} + e^{-\vartheta|\xi|^2 t}\big) d\xi dx \\ &\leqslant C\lambda^{-1} e^{-ct}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

分部积分, 就得

$$g^1(x,t) = (-1)^{n+1}(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} (L^*)^{n+1} \big(\phi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{\mathcal{G}}^1(\xi,t)\big) d\xi.$$

利用 (3.7), 推知点态估计

$$|g^1(x,t)| \leqslant |\lambda x|^{-n-1} \lambda^{-1} e^{-ct},$$

这就意味着

$$\begin{aligned} \int_{|x|\geqslant\lambda^{-1}} |g^1(x,t)| dx &\leqslant C\lambda^{-1} e^{-ct} \lambda^n \int_{|x|\geqslant\lambda^{-1}} |\lambda x|^{-n-1} dx \\ &\leqslant C\lambda^{-1} e^{-ct}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

上式结合 (3.18), 就推出

$$\|g^1(x,t)\|_{L^1} \leqslant C\lambda^{-1} e^{-ct},$$

这就意味着估计 (3.14). 同理可证估计 (3.15). □

6.4 Hybrid-Besov 空间中的 Bony 仿积估计及交换子估计

为了利用 Fourier 局部化方法与粒子轨道映射等工具研究有对流项的线性化方程解的正则性估计, 需要在 Hybrid-Besov 空间中进行一系列的 Bony 仿积估计及交换子估计. 记 $\chi_{\{\cdot\}}$ 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的特征函数, $\{c(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 表示 ℓ^1 上的满足 $\|\{c(j)\}\|_{\ell^1} \leqslant 1$ 的序列.

引理 4.1 设 $s, \sigma, t, \tau \in \mathbb{R}$, $2 \leqslant p \leqslant 4$, p' 是 p 对应的 Hölder 共轭指标, $1 \leqslant r, r_1, r_2 \leqslant \infty$ 满足 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$. 则有如下结论:

(a) 若 $s \leqslant \dfrac{n}{2}$, $\sigma \leqslant \dfrac{n}{p}$, 则对于 $2^j > R_0$, 成立估计

$$\|\Delta_j(T_f g)\|_{L^r_T L^p} \leqslant Cc(j)\big(2^{j(\frac{n}{p'}-s-t)} + 2^{j(\frac{n}{2}-s-\tau)} + 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-\tau)}\big) \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}}. \tag{4.1}$$

(b) 若 $s \leqslant \dfrac{n}{p}$, $\sigma \leqslant \dfrac{2n}{p} - \dfrac{n}{2}$, 则对于 $2^j \leqslant R_0$, 成立估计

$$\begin{aligned}\|\Delta_j(T_f g)\|_{L_T^r L^2} \leqslant & Cc(j)\big(2^{j(\frac{n}{2}-s-t)} + \chi_{\{2^j \sim R_0\}}(2^{j(\frac{n}{p}-s-\tau)} + 2^{j(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}-\sigma-\tau)})\big) \\ & \times \|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

(c) 若 $s \leqslant \dfrac{n}{2}$, $\sigma \leqslant \dfrac{n}{p}$, 则

$$\|\Delta_j(T_f g)\|_{L_T^r L^2} \leqslant Cc(j)\big(2^{j(\frac{n}{2}-s-t)} + 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-t)}\big)\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2} \dot{B}_{2,1}^{t}}. \tag{4.3}$$

证明　(a) 根据仿积的定义与正交性, 有

$$\Delta_j(T_f g) = \sum_{|k-j|\leqslant 4} \Delta_j(S_{k-1} f \Delta_k g) = \sum_{|k-j|\leqslant 4} \sum_{k' \leqslant k-2} \Delta_j(\Delta_{k'} f \Delta_k g).$$

引入指标集

$$J \triangleq \big\{(k', k);\ |k-j| \leqslant 4, k' \leqslant k-2\big\}.$$

则对于 $2^j > R_0$, 容易看出

$$\begin{aligned}\|\Delta_j(T_f g)\|_{L_T^r L^p} & \leqslant \sum_J \|\Delta_j(\Delta_{k'} f \Delta_k g)\|_{L_T^r L^p} \\ & \leqslant \Big(\sum_{J_{\ell m}} + \sum_{J_{\ell h}} + \sum_{J_{hh}}\Big) \|\Delta_j(\Delta_{k'} f \Delta_k g)\|_{L_T^r L^p} \\ & \triangleq I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} J_{\ell m} &= \{(k', k) \in J,\ 2^{k'} \leqslant R_0, 2^{-4} R_0 \leqslant 2^k \leqslant R_0\}, \\ J_{\ell h} &= \{(k', k) \in J,\ 2^{k'} \leqslant R_0, 2^k > R_0\}, \\ J_{hh} &= \{(k', k) \in J,\ 2^{k'} > R_0, 2^k > R_0\}. \end{aligned}$$

注意到 $s \leqslant \frac{n}{2}$, 利用 Bernstein 估计就得

$$\begin{aligned} I_1 & \leqslant C \sum_{(k',k) \in J_{\ell m}} \|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1} L^\infty} 2^{k(\frac{n}{2}-\frac{n}{p})} \|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2} L^2} \\ & \leqslant C \sum_{(k',k) \in J_{\ell m}} 2^{k's} \|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1} L^2} 2^{k'(\frac{n}{2}-s)} 2^{kt} \|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2} L^2} 2^{k(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}-t)} \\ & \leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{p'}-s-t)} \|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leqslant \sum_{(k',k)\in J_{\ell h}} \|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^\infty} \|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^p} \\
&\leqslant C \sum_{(k',k)\in J_{\ell h}} 2^{k's}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^2} 2^{k'(\frac{n}{2}-s)} 2^{k\tau}\|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^p} 2^{-k\tau} \\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{2}-s-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}},
\end{aligned}
$$

同样的推理, 并注意到 $\sigma \leqslant \frac{n}{p}$, 可见

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leqslant \sum_{(k',k)\in J_{hh}} \|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^\infty} \|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^p} \\
&\leqslant C \sum_{(k',k)\in J_{hh}} 2^{k'\sigma}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^p} 2^{k'(\frac{n}{p}-\sigma)} 2^{k\tau}\|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^p} 2^{-k\tau} \\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}.
\end{aligned}
$$

因此, 结合 I_1, I_2 及 I_3 的估计, 就得估计 (4.1).

(b) 对于 $2^j \leqslant R_0$ 情形, 分解指标集 J 如下:

$$
J = J_{\ell\ell} \cup J_{\ell m} \cup J_{hm},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
J_{\ell\ell} &= \{(k',k) \in J,\ 2^{k'} \leqslant R_0, 2^k \leqslant R_0\}, \\
J_{\ell m} &= \{(k',k) \in J,\ 2^{k'} \leqslant R_0, R_0 < 2^k \leqslant 2^4 R_0\}, \\
J_{hm} &= \{(k',k) \in J,\ 2^{k'} > R_0, R_0 < 2^k \leqslant 2^4 R_0\}.
\end{aligned}
$$

因此, 对于 $2^j \leqslant R_0$ 的情形, 利用正交性可见

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_j(T_f g)\|_{L_T^r L^2} &\leqslant \sum_J \|\Delta_j(\Delta_{k'} f \Delta_k g)\|_{L_T^r L^2} \\
&\leqslant \Big(\sum_{J_{\ell\ell}} + \sum_{J_{\ell m}} + \sum_{J_{hm}}\Big) \|\Delta_j(\Delta_{k'} f \Delta_k g)\|_{L_T^r L^2} \\
&\triangleq II_1 + II_2 + II_3.
\end{aligned}
$$

利用 Bernstein 不等式及 $s \leqslant \frac{n}{p}$, 就得

$$
\begin{aligned}
II_1 &\leqslant C \sum_{(k',k)\in J_{\ell\ell}} 2^{k's}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^2} 2^{k'(\frac{n}{2}-s)} 2^{kt}\|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^2} 2^{-kt} \\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{2}-s-t)}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}, \\
II_2 &\leqslant C \sum_{(k',k)\in J_{\ell m}} 2^{k's}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^2} 2^{k'(\frac{n}{p}-s)} 2^{k\tau}\|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^p} 2^{-k\tau} \\
&\leqslant Cc(j)\chi_{\{2^j\sim R_0\}} 2^{j(\frac{n}{p}-s-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}.
\end{aligned}
$$

同理, 注意到 $\sigma \leqslant \dfrac{2n}{p} - \dfrac{n}{2}$, 也有

$$\begin{aligned}
II_3 &\leqslant C \sum_{(k',k)\in J_{hm}} 2^{k'\sigma}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^{r_1}L^p} 2^{k'(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}-\sigma)} 2^{k\tau}\|\Delta_k g\|_{L_T^{r_2}L^p} 2^{-k\tau} \\
&\leqslant Cc(j)\chi_{\{2^j\sim R_0\}} 2^{j(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}-\sigma-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}\|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}.
\end{aligned}$$

这样, 结合上述估计就得 (4.2).

(c) (4.3) 的证明完全类似, 读者可作为练习完成证明. □

引理 4.2　设 $s,\sigma,t,\tau \in \mathbb{R}$, $2 \leqslant p \leqslant 4$, p' 是 p 对应的 Hölder 共轭指标, $1 \leqslant r, r_1, r_2 \leqslant \infty$ 满足 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$. 假设 $s+t>0$, $s+\tau>0$, $\sigma+t>0$, 及 $\sigma+\tau>0$. 则有如下估计:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j R(f,g)\|_{L_T^r L^p} \leqslant & Cc(j)\big(2^{j(\frac{n}{p'}-s-t)} + 2^{j(\frac{n}{2}-s-\tau)} \\
& + 2^{j(\frac{n}{2}-\sigma-t)} + 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-\tau)}\big)\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}\|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}, \quad (4.4)\\
\|\Delta_j R(f,g)\|_{L_T^r L^2} \leqslant & Cc(j)\big(2^{j(\frac{n}{2}-s-t)} + 2^{j(\frac{n}{p}-s-\tau)} \\
& + 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-t)} + 2^{j(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}-\sigma-\tau)}\big)\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}\|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}, \quad (4.5)\\
\|\Delta_j R(f,g)\|_{L_T^r L^2} \leqslant & Cc(j)\big(2^{j(\frac{n}{2}-s-t)} + 2^{j(\frac{n}{p}-s-\tau)}\big)\|f\|_{\mathcal{L}_T^{r_1}\dot{B}_{2,1}^{s}}\|g\|_{\mathcal{L}_T^{r_2}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{t,\tau}}. \quad (4.6)
\end{aligned}$$

证明　利用正交性, 容易看出

$$\Delta_j(R(f,g)) = \sum_{k\geqslant j-3}\sum_{|k'-k|\leqslant 1}\Delta_j(\Delta_k f\Delta_{k'} g),$$

令 $J \triangleq \{(k,k');\ k\geqslant j-3, |k'-k|\leqslant 1\}$, 则

$$J = J_{\ell\ell}\cup J_{\ell m}\cup J_{hm}\cup J_{hh},$$

这里

$$\begin{aligned}
J_{\ell\ell} &= \{(k,k')\in J,\ 2^k\leqslant R_0, 2^{k'}\leqslant R_0\},\\
J_{\ell m} &= \{(k,k')\in J,\ 2^k\leqslant R_0, R_0<2^{k'}\leqslant 2R_0\},\\
J_{hm} &= \{(k,k')\in J,\ 2^k> R_0, 2^{-1}R_0\leqslant 2^{k'}\leqslant R_0\},\\
J_{hh} &= \{(k,k')\in J,\ 2^k> R_0, 2^{k'}> R_0\}.
\end{aligned}$$

因此推出

$$\begin{aligned}
\Delta_j(R(f,g)) &= \Big(\sum_{J_{\ell\ell}} + \sum_{J_{\ell m}} + \sum_{J_{hm}} + \sum_{J_{hh}}\Big)\Delta_j(\Delta_k f\Delta_{k'} g)\\
&\triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

利用 Bernstein 估计及 $s+t>0$, 容易推出

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^r_T L^p} &\leqslant C2^{j\frac{n}{p'}} \sum_{(k,k')\in J_{\ell\ell}} \|\Delta_k f \Delta_{k'} g\|_{L^r_T L^1} \\ &\leqslant C2^{j\frac{n}{p'}} \sum_{(k,k')\in J_{\ell\ell}} 2^{ks}\|\Delta_k f\|_{L^{r_1}_T L^2} 2^{-ks} 2^{k't} \|\Delta_{k'} g\|_{L^{r_2}_T L^2} 2^{-k't} \\ &\leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{p'}-s-t)} \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}},\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C2^{j\frac{n}{2}} \sum_{(k,k')\in J_{\ell\ell}} \|\Delta_k f \Delta_{k'} g\|_{L^r_T L^1} \\ &\leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{2}-s-t)} \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}}.\end{aligned}$$

类似地, 由于 $s+\tau>0$, 直接推出

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{L^r_T L^p} &\leqslant C2^{j\frac{n}{2}} \sum_{(k,k')\in J_{\ell m}} \|\Delta_k f \Delta_{k'} g\|_{L^r_T L^{\frac{2p}{2+p}}} \\ &\leqslant C2^{j\frac{n}{2}} \sum_{(k,k')\in J_{\ell m}} 2^{ks}\|\Delta_k f\|_{L^{r_1}_T L^2} 2^{-ks} 2^{k'\tau} \|\Delta_{k'} g\|_{L^{r_2}_T L^p} 2^{-k'\tau} \\ &\leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{2}-s-\tau)} \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}},\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C2^{j\frac{n}{p}} \sum_{(k,k')\in J_{\ell m}} \|\Delta_k f \Delta_{k'} g\|_{L^r_T L^{\frac{2p}{2+p}}} \\ &\leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{p}-s-\tau)} \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}}.\end{aligned}$$

对于 $\sigma+t>0$, 就得

$$\begin{aligned}\|I_3\|_{L^r_T L^p} &\leqslant C2^{j\frac{n}{2}} \sum_{(k,k')\in J_{hm}} \|\Delta_k f \Delta_{k'} g\|_{L^r_T L^{\frac{2p}{2+p}}} \\ &\leqslant C2^{j\frac{n}{2}} \sum_{(k,k')\in J_{hm}} 2^{k\sigma}\|\Delta_k f\|_{L^{r_1}_T L^p} 2^{-k\sigma} 2^{k't} \|\Delta_{k'} g\|_{L^{r_2}_T L^2} 2^{-k't} \\ &\leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{2}-\sigma-t)} \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}},\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\|I_3\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C2^{j\frac{n}{p}} \sum_{(k,k')\in J_{hm}} \|\Delta_k f \Delta_{k'} g\|_{L^r_T L^{\frac{2p}{2+p}}} \\ &\leqslant Cc(j) 2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-t)} \|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T \dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}}.\end{aligned}$$

最后, 对于 $\sigma+\tau>0$ 及 $2\leqslant p\leqslant 4$, 有

$$
\begin{aligned}
\|I_4\|_{L^r_T L^p} &\leqslant C2^{j\frac{n}{p}}\sum_{(k,k')\in J_{hh}}\|\Delta_k f\Delta_{k'}g\|_{L^r_T L^{\frac{p}{2}}}\\
&\leqslant C2^{j\frac{n}{p}}\sum_{(k,k')\in J_{hh}}2^{k\sigma}\|\Delta_k f\|_{L^{r_1}_T L^p}2^{-k\sigma}2^{k'\tau}\|\Delta_{k'}g\|_{L^{r_2}_T L^p}2^{-k'\tau}\\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}},
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\|I_4\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C2^{j(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2})}\sum_{(k,k')\in J_{hh}}\|\Delta_k f\Delta_{k'}g\|_{L^r_T L^{\frac{p}{2}}}\\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}-\sigma-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}}.
\end{aligned}
$$

综合 $I_1\sim I_4$ 的估计, 就得估计 (4.4) 及 (4.5). 最后, 利用

$$
\begin{aligned}
\|I_1+I_3\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C2^{j\frac{n}{2}}\sum_{(k,k')\in J_{\ell\ell}\cup J_{hm}}\|\Delta_k f\Delta_{k'}g\|_{L^r_T L^1}\\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{2}-s-t)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{B}^{s}_{2,1}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}},
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\|I_2+I_4\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C2^{j\frac{n}{p}}\sum_{(k,k')\in J_{\ell m}\cup J_{hh}}\|\Delta_k f\Delta_{k'}g\|_{L^r_T L^{\frac{2p}{2+p}}}\\
&\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{p}-s-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{B}^{s}_{2,1}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{t,\tau}_{2,p}},
\end{aligned}
$$

就得估计 (4.6). 这就完成了引理 4.2 的证明. □

命题 4.3 设 $s,t,\tilde{s},\tilde{t},\sigma,\tau\in\mathbb{R}$, $2\leqslant p\leqslant 4$, 且 $1\leqslant r,r_1,r_2\leqslant\infty$ 满足 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}$. 则有如下的结论:

(a) 若 $\sigma,\tau\leqslant\dfrac{n}{p}$ 及 $\sigma+\tau>0$, 则

$$
\sum_{2^j>R_0}2^{j(\sigma+\tau-\frac{n}{p})}\|\Delta_j(fg)\|_{L^r_T L^p}\leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\sigma,\sigma}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\tau,\tau}_{2,p}}. \tag{4.7}
$$

(b) 若 $\gamma\in\mathbb{R}$, $s,\tilde{s}\leqslant\dfrac{n}{p}$, $s+t>n-\dfrac{2n}{p}$ 满足 $s+t=\tilde{s}+\tilde{t}$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j\leqslant R_0}2^{j(s+t-\frac{n}{2})}\|\Delta_j(fg)\|_{L^r_T L^2}\\
\leqslant &C\Big(\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,s-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{t,t-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}+\gamma}_{2,p}}+\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{s},\tilde{s}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{t},\tilde{t}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\Big).
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

(c) 若 $s, \tilde{s} \leqslant \frac{n}{2}$, $s+t > \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$ 满足 $s+t = \tilde{s}+\tilde{t}$, 则

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(s+t-\frac{n}{2})}\|\Delta_j(fg)\|_{L^r_T L^2}$$
$$\leqslant C\left(\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,s-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{B}^{t}_{2,1}} + \|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{s},\tilde{s}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{B}^{\tilde{t}}_{2,1}}\right). \tag{4.9}$$

证明 利用 (4.1), 对于 $2^j > R_0$ 的情形, 容易验证

$$\|\Delta_j(T_f g)\|_{L^r_T L^p} + \|\Delta_j(T_g f)\|_{L^r_T L^p}$$
$$\leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\sigma,\sigma}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\tau,\tau}_{2,p}}.$$

利用 (4.4), 推出

$$\|\Delta_j(R(f,g))\|_{L^r_T L^p} \leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{p}-\sigma-\tau)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\sigma,\sigma}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}+\tau,\tau}_{2,p}},$$

借助于上式与 Bony 的分解式, 就得 (4.7).

根据 (4.2), 对于 $2^j \leqslant R_0$ 的情形, 有

$$\|\Delta_j(T_f g)\|_{L^r_T L^2} \leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{2}-s-t)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,s-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{t,t-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}+\gamma}_{2,p}},$$
$$\|\Delta_j(T_g f)\|_{L^r_T L^2} \leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{2}-s-t)}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{s},\tilde{s}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{t},\tilde{t}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}},$$

同理, 从 Bony 余项估计 (4.5) 提出

$$\|\Delta_j(R(f,g))\|_{L^r_T L^2} \leqslant Cc(j)2^{j(\frac{n}{2}-s-t)}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{t},\tilde{t}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}}\|g\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{\tilde{s},\tilde{s}-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}_{2,p}},$$

这就意味着 (4.8). 用完全相同的方法, 从估计 (4.3) 与 (4.6) 就推出 (4.9). □

命题 4.4 设 $2 \leqslant p \leqslant 4$, $-\frac{n}{p} < s \leqslant \frac{n}{2}+1$, $-\frac{n}{p} < \sigma \leqslant \frac{n}{p}+1$, 及 $1 \leqslant r, r_1, r_2 \leqslant \infty$ 满足 $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$. 则对于 $2^j \geqslant R_0$ 的情形, 成立

$$\|[v,\Delta_j]\cdot\nabla f\|_{L^r_T L^p} \leqslant Cc(j)\left(2^{-j\sigma} + 2^{j(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}-s)}\right)\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}. \tag{4.10}$$

进而, 若 $-\frac{n}{p} < s \leqslant \frac{n}{p}+1$, 则

$$\|[v,\Delta_j]\cdot\nabla f\|_{L^r_T L^2} \leqslant Cc(j)2^{-js}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{B}^{s}_{2,1}}. \tag{4.11}$$

证明 利用标准的 Bony 仿积分解, 有

$$
\begin{aligned}
[v,\Delta_j]\cdot\nabla f =&[T_{v^i},\Delta_j]\partial_i f + T_{\partial_i\Delta_j f}v^i + R(v^i,\partial_i\Delta_j f)\\
&-\Delta_j(T_{\partial_i f}v^i) - \Delta_j R(v^i,\partial_i f).
\end{aligned}
$$

利用估计 (4.1), $s\leqslant \frac{n}{2}+1$ 和 $\sigma\leqslant\frac{n}{p}+1$, 容易推出

$$
\|\Delta_j(T_{\partial_i f}v^i)\|_{L^r_T L^p}\leqslant Cc(j)(2^{-j\sigma}+2^{j(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}-s)})\|\nabla f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{s-1,\sigma-1}_{2,p}}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}.
$$

从 (4.4), $s>-\frac{n}{p}$ 及 $\sigma>-\frac{n}{p}$, 推出

$$
\|\Delta_j R(v^i,\partial_i f)\|_{L^r_T L^p}\leqslant Cc(j)(2^{-j\sigma}+2^{j(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}-s)})\|\nabla f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{s-1,\sigma-1}_{2,p}}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}.
$$

注意到

$$
T'_{\partial_i\Delta_j f}v^i\triangleq T_{\partial_i\Delta_j f}v^i + R(v^i,\partial_i\Delta_j f)=\sum_{k\geqslant j-2}S_{k+2}\Delta_j\partial_i f\Delta_k v^i,
$$

则根据 Bernstein 不等式, 就推出

$$
\begin{aligned}
\|T'_{\partial_i\Delta_j f}v^i\|_{L^r_T L^p}&\leqslant C\|\Delta_j\nabla f\|_{L^{r_2}_T L^\infty}\sum_{k\geqslant j-2}\|\Delta_k v\|_{L^{r_1}_T L^p}\\
&\leqslant C2^{j(1+\frac{n}{p})}\|\Delta_j f\|_{L^{r_2}_T L^p}\Bigg(\sum_{k\geqslant j-2,2^k>R_0}\|\Delta_k v\|_{L^{r_1}_T L^p}\\
&\quad+\sum_{k\geqslant j-2,\frac{R_0}{4}\leqslant 2^k\leqslant R_0}2^{k(\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\|\Delta_k v\|_{L^{r_1}_T L^2}\Bigg)\\
&\leqslant Cc(j)2^{-j\sigma}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}.
\end{aligned}\tag{4.12}
$$

现在估计 $[T_{v^i},\Delta_j]\partial_i f=\sum_{|k-j|\leqslant 4}[S_{k-1}v^i,\Delta_j]\partial_i\Delta_k f$. 令 $h(x)=(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x)$, 分部积分就得

$$
\begin{aligned}
[T_{v^i},\Delta_j]\partial_i f=&\sum_{|k-j|\leqslant 4}2^{nj}\int_{\mathbb{R}^n}h(2^j(x-y))(S_{k-1}v^i(x)-S_{k-1}v^i(y))\partial_i\Delta_k f(y)dy\\
=&\sum_{|k-j|\leqslant 4}2^{(n+1)j}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 y\cdot\nabla S_{k-1}v^i(x-\tau y)d\tau\partial_i h(2^j y)\Delta_k f(x-y)dy\\
&+2^{nj}\int_{\mathbb{R}^n}h(2^j(x-y))\partial_i S_{k-1}v^i(y)\Delta_k f(y)dy,
\end{aligned}
$$

对于上式利用 Minkowski 不等式及 $\mathcal{B}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p} \hookrightarrow L^\infty$, 就能推出

$$\begin{aligned}
&\|[T_{v^i},\Delta_j]\partial_i f\|_{L^r_T L^p}\\
&\leqslant C\|\nabla v\|_{L^{r_1}_T L^\infty}\Bigg(\sum_{|k-j|\leqslant 4,2^k>R_0}\|\Delta_k f\|_{L^{r_2}_T L^p}+\sum_{|k-j|\leqslant 4,\frac{R_0}{2^4}\leqslant 2^k\leqslant R_0}2^{k(\frac{n}{2}-\frac{n}{p})}\|\Delta_k f\|_{L^{r_2}_T L^2}\Bigg)\\
&\leqslant Cc(j)\big(2^{-j\sigma}+2^{j(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}-s)}\big)\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}.
\end{aligned}$$

综合上面得到的估计, 就得 (4.10).

另一方面, 从估计 (4.6) 直接推出

$$\|\Delta_j R(v^i,\partial_i f)\|_{L^r_T L^2}\leqslant Cc(j)2^{-js}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{B}^s_{2,1}}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}.$$

适当修改 (4.12), 容易推出

$$\|\Delta_j(T_{\partial_i f}v^i)\|_{L^r_T L^2}+\|T'_{\partial_i\Delta_j f}v^i\|_{L^r_T L^2}\leqslant Cc(j)2^{-js}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{B}^s_{2,1}}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}.$$

再次利用 $[T_{v^i},\Delta_j]\partial_i f$ 的表示公式, 就能推出

$$\begin{aligned}
\|[T_{v^i},\Delta_j]\partial_i f\|_{L^r_T L^2}&\leqslant C\|\nabla v\|_{L^{r_1}_T L^\infty}\sum_{|k-j|\leqslant 4}\|\Delta_k f\|_{L^{r_2}_T L^2}\\
&\leqslant Cc(j)2^{-js}\|v\|_{\mathcal{L}^{r_1}_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}\|f\|_{\mathcal{L}^{r_2}_T\dot{B}^s_{2,1}}.
\end{aligned}$$

因此, 从上面的三个估计就推出所需要的估计 (4.11). □

命题 4.5 设 $2\leqslant p\leqslant 4$, $s,\sigma>0$, 及 $s\geqslant\sigma-\dfrac{n}{2}+\dfrac{n}{p}$, $r\geqslant 1$. 假设 $F\in W^{[s]+2,\infty}_{\rm loc}\cap W^{[\sigma]+2,\infty}_{\rm loc}$ 满足 $F(0)=0$. 则

$$\|F(f)\|_{\mathcal{L}^r_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}\leqslant C(1+\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_T\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}_{2,p}})^{\max([s],[\sigma])+1}\|f\|_{\mathcal{L}^r_T\dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}.\tag{4.13}$$

对于任意的 $s>0$ 和 $p\geqslant 1$, 成立

$$\|F(f)\|_{\mathcal{L}^r_T\dot{B}^s_{p,1}}\leqslant C(1+\|f\|_{L^\infty_T L^\infty})^{[s]+1}\|f\|_{\mathcal{L}^r_T\dot{B}^s_{p,1}}.\tag{4.14}$$

证明 不等式 (4.14) 是经典的, 它是 1.4 节中命题 4.12 的直接结果. 下面来证明 (4.13). 采用二次微局部分解, $F(f)$ 可以写成

$$\begin{aligned}
F(f)=\sum_{k'\in\mathbb{Z}}F(S_{k'+1}f)-F(S_{k'}f)&=\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\Delta_{k'}f\int_0^1F'(S_{k'}f+\tau\Delta_{k'}f)d\tau\\
&\triangleq\sum_{k'\in\mathbb{Z}}\Delta_{k'}f\,m_{k'},
\end{aligned}$$

这里 $m_{k'} \triangleq \int_0^1 F'(S_{k'}f + \tau\Delta_{k'}f)d\tau$. 记

$$J_\ell = \{k; 2^k \leqslant R_0\}, \quad J_h = \{k; 2^k > R_0\}.$$

那么就有

$$J_\ell = J_{\ell\ell} \cup J_{\ell m} \cup J_{\ell h}, \quad J_h = J_{h\ell} \cup J_{hm} \cup J_{hh},$$

其中

$$\begin{aligned}
J_{\ell\ell} &= \big\{(k,k'); k \in J_\ell, k' \leqslant k\big\},\\
J_{\ell m} &= \big\{(k,k'); k \in J_\ell, k' > k, 2^{k'} \leqslant R_0\big\},\\
J_{\ell h} &= \big\{(k,k'); k \in J_\ell, k' > k, 2^{k'} > R_0\big\},\\
J_{h\ell} &= \big\{(k,k'); k \in J_h, k' \leqslant k, 2^{k'} \leqslant R_0\big\},\\
J_{hm} &= \big\{(k,k'); k \in J_h, k' \leqslant k, 2^{k'} > R_0\big\},\\
J_{hh} &= \big\{(k,k'); k \in J_h, k' > k\big\}.
\end{aligned}$$

利用 Bernstein 不等式, 有

$$\|\Delta_k(\Delta_{k'}f\, m_{k'})\|_{L^2} \leqslant C2^{-k|\alpha|} \sup_{|\gamma|=|\alpha|} \|D^\gamma \Delta_k(\Delta_{k'}f\, m_{k'})\|_{L^2}.$$

因此, 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 及任意的 $|\gamma| \geqslant 0$, 容易验证

$$\|D^\gamma m_{k'}\|_{L^\infty} \leqslant C2^{k'|\gamma|}(1 + \|f\|_{L^\infty})^{|\gamma|},$$

由此即得

$$\|\Delta_k(\Delta_{k'}f\, m_{k'})\|_{L^2} \leqslant C2^{(k'-k)|\alpha|}\|\Delta_{k'}f\|_{L^2}(1 + \|f\|_{L^\infty})^{|\alpha|}. \tag{4.15}$$

对于 $|\alpha| = [s] + 1$ 应用 (4.15) 可见

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,k')\in J_{\ell\ell}} 2^{ks}\|\Delta_k(\Delta_{k'}f\, m_{k'})\|_{L^r_T L^2}\\
\leqslant& C \sum_{2^{k'}\leqslant R_0} 2^{k's}\|\Delta_{k'}f\|_{L^2} \sum_{k\geqslant k'} 2^{(k-k')(s-[s]-1)}(1 + \|f\|_{L^\infty_T L^\infty})^{|\alpha|}\\
\leqslant& C(1 + \|f\|_{L^\infty})^{[s]+1}\|f\|_{\mathcal{L}^r_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

对于 $|\alpha| = 0$ 应用 (4.15) 可见

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,k')\in J_{\ell m}} 2^{ks}\|\Delta_k(\Delta_{k'}f\, m_{k'})\|_{L^r_T L^2} &\leqslant C \sum_{2^{k'}\leqslant R_0} 2^{k's}\|\Delta_{k'}f\|_{L^r_T L^2} \sum_{k<k'} 2^{(k-k')s}\\
&\leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}^r_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

令 $m_0 \triangleq F'(0)$, 分解

$$\Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_{k'}) = \Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_0) + \Delta_k(\Delta_{k'} f(m_{k'} - m_0)).$$

容易看出

$$\sum_{(k,k')\in J_{\ell h}} 2^{ks}\|\Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_0)\|_{L^r_T L^2} \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}^r_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}}.$$

利用

$$\begin{aligned} m_{k'} - m_0 &= \int_0^1 m'_{k'}(\tau(S_{k'-1}f + \Delta_{k'} f))d\tau(S_{k'-1}f + \Delta_{k'} f) \\ &\triangleq (S_{k'-1}f + \Delta_{k'} f)\widetilde{m}_{k'}, \end{aligned}$$

即刻推出

$$\begin{aligned} &\sum_{(k,k')\in J_{\ell h}} 2^{ks}\|\Delta_k(\Delta_{k'} f(m_{k'} - m_0))\|_{L^r_T L^2} \\ \leqslant& C\sum_{(k,k')\in J_{\ell h}} 2^{ks}\big(\|\Delta_k(\Delta_{k'} f\widetilde{m}_{k'} S_{k'-1} f)\|_{L^r_T L^2} + 2^{k(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2})}\|(\Delta_{k'} f)^2\|_{L^r_T L^{\frac{p}{2}}}\big) \\ \triangleq& I_1 + I_2. \end{aligned}$$

下面分别估计 I_1 与 I_2. 事实上,

$$\begin{aligned} I_1 \leqslant& C\sum_{(k,k')\in J_{\ell h}} 2^{ks}\|\Delta_{k'} f\|_{L^r_T L^p} \sum_{k''\leqslant k'-2, 2^{k''}\leqslant R_0} \|\Delta_{k''} f\|_{L^\infty_T L^{\frac{2p}{p-2}}} \\ &+ C\sum_{(k,k')\in J_{\ell h}} 2^{ks} 2^{k(\frac{2n}{p}-\frac{n}{2})} \sum_{k''\leqslant k'-2, 2^{k''}> R_0} \|\Delta_{k'} f \Delta_{k''} f\|_{L^r_T L^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$

容易看出, 上式第一项可以被

$$\begin{aligned} &\sum_{2^{k'}\geqslant R_0} 2^{k'\sigma}\|\Delta_{k'} f\|_{L^r_T L^p} 2^{-k'\sigma} \sum_{2^k\leqslant R_0} 2^{ks} \sum_{2^{k''}\leqslant R_0} 2^{k''\frac{n}{p}}\|\Delta_{k''} f\|_{L^\infty_T L^2} \\ \leqslant& C\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}_{2,p}} \|f\|_{\mathcal{L}^r_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \end{aligned}$$

控制, 而第二项可以被

$$\begin{aligned} &\sum_{J_{\ell h}} 2^{k(s+\frac{2n}{p}-\frac{n}{2})} 2^{k'\sigma}\|\Delta_{k'} f\|_{L^r_T L^p} 2^{-k'\sigma} \sum_{2^{k''}> R_0} 2^{k''\frac{n}{p}}\|\Delta_{k''} f\|_{L^\infty_T L^p} 2^{-k''\frac{n}{p}} \\ \leqslant& C\|f\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}_{2,p}} \|f\|_{\mathcal{L}^r_T \dot{\mathcal{B}}^{s,\sigma}_{2,p}} \end{aligned}$$

控制. 类似地, 对 I_2 的估计如下:

$$I_2 \leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}} \|f\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}.$$

因此

$$\sum_{(k,k')\in J_{\ell h}} 2^{ks}\|\Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_{k'})\|_{L_T^r L^2} \leqslant C\big(1+\|f\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\big)\|f\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}. \tag{4.18}$$

采用证明 (4.16) 的方法, 注意到 $s \geqslant \sigma - \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{p}$, 推得

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,k')\in J_{h\ell}} 2^{k\sigma}\|\Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_{k'})\|_{L_T^r L^p} \\
\leqslant & C(1+\|f\|_{L_T^\infty L^\infty})^{[\sigma]+1} \sum_{2^{k'}\leqslant R_0} 2^{k's}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^r L^2} \sum_{k\geqslant k'} 2^{(k-k')(\sigma-[\sigma]-1)} 2^{k'(\frac{n}{2}-\frac{n}{p}-s+\sigma)} \\
\leqslant & C(1+\|f\|_{L_T^\infty L^\infty})^{[\sigma]+1}\|f\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

及

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k,k')\in J_{hm}} 2^{k\sigma}\|\Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_{k'})\|_{L_T^r L^p} \\
\leqslant & C(1+\|f\|_{L_T^\infty L^\infty})^{[\sigma]+1} \sum_{2^{k'}> R_0} 2^{k'\sigma}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^r L^p} \sum_{k> k'} 2^{(k-k')(\sigma-[\sigma]-1)} \\
\leqslant & C(1+\|f\|_{L_T^\infty L^\infty})^{[\sigma]+1}\|f\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

最后, 利用 $\sigma > 0$, 有估计

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,k')\in J_{hh}} 2^{k\sigma}\|\Delta_k(\Delta_{k'} f\, m_{k'})\|_{L_T^r L^p} &\leqslant C \sum_{2^{k'}\geqslant R_0} 2^{k'\sigma}\|\Delta_{k'} f\|_{L_T^r L^p} \sum_{k'\geqslant k} 2^{(k-k')\sigma} \\
&\leqslant C\|f\|_{\mathcal{L}_T^r \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

总结 (4.16)~(4.21) 并注意到嵌入关系 $\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}} \hookrightarrow L^\infty$, 就得估计 (4.13). □

6.5　具有对流项的线性化方程解的正则性估计

本节着手考虑具有对流项的线性化方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}
\partial_t a + \Lambda d = -v\cdot\nabla a + F, \\
\partial_t d - \bar{\nu}\Delta d - \Lambda a = -v\cdot\nabla d + G, \\
(a,d)|_{t=0} = (a_0, d_0).
\end{cases} \tag{5.1}$$

设 $T>0,\ s\in\mathbb{R}, p\geqslant 2$, 及 $s_p\triangleq s-\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{2}$. 定义函数空间 $\mathcal{E}_T^s$ 如下:

$$\mathcal{E}_T^s\triangleq\Big\{(a,d)\in\Big(L^1(0,T;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p+1,s})\cap\mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s})\Big)\\ \times\Big(L^1(0,T;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p+1,s+1})\cap\mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1})\Big)^n\Big\},$$

相应的范数为

$$\|(a,d)\|_{\mathcal{E}_T^s}\triangleq\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s}}+\|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}}+\|a\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p+1,s}}+\|d\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p+1,s+1}}.$$

记

$$\overline{V}(t)\triangleq\|v\|_{L_t^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}+\|v\|_{\mathcal{L}_t^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}},$$

有如下正则性估计:

定理 5.1 设 $2\leqslant p<2n,\ p\leqslant\min\left(4,\dfrac{2n}{n-2}\right)$ 及 $1-\dfrac{n}{p}<s\leqslant 1+\dfrac{2n}{p}-\dfrac{n}{2}$. 假设 $v\in\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}\cap L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}$, $F\in L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s}$, $G\in L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}$. 记 (a,d) 是 Cauchy 问题 (5.1) 在区间 $[0,T]$ 上的解. 则存在不依赖于 T 的常数 C 使得

$$\|(a,d)\|_{\mathcal{E}_T^s}\leqslant Ce^{C\overline{V}(T)}\Big\{\|(a_0,d_0)\|_{\mathcal{E}_0^s}+\big(\overline{V}(T)+\overline{V}(T)^{\frac12}\big)\|(a,d)\|_{\mathcal{E}_T^s},\\ +\|F\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s}}+\|G\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}}\Big\},$$

这里 $\|(a_0,d_0)\|_{\mathcal{E}_0^s}\triangleq\|a_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s}}+\|d_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}}$.

为方便起见, 还需要引入如下的函数空间 E_T^s:

$$E_T^s\triangleq\Big\{(a,d)\in\Big(L^1(0,T;\dot{\mathcal{B}}^{s+1,s})\cap\mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{\mathcal{B}}^{s-1,s})\Big)\\ \times\Big(L^1(0,T;\dot{B}_{2,1}^{s+1})\cap\mathcal{L}^\infty(0,T;\dot{B}_{2,1}^{s-1})\Big)^n\Big\},$$

相应的范数为

$$\|(a,d)\|_{E_T^s}\triangleq\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}^{s-1,s}}+\|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{B}_{2,1}^{s-1}}+\|a\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}^{s+1,s}}+\|d\|_{L_T^1\dot{B}_{2,1}^{s+1}}.$$

定理 5.2 设 $2\leqslant p<2n,\ p\leqslant\min\left(4,\dfrac{2n}{n-2}\right)$ 及 $1-\dfrac{n}{p}<s\leqslant 1+\dfrac{n}{p}$. 假设 $v\in\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}\cap L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}$, $F\in L_T^1\dot{\mathcal{B}}^{s-1,s}$, $G\in L_T^1\dot{B}_{2,1}^{s-1}$. 记 (a,d) 是 Cauchy 问题 (5.1) 在 $[0,T]$ 的一个解. 则存在不依赖于 T 的常数 C 满足

$$\|(a,d)\|_{E_T^s}\leqslant Ce^{C\overline{V}(T)}\Big\{\|(a_0,d_0)\|_{E_0^s}+\big(\overline{V}(T)+\overline{V}(T)^{\frac12}\big)\|(a,d)\|_{E_T^s}\\ +\|v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}_{2,1}^s}\|(a,d)\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}+\|F\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,1}^{s-1,s}}+\|G\|_{L_T^1\dot{B}_{2,1}^{s-1}}\Big\},$$

这里 $\|(a_0,d_0)\|_{E_0^s} \triangleq \|a_0\|_{\dot{\mathcal{B}}^{s-1,s}} + \|d_0\|_{\dot{B}^{s-1}_{2,1}}$.

为简单起见，引入记号如下：

$$a_j \triangleq \Delta_j a, \quad d_j \triangleq \Delta_j d, \quad F_j \triangleq \Delta_j F, \quad G_j \triangleq \Delta_j G.$$

定理 5.1 与定理 5.2 的证明基于下面的频率局部化的方程组:

$$\begin{cases} \partial_t a_j + \Lambda d_j = -\Delta_j(v\cdot\nabla a) + F_j, \\ \partial_t d_j - \bar{\nu}\Delta d_j - \Lambda a_j = -\Delta_j(v\cdot\nabla d) + G_j, \\ (a_j, d_j)|_{t=0} = (\Delta_j a_0, \Delta_j d_0) \triangleq (a_j^0, d_j^0). \end{cases} \tag{5.2}$$

从现在开始, 通过 $\dfrac{1}{\tilde{p}} = \dfrac{n}{2p} - \dfrac{n}{4} + \dfrac{1}{2}$ 来定义 $\tilde{p}$, p' 与 $\tilde{p}'$ 分别表示 p, $\tilde{p}$ 的 Hölder 共轭数.

低频估计　$2^j \leqslant R_0$. 在低频情形, Green 矩阵的行为与热核一样, 具有光滑效应. 因此, 可以将 $v\cdot\nabla a$ 与 $v\cdot\nabla d$ 视为扰动项来处理.

借助于 Green 矩阵, Cauchy 问题 (5.2) 的解可以表示为

$$\begin{pmatrix} a_j \\ d_j \end{pmatrix} = \mathcal{G}(x,t) * \begin{pmatrix} a_j^0 \\ d_j^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{G}(x,t-\tau) * \begin{pmatrix} F_j - \Delta_j(v\cdot\nabla a) \\ G_j - \Delta_j(v\cdot\nabla d) \end{pmatrix} d\tau.$$

利用命题 3.3 (a), 就推知

$$\begin{aligned} \|a_j(t)\|_{L^2} + \|d_j(t)\|_{L^2} \leqslant & Ce^{-c2^{2j}t}(\|a_j^0\|_{L^2} + \|d_j^0\|_{L^2}) \\ & + C\int_0^t e^{-c2^{2j}(t-\tau)}(\|F_j(\tau)\|_{L^2} + \|G_j(\tau)\|_{L^2})d\tau \\ & + C\int_0^t e^{-c2^{2j}(t-\tau)}(\|\Delta_j(v\cdot\nabla a)(\tau)\|_{L^2} \\ & + \|\Delta_j(v\cdot\nabla d)(\tau)\|_{L^2})d\tau. \end{aligned}$$

两边关于时间 t 取 L^r 范数, 就得

$$\begin{aligned} \|a_j\|_{L^r_TL^2} + \|d_j\|_{L^r_TL^2} \leqslant & C2^{-\frac{2j}{r}}(\|a_j^0\|_{L^2} + \|d_j^0\|_{L^2} + \|F_j\|_{L^1_TL^2} + \|\Delta_j(v\cdot\nabla a)\|_{L^1_TL^2} \\ & + \|G_j\|_{L^1_TL^2} + \|\Delta_j(v\cdot\nabla d)\|_{L^1_TL^2}). \end{aligned}$$

这里及本章的其余部分, 总假设 $1 \leqslant r \leqslant \infty$. 注意到 $1 - \dfrac{n}{p} < s \leqslant \dfrac{2n}{p} - \dfrac{n}{2} + 1$, 取

$$s = \frac{n}{p}, \quad t = s - \frac{n}{p} + \frac{n}{p'} - 1, \quad \widetilde{s} = s_p - 1, \quad \widetilde{t} = \frac{n}{2}, \quad \gamma = \frac{n}{p} - \frac{n}{2},$$

应用命题 4.3 (b) 就得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j \leqslant R_0} 2^{j(s_p-1)} \|\Delta_j(v\nabla a)\|_{L^1_T L^2} \\
\leqslant & C\|v\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}}_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p}, \frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}_{2,p}} \|\nabla a\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}'}_T \dot{\mathcal{B}}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'}-1, s_p-1+\gamma}_{2,p}} + C\|\nabla a\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p-1, s-1}_{2,p}} \|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{p}}_{2,p}} \\
\leqslant & C\|v\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}}_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p}, \frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}_{2,p}} \|a\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}'}_T \dot{\mathcal{B}}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'}, s}_{2,p}} + C\|a\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p, s}_{2,p}} \|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{p}}_{2,p}},
\end{aligned}
$$

特别, 当 $\gamma = 0$ 时, 有估计

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j \leqslant R_0} 2^{j(s_p-1)} \|\Delta_j(v\nabla d)\|_{L^1_T L^2} \\
\leqslant & C\|v\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}}_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p}, \frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}_{2,p}} \|\nabla d\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}'}_T \dot{\mathcal{B}}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'}-1, s_p-1+\gamma}_{2,p}} + C\|\nabla d\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p-1, s-1}_{2,p}} \|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{p}}_{2,p}} \\
\leqslant & C\|v\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}}_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p}, \frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}_{2,p}} \|d\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}'}_T \dot{\mathcal{B}}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'}, s_p}_{2,p}} + C\|d\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p, s}_{2,p}} \|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{p}}_{2,p}}.
\end{aligned}
$$

因此, 对于任意的 $1 \leqslant r \leqslant \infty$, 有估计

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j \leqslant R_0} 2^{j(s_p-1+\frac{2}{r})} (\|a_j\|_{L^r_T L^2} + \|d_j\|_{L^r_T L^2}) \\
\leqslant & C \sum_{2^j \leqslant R_0} 2^{j(s_p-1)} (\|a^0_j\|_{L^2} + \|d^0_j\|_{L^2}) \\
& + C\Big\{\|F\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p-1, s}_{2,p}} + \|G\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p-1, s-1}_{2,p}} + \|v\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}, \frac{n}{p}}_{2,p}} \|(a,d)\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{s_p, s}_{2,p}} \\
& + \|v\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}}_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p}, \frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}_{2,p}} \Big(\|a\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}'}_T \dot{\mathcal{B}}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'}, s}_{2,p}} + \|d\|_{\mathcal{L}^{\tilde{p}'}_T \dot{\mathcal{B}}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'}, s_p}_{2,p}}\Big)\Big\}. \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

高频情形的估计 $2^j > R_0$ 对于高频的情形, Green 矩阵对于变量 a 没有光滑效应. 如果仍然将 $v \cdot \nabla a$ 视为扰动项来处理, 在能量估计中 a 必然产生一阶导数损失. 为了避免导数损失, 就需要求助于 Lagrange 坐标与交换子估计.

首先, 将 (5.2) 改写成如下形式:

$$
\begin{cases}
\partial_t a_j + S_{j-1}v \cdot \nabla a_j + \Lambda d_j = (S_{j-1}v \cdot \nabla a_j - \Delta_j(v \cdot \nabla a)) + F_j, \\
\partial_t d_j + S_{j-1}v \cdot \nabla d_j - \bar{\nu}\Delta d_j - \Lambda a_j = (S_{j-1}v \cdot \nabla d_j - \Delta_j(v \cdot \nabla d)) + G_j, \\
(a_j, d_j)|_{t=0} = (a^0_j, d^0_j).
\end{cases} \qquad (5.4)
$$

记 $\psi_j(t,x)$ 是常微分方程

$$
\frac{d}{dt}\psi_j(t,x) = S_{j-1}v(t, \psi_j(t,x)), \quad \psi_j(0,x) = x
$$

决定的粒子轨道映射, 令

$$
\bar{a}_j = a_j(t, \psi_j(t,x)), \quad \bar{d}_j = d_j(t, \psi_j(t,x)), \quad \bar{F}_j = F_j(t, \psi_j(t,x)), \quad \bar{G}_j = G_j(t, \psi_j(t,x)).
$$

则新的未知函数 $(\bar{a}_j, \bar{d}_j)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \bar{a}_j + \Lambda \bar{d}_j = \bar{F}_j + \bar{\mathcal{R}}_j, \\ \partial_t \bar{d}_j - \bar{\nu}\Delta \bar{d}_j - \Lambda \bar{a}_j = \bar{G}_j + \bar{\mathcal{Q}}_j, \\ (\bar{a}_j, \bar{d}_j)|_{t=0} = (\Delta_j a_0, \Delta_j d_0), \end{cases} \tag{5.5}$$

这里

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_j \triangleq & \big(S_{j-1} v \cdot \nabla a_j - \Delta_j(v \cdot \nabla a)\big) \circ \psi_j + \Lambda(d_j \circ \psi_j) - (\Lambda d_j) \circ \psi_j, \\ \bar{\mathcal{Q}}_j \triangleq & \big((S_{j-1} v \cdot \nabla d_j) - \Delta_j(v \cdot \nabla d)\big) \circ \psi_j - \bar{\nu}\Delta(d_j \circ \psi_j) + \bar{\nu}(\Delta d_j) \circ \psi_j \\ & + (\Lambda a_j) \circ \psi_j - \Lambda(a_j \circ \psi_j). \end{aligned}$$

利用引理 2.4 与

$$\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \leqslant C \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p}} d\tau \leqslant C\overline{V}(t)$$

推知

$$\|a_j\|_{L^p} \leqslant e^{\overline{V}(t)} \|\bar{a}_j\|_{L^p}. \tag{5.6}$$

选取待定常数 $N \in \mathbb{N}$, 利用高低频分解

$$\bar{a}_j = \sum_k \Delta_k \bar{a}_j = \sum_{|k-j| \leqslant N} \Delta_k \bar{a}_j + \sum_{k-j>N} \Delta_k \bar{a}_j + S_{j-N} \bar{a}_j,$$

及 (5.6), 两边取 L^p 范数就推出

$$\|a_j\|_{L^p} \leqslant e^{\overline{V}(t)} \Big(\sum_{|k-j| \leqslant N} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^p} + \sum_{k-j>N} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^p} + \|S_{j-N} \bar{a}_j\|_{L^p} \Big). \tag{5.7}$$

利用引理 2.5, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k-j>N} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^p} \leqslant C e^{C\overline{V}(t)} \sum_{k-j>N} 2^{-(k-j)} \|a_j\|_{L^p} \leqslant C 2^{-N} e^{C\overline{V}(t)} \|a_j\|_{L^p}, \\ \|S_{j-N} \bar{a}_j\|_{L^p} \leqslant C e^{C\overline{V}(t)} \big(\overline{V}(t) \|a_j\|_{L^p} + 2^{-N} \|a_j\|_{L^p}\big). \end{aligned}$$

将上面两式代入 (5.7), 就得

$$\|a_j\|_{L^p} \leqslant C e^{C\overline{V}(t)} \Big(\sum_{|k-j| \leqslant N} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^p} + 2^{-N} \|a_j\|_{L^p} + \overline{V}(t) \|a_j\|_{L^p} \Big).$$

选取 N 充分大, 满足

$$Ce^{C\overline{V}(T)}2^{-N} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{i.e.}, N \sim C\overline{V}(T),$$

就推得估计

$$\|a_j\|_{L_T^r L^p} \leqslant Ce^{C\overline{V}(T)}\Big(\sum_{|k-j|\leqslant N} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L_T^r L^p} + \overline{V}(T)\|a_j\|_{L_T^r L^p}\Big). \tag{5.8}$$

类似地, 可以推出

$$\|d_j\|_{L_T^r L^p} \leqslant Ce^{C\overline{V}(T)}\Big(\sum_{|k-j|\leqslant N} \|\Delta_k \bar{d}_j\|_{L_T^r L^p} + \overline{V}(T)\|d_j\|_{L_T^r L^p}\Big). \tag{5.9}$$

其次, 在 $|k-j| \leqslant N$ 情形下, 估计 $\|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L_T^r L^p}$ 与 $\|\Delta_k \bar{d}_j\|_{L_T^r L^p}$. 为此, 首先估计 $\bar{F}_j, \bar{G}_j, \bar{\mathcal{R}}_j$ 与 $\bar{\mathcal{Q}}_j$. 利用引理 2.5, 可见

$$\begin{aligned}
&\|\Delta_k \bar{F}_j\|_{L_T^1 L^p} \leqslant C2^{-(k-j)}e^{C\overline{V}(T)}\|F_j\|_{L_T^1 L^p},\\
&\|\Delta_k \bar{G}_j\|_{L_T^1 L^p} \leqslant C2^{-(k-j)}e^{C\overline{V}(T)}\|G_j\|_{L_T^1 L^p}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

令

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{R}}_j^1 = \big(S_{j-1}v\cdot\nabla a_j - \Delta_j(v\cdot\nabla a)\big)\circ\psi_j,\\
&\bar{\mathcal{R}}_j^2 = \Lambda(d_j\circ\psi_j) - (\Lambda d_j)\circ\psi_j,\\
&\bar{\mathcal{Q}}_j^1 = \big((S_{j-1}v\cdot\nabla d_j) - \Delta_j(v\cdot\nabla d)\big)\circ\psi_j,\\
&\bar{\mathcal{Q}}_j^2 = \bar{\nu}(\Delta d_j)\circ\psi_j - \bar{\nu}\Delta(d_j\circ\psi_j) + (\Lambda a_j)\circ\psi_j - \Lambda(a_j\circ\psi_j),
\end{aligned}$$

对于 $s = s_p, \sigma = s$ 应用命题 4.4, 并使用 Bernstein 估计, 就得

$$\begin{aligned}
&\|S_{j-1}v\cdot\nabla a_j - \Delta_j(v\cdot\nabla a)\|_{L_T^1 L^p}\\
\leqslant&\|[v,\Delta_j]\cdot\nabla a\|_{L_T^1 L^p} + \|(S_{j-1}v - v)\cdot\nabla a_j\|_{L_T^1 L^p}\\
\leqslant&Cc(j)2^{-sj}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p,s}} + C\sum_{j'\geqslant j-1} 2^{j'}\|\Delta_{j'}v\|_{L_T^1 L^\infty}2^{j-j'}\|a_j\|_{L_T^\infty L^p}\\
\leqslant&Cc(j)2^{-sj}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p,s}},
\end{aligned}$$

借助引理 2.4、引理 2.1 (a) 及上述估计, 容易推出

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k\bar{\mathcal{R}}_j^1\|_{L_T^1 L^p} &\leqslant Ce^{C\overline{V}(T)}\|S_{j-1}v\cdot\nabla a_j - \Delta_j(v\cdot\nabla a)\|_{L_T^1 L^p}\\
&\leqslant Cc(j)2^{-sj}e^{C\overline{V}(T)}\overline{V}(T)\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s}}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

利用交换子估计 (引理 2.6), 容易推出

$$\|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j^2(t)\|_{L^p} \leqslant C 2^j e^{C\overline{V}(t)} \overline{V}(t)^{\frac{1}{2}} \|d_j\|_{L^p}. \tag{5.12}$$

类似地, 也有

$$\|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j^1\|_{L_T^1 L^p} \leqslant C c(j) 2^{-(s-1)j} e^{C\overline{V}(T)} \overline{V}(T) \|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s_p-1,s-1}}, \tag{5.13}$$

$$\|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j^2(t)\|_{L^p} \leqslant C e^{C\overline{V}(t)} \overline{V}(t)^{\frac{1}{2}} \big(2^{2j}\|d_j\|_{L^p} + 2^j \|a_j\|_{L^p}\big). \tag{5.14}$$

现在估计 $\|(\Delta_k \bar{a}_j, \Delta_k \bar{d}_j)\|_{L_T^r L^p}$. 既然 $(\bar{a}_j, \bar{d}_j)$ 满足 (5.5), 它可以通过 Green 矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} \Delta_k \bar{a}_j \\ \Delta_k \bar{d}_j \end{pmatrix} = \mathcal{G}(x,t) * \begin{pmatrix} \Delta_k a_j^0 \\ \Delta_k d_j^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{G}(x, t-\tau) * \begin{pmatrix} \Delta_k \bar{F}_j + \Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j \\ \Delta_k \bar{G}_j + \Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j \end{pmatrix} (\tau) d\tau.$$

分两种情形来讨论:

情形 1. $2^k > R_0$. 根据引理 3.2 (b), 有

$$\begin{aligned} \Delta_k \bar{a}_j(t,x) = & e^{-\bar{\nu}^{-1} t} \Delta_k a_j^0 + \mathcal{G}^1 * \Delta_k d_j^0 + \mathcal{G}^2 * \Delta_k a_j^0 \\ & + \int_0^t \big\{ e^{-\bar{\nu}^{-1}(t-\tau)} + \mathcal{G}^2(x, t-\tau) * \big\} \big(\Delta_k \bar{F}_j + \Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j\big)(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t \mathcal{G}^1(x, t-\tau) * \big(\Delta_k \bar{G}_j + \Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j\big)(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

这里数量函数 $\mathcal{G}^2$ 表示对角矩阵 (3.9) 中的第一个非零元素. 注意到 $2^k > R_0$, 应用命题 3.3 (c), 容易推出

$$\begin{aligned} \|\Delta_k \bar{a}_j(t)\|_{L^p} \leqslant & C e^{-ct} \|\Delta_k a_j^0\|_{L^p} + C 2^{-k} e^{-ct} \|\Delta_k d_j^0\|_{L^p} \\ & + C \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \big(\|\Delta_k \bar{F}_j(\tau)\|_{L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j(\tau)\|_{L^p}\big) d\tau \\ & + C 2^{-k} \int_0^t e^{-c(t-\tau)} \big(\|\Delta_k \bar{G}_j(\tau)\|_{L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j(\tau)\|_{L^p}\big) d\tau. \end{aligned}$$

两边关于 t 取 L^r 范数, 并利用 Young 不等式就得

$$\begin{aligned} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L_T^r L^p} \leqslant & C\big(\|\Delta_k a_j^0\|_{L^p} + 2^{-k}\|\Delta_k d_j^0\|_{L^p} + \|\Delta_k \bar{F}_j\|_{L_T^1 L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j\|_{L_T^1 L^p}\big) \\ & + C 2^{-k} \big(\|\Delta_k \bar{G}_j\|_{L_T^1 L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j\|_{L_T^1 L^p}\big). \end{aligned} \tag{5.15}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned}\Delta_k\bar{d}_j(t,x)=&\mathcal{G}^1*\Delta_k a_j^0+e^{\bar{\nu}\Delta t}\Delta_k d_j^0+\mathcal{G}^2*\Delta_k d_j^0\\&+\int_0^t\mathcal{G}^1(x,t-\tau)*\big(\Delta_k\bar{F}_j+\Delta_k\bar{\mathcal{R}}_j\big)(\tau)d\tau\\&+\int_0^t\big(e^{\bar{\nu}\Delta(t-\tau)}+\mathcal{G}^2(x,t-\tau)*\big)\big(\Delta_k\bar{G}_j+\Delta_k\bar{\mathcal{Q}}_j\big)(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

这里数量函数 $\mathcal{G}^2$ 表示对角矩阵 (3.9) 中的第二个非零元素. 完全类似于 (5.15) 的证明过程, 容易推得

$$\begin{aligned}\|\Delta_k\bar{d}_j\|_{L_T^rL^p}\leqslant&C\Big(2^{-k}\|\Delta_k a_j^0\|_{L^p}+2^{-\frac{2}{r}k}\|\Delta_k d_j^0\|_{L^p}\\&+2^{-k}\big(\|\Delta_k\bar{F}_j\|_{L_T^1L^p}+\|\Delta_k\bar{\mathcal{R}}_j^1\|_{L_T^1L^p}\big)+2^{-k}\|\Delta_k\bar{\mathcal{R}}_j^2\|_{L_T^rL^p}\\&+2^{-\frac{2}{r}k}\big(\|\Delta_k\bar{G}_j\|_{L_T^1L^p}+\|\Delta_k\bar{\mathcal{Q}}_j^1\|_{L_T^1L^p}\big)+2^{-2k}\|\Delta_k\bar{\mathcal{Q}}_j^2\|_{L_T^rL^p}\Big).\end{aligned}\tag{5.16}$$

将 (5.10)~(5.14) 代入到 (5.15) 和 (5.16), 然后关于 k 求和, 就可推知

$$\begin{aligned}\sum_{|k-j|\leqslant N,2^k>R_0}\|\Delta_k\bar{a}_j\|_{L_T^rL^p}\leqslant&Ce^{C\overline{V}(T)}\Big\{\|a_j^0\|_{L^p}+2^{-j}\|d_j^0\|_{L^p}+\overline{V}(T)^{\frac12}\big(\|a_j\|_{L_T^1L^p}\\&+2^j\|d_j\|_{L_T^1L^p}\big)+\|F_j\|_{L_T^1L^p}+2^{-j}\|G_j\|_{L_T^1L^p}\\&+2^{-sj}c(j)\overline{V}(T)\big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s}}+\|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1}}\big)\Big\},\end{aligned}\tag{5.17}$$

及

$$\begin{aligned}&\sum_{|k-j|\leqslant N,2^k>R_0}\|\Delta_k\bar{d}_j\|_{L_T^rL^p}\\\leqslant&Ce^{C\overline{V}(T)}\Big\{2^{-j}\|a_j^0\|_{L^p}+2^{-\frac{2}{r}j}\|d_j^0\|_{L^p}\\&+\overline{V}(T)^{\frac12}\big(2^{-j}\|a_j\|_{L_T^rL^p}+\|d_j\|_{L_T^rL^p}\big)+2^{-j}\|F_j\|_{L_T^1L^p}+2^{-\frac{2}{r}j}\|G_j\|_{L_T^1L^p}\\&+c(j)2^{-(s-1+\frac{2}{r})j}\overline{V}(T)\big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s}}+\|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1}}\big)\Big\}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

这里用到了 $2^N\sim e^{C\overline{V}(T)}$ 及对于固定的 j, 求和是有限的 (最多 $2N+1$).

情形 2. $2^k\leqslant R_0$. 注意到

$$2^k\geqslant 2^{j-N}\geqslant R_02^{-N}\sim R_0e^{-C\overline{V}(T)}.$$

对于 $b\sim e^{-C\overline{V}(T)}$ 应用命题 3.3 (b), 就推知

$$\begin{aligned}&\|\Delta_k\bar{a}_j(t)\|_{L^p}+\|\Delta_k\bar{d}_j(t)\|_{L^p}\\\leqslant&Ce^{C\overline{V}(T)}e^{-c2^{2k}t}\big(\|\Delta_k a_j^0\|_{L^p}+\|\Delta_k d_j^0\|_{L^p}\big)\end{aligned}$$

$$
+ Ce^{C\overline{V}(T)} \int_0^t e^{-c2^{2k}(t-\tau)} \big(\|\Delta_k \bar{F}_j(\tau)\|_{L^p} + \|\Delta_k \bar{G}_j(\tau)\|_{L^p}
+ \|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j(\tau)\|_{L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j(\tau)\|_{L^p} \big) d\tau.
$$

两边关于 t 取 L^r 范数, 并利用 Young 不等式就得

$$
\begin{aligned}
&\|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^r_T L^p} + \|\Delta_k \bar{d}_j\|_{L^r_T L^p} \\
\leqslant & Ce^{C\overline{V}(T)} \Big\{ 2^{-\frac{2}{r}k} \big(\|\Delta_k a_j^0\|_{L^p} + \|\Delta_k d_j^0\|_{L^p} + \|\Delta_k \bar{F}_j\|_{L^1_T L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j^1\|_{L^1_T L^p} \\
& + \|\Delta_k \bar{G}_j\|_{L^1_T L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j^1\|_{L^1_T L^p} \big) + 2^{-2k} \big(\|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j^2\|_{L^r_T L^p} + \|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j^2\|_{L^r_T L^p} \big) \Big\}.
\end{aligned}
$$

将 (5.10)~(5.14) 代入上式, 两边关于 k 求和, 就得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|k-j|\leqslant N, 2^k \leqslant R_0} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^r_T L^p} + \|\Delta_k \bar{d}_j\|_{L^r_T L^p} \\
\leqslant & Ce^{C\overline{V}(T)} \Big\{ 2^{-\frac{2}{r}j} \big(\|a_j^0\|_{L^p} + \|d_j^0\|_{L^p} \big) \\
& + 2^{-\frac{2}{r}j} \big(\|F_j\|_{L^1_T L^p} + \|G_j\|_{L^1_T L^p} \big) + \overline{V}(T)^{\frac{1}{2}} \big(2^{-j} \|a_j\|_{L^r_T L^p} + \|d_j\|_{L^r_T L^p} \big) \\
& + c(j) \overline{V}(T) \big(2^{-(s+\frac{2}{r})j} \|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{sp-1,s}_{2,p}} + 2^{-(s-1+\frac{2}{r})j} \|d\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{sp-1,s-1}_{2,p}} \big) \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

综合 (5.17)~(5.19) 中的估计, 并注意到 $2^k \leqslant R_0$, 就得

$$
R_0 < 2^j \leqslant 2^{k+N} \leqslant R_0 2^N \sim R_0 e^{C\overline{V}(T)},
$$

对于任意的 $1 \leqslant r \leqslant \infty$, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|k-j|\leqslant N} 2^{js} \|\Delta_k \bar{a}_j\|_{L^r_T L^p} + 2^{j(s-1+\frac{2}{r})} \|\Delta_k \bar{d}_j\|_{L^r_T L^p} \\
\leqslant & Ce^{C\overline{V}(T)} \Big\{ 2^{js} \big(\|a_j^0\|_{L^p} + 2^{-j} \|d_j^0\|_{L^p} \big) \\
& + \overline{V}(T)^{\frac{1}{2}} \big(2^{j(s-1+\frac{2}{r})} \|d_j\|_{L^r_T L^p} + 2^{js} \|a_j\|_{L^r_T L^p \cap L^1_T L^p} + 2^{j(s+1)} \|d_j\|_{L^1_T L^p} \big) \\
& + 2^{js} \|F_j\|_{L^1_T L^p} + 2^{j(s-1)} \|G_j\|_{L^1_T L^p} + c(j) \overline{V}(T) \|(a,d)\|_{\mathcal{E}^s_T} \Big\}.
\end{aligned}
$$

结合估计 (5.8) 及 (5.9) 就意味着

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j > R_0} \big(2^{js} \|a_j\|_{L^\infty_T L^p} + 2^{js} \|a_j\|_{L^1_T L^p} + 2^{j(s-1)} \|d_j\|_{L^\infty_T L^p} + 2^{j(s+1)} \|d_j\|_{L^1_T L^p} \big) \\
\leqslant & Ce^{C\overline{V}(T)} \Big\{ \sum_{2^j > R_0} 2^{js} \big(\|a_j^0\|_{L^p} + 2^{-j} \|d_j^0\|_{L^p} \big) + \|F\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{sp-1,s}_{2,p}} \\
& + \|G\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{sp-1,s-1}_{2,p}} + \big(\overline{V}(T) + \overline{V}(T)^{\frac{1}{2}} \big) \|(a,d)\|_{\mathcal{E}^s_T} \Big\}.
\end{aligned} \tag{5.20}
$$

定理 5.1 的证明 利用 (5.3) 与 (5.20), 推得

$$
\begin{aligned}
&\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s} \cap L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp+1,s}} + \|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1} \cap L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp+1,s+1}} \\
\leqslant & Ce^{C\overline{V}(T)}\Big\{\|a_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s}} + \|d_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1}} + \|F\|_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s}} + \|G\|_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1}} \\
& + \|v\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}} \big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'},s}} + \|d\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'},sp}}\big) \\
& + \|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp,s}} + \|d\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp,s}}\big) + \big(\overline{V}(T) + \overline{V}(T)^{\frac{1}{2}}\big)\|(a,d)\|_{\mathcal{E}_T^s}\Big\}.
\end{aligned}
$$

再利用 Young 不等式及下面的插值不等式

$$
\begin{aligned}
&\|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \leqslant \|v\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} \|v\|^{\frac{1}{2}}_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}, \\
&\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}} \leqslant \|v\|^{\frac{1}{p'}}_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} \|v\|^{\frac{1}{p}}_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}, \\
&\|d\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'},sp}} \leqslant \|d\|^{\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1}} \|d\|^{\frac{1}{p'}}_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp+1,s+1}}, \\
&\|d\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp,s}} \leqslant \|d\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s-1}} \|d\|^{\frac{1}{2}}_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp+1,s+1}}, \\
&\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'} \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s-\frac{n}{p}+\frac{n}{p'},s}} \leqslant \|a\|^{\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s}} \|a\|^{\frac{1}{p'}}_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp+1,s}}, \\
&\|a\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp,s}} \leqslant \|a\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp-1,s}} \|a\|^{\frac{1}{2}}_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{sp+1,s}},
\end{aligned}
$$

就给出了定理 5.1 的证明. □

定理 5.2 的证明 由于证明方法与定理 5.1 完全类似, 这里仅仅指出呈现不同的地方. 利用命题 4.3 (c), 就得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(s-1)}\|\Delta_j(v\nabla a)\|_{L_T^1 L^2} \leqslant C\big(\|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \|a\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{B}_{2,1}^s} + \|a\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{B}_{2,1}^s}\big), \\
&\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(s-1)}\|\Delta_j(v\nabla d)\|_{L_T^1 L^2} \leqslant C\big(\|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \|d\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{B}_{2,1}^s} + \|d\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{B}_{2,1}^s}\big).
\end{aligned}
$$

则在低频的情形下, 推得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j\leqslant R_0} 2^{j(s-1+\frac{2}{r})}(\|a_j\|_{L_T^r L^2} + \|d_j\|_{L_T^r L^2}) \\
\leqslant & C\Big(\sum_{2^j\leqslant R_0} 2^{j(s-1)}(\|a_j^0\|_{L^2} + \|d_j^0\|_{L^2}) + \|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \|(a,d)\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{B}_{2,1}^s} \\
& + \|v\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{B}_{2,1}^s} \|(a,d)\|_{\mathcal{L}_T^2 \dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} + \|F\|_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}^{s-1,s}} + \|G\|_{L_T^1 \dot{B}_{2,1}^{s-1}}\Big). \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

利用命题 4.4 与引理 2.4, 推出

$$\|\Delta_k \bar{\mathcal{R}}_j^1\|_{L_T^1 L^2} \leqslant Cc(j)2^{-sj} e^{\overline{V}(T)}\overline{V}(T)\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{B}_{2,1}^s},$$
$$\|\Delta_k \bar{\mathcal{Q}}_j^1\|_{L_T^1 L^2} \leqslant Cc(j)2^{-(s-1)j} e^{\overline{V}(T)}\overline{V}(T)\|d\|_{\mathcal{L}_T^\infty \dot{B}_{2,1}^{s-1}}.$$

则在高频的情形下, 推得

$$\begin{aligned}
&\sum_{2^j>R_0} \left(2^{js}\|a_j\|_{L_T^\infty L^2} + 2^{js}\|a_j\|_{L_T^1 L^2} + 2^{j(s-1)}\|d_j\|_{L_T^\infty L^2} + 2^{j(s+1)}\|d_j\|_{L_T^1 L^2}\right)\\
\leqslant & Ce^{C\overline{V}(T)}\Big\{\sum_{2^j>R_0} 2^{js}\left(\|a_j^0\|_{L^2} + 2^{-j}\|d_j^0\|_{L^2}\right) + \|F\|_{L_T^1 \dot{\mathcal{B}}^{s-1,s}} + \|G\|_{L_T^1 \dot{B}_{2,1}^{s-1}}\\
&+ \left(\overline{V}(T) + \overline{V}(T)^{\frac{1}{2}}\right)\|(a,d)\|_{E_T^s}\Big\}.
\end{aligned}$$

再结合估计 (5.21) 就得定理 5.2 的结论. □

6.6 具高振荡的初值问题的整体适定性

本节完成定理 1.2 的证明, 分几个步骤来完成:

第一步. 先验估计.

命题 6.1 设 $2 \leqslant p < 2n$, $p \leqslant \min\left(4, \dfrac{2n}{n-2}\right)$. 假设 (a,d,Ω) 是 Cauchy 问题 (1.6) 在 $[0,T]$ 上满足

$$\|a\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{1}{2}$$

的一个光滑解. 则有如下的先验估计:

$$\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}} \leqslant Ce^{C\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}}\left\{\|(a_0,v_0)\|_{\mathcal{E}_0^{\frac{n}{p}}} + \|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}^{\frac{3}{2}}\left(1+\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}\right)^{\frac{n}{2}+2}\right\}, \quad (6.1)$$

这里 $\|(a_0,v_0)\|_{\mathcal{E}_0^{\frac{n}{p}}} \triangleq \|a_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}} + \|v_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}$.

证明 利用定理 5.1, 有

$$\begin{aligned}
\|(a,d)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}} \leqslant & Ce^{C\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}}\Big\{\|(a_0,d_0)\|_{\mathcal{E}_0^{\frac{n}{p}}} + \left(\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{2}} + \|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}\right)\\
&\times \|(a,d)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}} + \|F\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}} + \|G\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\Big\}.
\end{aligned}$$

根据命题 2.7, 有

$$\|\Omega\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} + \|\Omega\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}} \leqslant C(\|\Omega_0\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}} + \|H\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}).$$

因此, 就推知

$$\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}} \leqslant Ce^{C\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}}\Big\{\|(a_0,v_0)\|_{\mathcal{E}_0^{\frac{n}{p}}} + \Big(\|(a,v)\|^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}} + \|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}\Big) \\ \times \|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}} + \|F\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}} + \|(G,H)\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\Big\}. \tag{6.2}$$

这里用到了如下事实:

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^r\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} \approx \|d\|_{\mathcal{L}_T^r\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}} + \|\Omega\|_{\mathcal{L}_T^r\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{s,\sigma}}, \quad \forall\, s,\sigma\in\mathbb{R},\ \ r\in[1,\infty].$$

现在需要估计 (6.2) 中的非线性项 F, G 与 H. 通过表达式

$$\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{n}{2p} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$$

来定义 $\widetilde{p}$, 记 $\widetilde{p}'$ 表示 $\widetilde{p}$ 的 Hölder 共轭指标. 由于 $2\leqslant p<2n$, $p\leqslant \dfrac{2n}{n-2}$, 对于

$$s=\frac{n}{p},\quad t=\frac{n}{p'}-1,\quad \widetilde{s}=\frac{n}{2}-1,\quad \widetilde{t}=\frac{n}{2},\quad \gamma=0,$$

应用命题 4.3 (b), 就得

$$\begin{aligned}&\sum_{2^j\leqslant R_0} 2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\Delta_j F\|_{L_T^1L^2}\\ \leqslant& C\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}}\|\mathrm{div}v\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'}-1,\frac{n}{2}-1}} + C\|\mathrm{div}v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\\ \leqslant& C\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{2}}} + C\|v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}.\end{aligned}$$

对于 $\sigma=\tau=\dfrac{n}{p}$, 应用命题 4.3 (a) 就得

$$\begin{aligned}\sum_{2^j>R_0} 2^{j\frac{n}{p}}\|\Delta_j F\|_{L_T^1L^p} &\leqslant C\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|\mathrm{div}v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\\ &\leqslant C\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}.\end{aligned}$$

由此推出

$$\|F\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}} \leqslant C\Big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\tilde{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{2}}} + \|v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \\ + \|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}\Big). \tag{6.3}$$

类似地, 有

$$
\begin{aligned}
&\|v\nabla v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}+\|v\nabla d\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\\
\leqslant &C\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}}\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{2}}}+C\|v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}.
\end{aligned}
$$

对于 $\gamma=\dfrac{n}{p}-\dfrac{n}{2}$, 应用命题 4.3 (b) 及命题 4.5, 就得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j\leqslant R_0}2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\Delta_j(K(a)\nabla a)\|_{L_T^1L^2}\\
\leqslant &C\|K(a)\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}}\|\nabla a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'}-1,\frac{n}{p}-1}}+C\|\nabla a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\|K(a)\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\\
\leqslant &C\big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{p}}}+\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\big)\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\big)^{\frac{n}{2}+1},
\end{aligned}
$$

特别, 对于 $\gamma=-1$, 也有估计

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j\leqslant R_0}2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\Delta_j(L(a)\mathcal{A}v)\|_{L_T^1L^2}\\
\leqslant &C\|L(a)\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}}\|\mathcal{A}v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'}-1,\frac{n}{2}-1+\gamma}}+C\|\mathcal{A}v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\|L(a)\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\\
\leqslant &C\big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{2}}}+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}\big)\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\big)^{\frac{n}{2}+1}.
\end{aligned}
$$

另一方面, 根据命题 4.3 (a) 及命题 4.5, 容易看出

$$
\begin{aligned}
&\sum_{2^j>R_0}2^{j(\frac{n}{p}-1)}(\|\Delta_j(K(a)\nabla a)\|_{L_T^1L^p}+\|\Delta_j(L(a)\mathcal{A}v)\|_{L_T^1L^p})\\
\leqslant &C\|K(a)\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|\nabla a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}+C\|L(a)\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|\mathcal{A}v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\\
\leqslant &C\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\big)^{\frac{n}{2}+1}\big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}\big).
\end{aligned}
$$

因此, 推得

$$
\begin{aligned}
\|(G,H)\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\leqslant &C\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\big)^{\frac{n}{2}+1}\Big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\\
&+\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}}\big(\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{p}}}+\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{2}}}\big)\\
&+\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}}\|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}\Big).
\end{aligned}\tag{6.4}
$$

注意到插值不等式

$$\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}} \leqslant \|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{\bar{p}'}} \|a\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{\bar{p}}},$$

$$\|a\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{p}}} \leqslant \|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{\bar{p}}} \|a\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{\bar{p}'}},$$

$$\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \leqslant \|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{2}} \|a\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}'}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p'},\frac{n}{2}}} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}^{\frac{1}{\bar{p}}} \|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}^{\frac{1}{\bar{p}'}},$$

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^{\bar{p}}\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{2n}{p}-\frac{n}{2}}} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}^{\frac{1}{\bar{p}'}} \|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}^{\frac{1}{\bar{p}}},$$

$$\|v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}}^{\frac{1}{2}},$$

及

$$\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}} \leqslant C\|a\|_{\mathcal{L}_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}, \qquad p \leqslant \frac{2n}{n-2},$$

将 (6.3), (6.4) 代入 (6.2), 就得 (6.1). □

命题 6.2 在命题 6.1 的假设条件下, 成立

$$\|(a,v)\|_{E_T^{\frac{n}{2}}} \leqslant Ce^{C\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}}\Big\{\|(a_0,v_0)\|_{E_0^{\frac{n}{2}}} + \|(a,v)\|_{E_T^{\frac{n}{2}}}\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{2}} \times \big(1+\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}\big)^{\frac{n}{2}+2}\Big\}, \tag{6.5}$$

这里

$$\|(a_0,v_0)\|_{E_0^{\frac{n}{2}}} \triangleq \|a_0\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}} + \|v_0\|_{\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}}.$$

证明 鉴于与命题 6.1 的证明是类似的, 这里仅仅给出主要的区别. 利用定理 5.2 与命题 2.7, 容易看出

$$\|(a,v)\|_{E_T^{\frac{n}{2}}} \leqslant Ce^{C\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}}\Big\{\|(a_0,v_0)\|_{E_0^{\frac{n}{2}}} + \big(\|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}^{\frac{1}{2}} + \|(a,v)\|_{\mathcal{E}_T^{\frac{n}{p}}}\big)\|(a,v)\|_{E_T^{\frac{n}{2}}} + \|F\|_{L_T^1\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}} + \|(G,H)\|_{L_T^1\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}}\Big\}. \tag{6.6}$$

应用命题 4.3 (c) 就推知

$$\sum_{2^j\leqslant R_0} 2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\Delta_j F\|_{L_T^1L^2} \leqslant C\|a\|_{L_T^\infty\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\|\mathrm{div}v\|_{L_T^1\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}}} + C\|\mathrm{div}v\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}}\|a\|_{\mathcal{L}_T^2\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}}},$$

$$\sum_{2^j>R_0} 2^{j\frac{n}{2}}\|\Delta_j F\|_{L^1_T L^2} \leqslant C\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p}}\|\mathrm{div} v\|_{L^1_T \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}} + C\|\mathrm{div} v\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p}}\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}}.$$

此式结合插值不等式及引理 2.1 (a) 就推知

$$\|F\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}} \leqslant C\|(a,v)\|_{\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}_T}\|(a,v)\|_{E^{\frac{n}{2}}_T}. \tag{6.7}$$

类似地, 还有

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(\frac{n}{2}-1)}(\|\Delta_j(v\nabla d)\|_{L^1_T L^2} + \|\Delta_j(v\nabla v)\|_{L^1_T L^2})\\ \leqslant& C\|v\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p}}\|v\|_{L^1_T \dot{B}^{\frac{n}{2}+1}_{2,1}} + C\|v\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}}\|v\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}}.\end{aligned}$$

从命题 4.3 (c) 和命题 4.5, 推出

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\Delta_j(K(a)\nabla a)\|_{L^1_T L^2}\\ \leqslant& C\|K(a)\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p}}\|\nabla a\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}} + C\|\nabla a\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p}}\|K(a)\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}}\\ \leqslant& C\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}_{2,p}}\big)^{\frac{n}{2}+1}\|a\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p}}\|a\|_{\mathcal{L}^2_T \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}},\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(\frac{n}{2}-1)}\|\Delta_j(L(a)\mathcal{A}v)\|_{L^1_T L^2}\\ \leqslant& C\|L(a)\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2},\frac{n}{p}}_{2,p}}\|\mathcal{A}v\|_{L^1_T \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}} + C\|\mathcal{A}v\|_{L^1_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p}}\|L(a)\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}}\\ \leqslant& C\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}_{2,p}}\big)^{\frac{n}{2}+1}\|(a,v)\|_{\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}_T}\|(a,v)\|_{E^{\frac{n}{2}}_T}.\end{aligned}$$

因此, 推得

$$\|G\|_{L^1_T \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}} + \|H\|_{L^1_T \dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}} \leqslant C\big(1+\|a\|_{\mathcal{L}^\infty_T \dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{p},\frac{n}{p}}_{2,p}}\big)^{\frac{n}{2}+1}\|(a,v)\|_{\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}_T}\|(a,v)\|_{E^{\frac{n}{2}}_T}.$$

此式结合 (6.6) 及 (6.7) 就意味着估计 (6.5). □

第二步. 逼近解与一致性估计.

近似解的构造主要基于如下的局部存在性定理:

定理 6.3　假设 $\rho_0-\bar{\rho}\in\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}$, $u_0\in\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}$ 且 $\rho_0>0$ 有非零的下界. 存在一个正时间 T 满足 Cauchy 问题 (1.1) 具有唯一的解 (ρ,u), 满足 $\rho>0$ 有非零的下界,

并且

$$\rho-\bar{\rho}\in C([0,T);\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}),\quad \text{及 } u\in C([0,T);\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1})\cap L^1(0,T;\dot{B}^{\frac{n}{2}+1}_{2,1}).$$

进而, 解 (ρ,u) 可以连续地扩张到 $t>T$ 的充分条件是下面三条成立:

(a) 函数 $\rho-\bar{\rho}\in L^\infty(0,T;\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1})$;

(b) 函数 $\rho>0$ 具有非零的下界;

(c) $\displaystyle\int_0^T\|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty}d\tau<\infty$.

除此之外, 注意到, 若 $\rho_0-\bar{\rho}\in\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}$, 利用命题 2.9 及引理 2.2 (a), 容易验证 $\rho-\bar{\rho}\in C([0,T);\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1})$. 局部存在性的证明是经典的, 可见文献 [Dan7].

为了应用局部适定性定理 6.3, 需要如下简单预备性引理:

引理 6.4 设 $p\geqslant 2$. 对于任意的满足 $\rho_0\geqslant\bar{\rho}$ 的初始函数

$$(\rho_0-\bar{\rho},u_0)\in\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}_{2,p}\times\big(\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p}\big)^n,$$

存在一个初始函数序列 $\{(\rho_0^{(k)},u_0^{(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$, $(\rho_0^{(k)}-\bar{\rho},u_0^{(k)})\in\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}}\times\big(\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1}\big)^n$ 满足

$$\|\rho_0^{(k)}-\rho_0\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}_{2,p}}\longrightarrow 0,\quad \|u_0^{(k)}-u_0\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p}}\longrightarrow 0,\quad \text{当 } k\to\infty, \tag{6.8}$$

及

$$\rho_0^{(k)}\geqslant\frac{\bar{\rho}}{2},\qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

证明是简单的, 读者可作为练习.

设 $(\rho_0^{(k)},u_0^{(k)})$ 如同引理 6.4 中的序列. 则局部存在性定理 6.3 确保存在一个最大的存在时间 $T_k>0$, 使得具初始条件 $(\rho_0^{(k)},u_0^{(k)})$ 的 Cauchy 问题 (1.1) 存在唯一的解 $(\rho^{(k)},u^{(k)})$, $\rho^{(k)}>0$ 具有非零的下界, 满足

$$\rho^{(k)}-\bar{\rho}\in C([0,T_k);\dot{B}^{\frac{n}{2}}_{2,1}\cap\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1})\quad\text{和}\quad u^{(k)}\in C([0,T_k);\dot{B}^{\frac{n}{2}-1}_{2,1})\cap L^1(0,T_k;\dot{B}^{\frac{n}{2}+1}_{2,1}).$$

利用 Besov 空间的定义与 Bernstein 不等式, 容易验证

$$\rho^{(k)}-\bar{\rho}\in C([0,T_k);\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}_{2,p})\quad\text{和}\quad u^{(k)}\in C([0,T_k);\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p})\cap L^1(0,T_k;\dot{\mathcal{B}}^{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{p}+1}_{2,p}).$$

令

$$a^{(k)}(t,x)=\frac{\rho^{(k)}(\varpi^{-2}t,\varpi^{-1}x)}{\bar{\rho}}-1,\quad v^{(k)}(t,x)=\varpi^{-1}u^{(k)}(\varpi^{-2}t,\varpi^{-1}x).$$

则从 (1.12) 及 (6.8), 存在 C_0 使得

$$\|(a_0^{(k)},v_0^{(k)})\|_{\mathcal{E}_0^{\frac{n}{p}}}\leqslant C_0\eta,$$

用 M 表示待定常数, 定义

$$T_k^* \triangleq \sup\Big\{t \in [0, T_k);\ \|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{\mathcal{E}_t^{\frac{n}{p}}} \leqslant M\eta\Big\}.$$

断言: $T_k^* = T_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

利用连续性方法, 仅需证明: 对于任意的 $k \in \mathbb{N}$, 成立

$$\|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{\mathcal{E}_{T_k^*}^{\frac{n}{p}}} \leqslant \frac{3}{4} M\eta. \tag{6.9}$$

事实上, 注意到 $\|a^{(k)}\|_{L^\infty} \leqslant C_1 \|a^{(k)}\|_{\dot{\mathcal{B}}_{2,p}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}}$, 选取 η 使得

$$M\eta \leqslant \frac{1}{2C_1}$$

满足

$$\|a^{(k)}\|_{L^\infty([0,T_k^*)\times\mathbb{R}^n)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

因此, 应用命题 6.1 就得

$$\|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{\mathcal{E}_{T_k^*}^{\frac{n}{p}}} \leqslant Ce^{CM\eta}\Big\{C_0\eta + (M\eta)^{\frac{3}{2}}(1 + M\eta)^{\frac{n}{2}+2}\Big\}. \tag{6.10}$$

令 $M = 4CC_0$, 然后选取 η 充分小, 满足

$$e^{CM\eta} \leqslant \frac{3}{2}, \qquad C(M\eta)^{\frac{1}{2}}(1 + M\eta)^{\frac{n}{2}+2} \leqslant \frac{1}{4},$$

则从不等式 (6.10) 就导出估计 (6.9). 总之, 在 $[0, T_k)$ 上构造的 Cauchy 问题 (1.1) 的逼近解序列 $(\rho^{(k)}, u^{(k)})$ 满足

$$\|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{\mathcal{E}_{T_k}^{\frac{n}{p}}} \leqslant M\eta, \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.11}$$

其次, **断言**: $T_k = +\infty, \forall\, k \in \mathbb{N}$.

利用定理 6.3 及 (6.11), 仅需证明 $a^{(k)} \in L^\infty(0, T_k; \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}})$. 另外, 利用命题 6.2 及 (6.11), 推出

$$\begin{aligned}\|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{E_{T_k}^{\frac{n}{2}}} \leqslant & Ce^{CM\eta}\Big\{\|(a_0^{(k)}, v_0^{(k)})\|_{E_0^{\frac{n}{2}}} \\ & + \|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{E_{T_k}^{\frac{n}{2}}}(M\eta)^{\frac{1}{2}}(1 + M\eta)^{\frac{n}{2}+2}\Big\},\end{aligned}$$

此就意味着估计

$$\|(a^{(k)}, v^{(k)})\|_{E_{T_k}^{\frac{n}{2}}} \leqslant C\|(a_0^{(k)}, v_0^{(k)})\|_{E_0^{\frac{n}{2}}}.$$

第三步. 存在性.

采用紧性方法证明解的存在性. 利用 (6.11), 容易验证:

(1) $a^{(k)}$ 在 $L^\infty(0,\infty;\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1})$ 中一致有界;

(2) $v^{(k)}$ 在 $L^\infty(0,\infty;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})\cap L^1(0,\infty;\dot{B}^{\frac{n}{p}+1}_{p,1})$ 中一致有界.

利用插值定理, 对于任意的 $\varepsilon\in[-1,1]$, 还有

$$v^{(k)}\ \text{在}\ L^{\frac{2}{1-\varepsilon}}(0,\infty;\dot{B}^{\frac{n}{p}-\varepsilon}_{p,1})\ \text{中一致有界}.$$

记 $v_L^{(k)}$ 线性问题

$$\partial_t v_L^{(k)}-\mathcal{A}v_L^{(k)}=0,\quad v_L^{(k)}(0)=v_0^{(k)}$$

的一个解, 容易验证 $v_L^{(k)}$ 在空间 $L^\infty(0,\infty;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})\cap L^1(0,\infty;\dot{B}^{\frac{n}{p}+1}_{p,1})$ 中趋向于问题

$$\partial_t v_L-\mathcal{A}v_L=0,\quad v_L(0)=v_0$$

的解.

记 $\widetilde{a}^{(k)}\triangleq a^{(k)}-a_0^{(k)}$ 及 $\widetilde{v}^{(k)}\triangleq v^{(k)}-v_L^{(k)}$. 首先断言: $(\widetilde{a}^{(k)},\widetilde{v}^{(k)})$ 在

$$C^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})\times C^{\frac{2-\varsigma}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}),\quad \varsigma=\min\left(\frac{2n}{p}-1,1\right)$$

中一致有界. 回忆

$$\partial_t\widetilde{a}^{(k)}=-v^{(k)}\cdot\nabla a^{(k)}-\mathrm{div}v^{(k)}-a^{(k)}\mathrm{div}v^{(k)},$$

结合引理 2.2 就意味着 $\partial_t\widetilde{a}^{(k)}\in L^2\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1}$, 因此 $\widetilde{a}^{(k)}$ 在 $C^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})$ 中一致有界. 另一方面,

$$\partial_t\widetilde{v}^{(k)}=-v^{(k)}\cdot\nabla v^{(k)}+\mathcal{A}\widetilde{v}^{(k)}-\nabla a^{(k)}-L(a^{(k)})\mathcal{A}v^{(k)}-K(a^{(k)})\nabla a^{(k)}.$$

借助于引理 2.2 与命题 4.5, 有

$$\begin{aligned}&\|v^{(k)}\cdot\nabla v^{(k)}+L(a^{(k)})\mathcal{A}v^{(k)}\|_{L^{\frac{2}{2-\varsigma}}\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}}\\ \leqslant{}&C\|v^{(k)}\|_{L^2\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}}\|\nabla v^{(k)}\|_{L^{\frac{2}{1-\varsigma}}\dot{B}^{\frac{n}{p}-\varsigma-1}_{p,1}}\\ &+C(\|a^{(k)}\|_{L^\infty\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}})\|a^{(k)}\|_{L^\infty\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}}\|\mathcal{A}v^{(k)}\|_{L^{\frac{2}{2-\varsigma}}\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}}.\end{aligned}$$

Sobolev 嵌入 $\mathcal{B}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}_{2,p}\hookrightarrow\dot{B}^{\frac{n}{p}-\varsigma}_{p,1}$ 意味着 $\Lambda a^{(k)}\in L^\infty\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}$, 进而说明 $K(a^{(k)})\nabla a^{(k)}$ 在 $L^\infty\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}$ 中有界. 因此, 推知 $\partial_t\widetilde{v}^{(k)}\in L^{\frac{2}{2-\varsigma}}_{\mathrm{loc}}\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p}$, 此说明 $\widetilde{v}^{(k)}$ 在 $C^{\frac{2-\varsigma}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1})$ 中一致有界.

设 $\{\chi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个具有紧支集的光滑序列, 满足

$$\operatorname{supp}\chi_j\subset B(0,j+1);\quad 且\ \chi_j(x)=1,\ x\in B(0,j),\ j\in\mathbb{N}.$$

断言就确保对于任意的 $j\in\mathbb{N}$, $\{\chi_j\widetilde{a}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^{\frac12}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})$ 中一致有界, $\{\chi_j\widetilde{v}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^{\frac{2-\varsigma}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1})$ 中一致有界. 注意到对于任意的 $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 映射 $(\widetilde{a}^{(k)},\widetilde{v}^{(k)})\mapsto(\chi\widetilde{a}^{(k)},\chi\widetilde{v}^{(k)})$ 是

$$\big(\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1}\cap\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1}\big)\times\big(\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}\cap\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1}\big)\longrightarrow\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1}\times\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1}$$

的紧映射. 利用 Ascoli 定理与 Cantor 对角化过程, 存在某个函数 $(\widetilde{a},\widetilde{v})\in\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}$ 使得对于任意的 $j\in\mathbb{N}$, 当 k 趋向于 ∞(或在子序列意义下), 成立

$$\begin{aligned}&\chi_j\widetilde{a}^{(k)}\longrightarrow\chi_j\widetilde{a},\quad 在空间\ C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1}_{p,1})\ 中,\\&\chi_j\widetilde{v}^{(k)}\longrightarrow\chi_j\widetilde{v},\quad 在空间\ C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{n}{p}-1-\varsigma}_{p,1})\ 中.\end{aligned}\tag{6.12}$$

利用插值公式, 还有

$$\begin{aligned}&\chi_j a^{(k)}\longrightarrow\chi_j\widetilde{a},\quad 在空间\ C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{N}{p}-s}_{p,1})中,\quad\forall\,0<s\leqslant1,\\&\chi_j v^{(k)}\longrightarrow\chi_j\widetilde{v},\quad 在空间\ L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{B}^{\frac{N}{p}+s}_{p,1})\ 中,\quad\forall\,-1\leqslant s<1.\end{aligned}\tag{6.13}$$

利用 (6.12) 和 (6.13) 及标准的方法可以验证 $(\widetilde{a}+a_0,\widetilde{v}+v_L)$ 在分布意义下满足方程 (1.5). 最后, 按照 Danchin [Dan2] 的讨论, 可以证明

$$(a,v)\in C([0,\infty);\mathcal{B}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}}_{2,p})\times C([0,\infty);\mathcal{B}^{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{p}-1}_{2,p}).$$

第四步. 唯一性. 假设 $(\rho^1,u^1)\in\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}$ 及 $(\rho^2,u^2)\in\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}$ 是 Cauchy 问题 (1.1) 具有相同初值的两个解. 不失一般性, 无妨假设 (ρ^1,u^1) 满足

$$\|(\rho^1-\bar\rho,u^1)\|_{\mathcal{E}^{\frac{n}{p}}}\leqslant M\eta.\tag{6.14}$$

由于 $\rho^2-\bar\rho\in C([0,T];\mathcal{B}^{\frac{n}{2}-1,\frac{N}{p}}_{2,p})$ 及 $\rho^2(0,x)\geqslant\frac{\bar\rho}{2}$, 存在一个正的时间 T 满足

$$\rho^2(t,x)\geqslant\frac{\bar\rho}{3},\quad(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

令

$$a^{(k)}(t,x)=\frac{\rho^{(k)}(\varpi^{-2}t,\varpi^{-1}x)}{\bar\rho}-1,\quad v^{(k)}(t,x)=\varpi^{-1}u^{(k)}(\varpi^{-2}t,\varpi^{-1}x),\quad k=1,2,$$

$$\delta a=a^1-a^2,\quad\delta v=v^1-v^2.$$

利用 (1.5), 推知 $(\delta a, \delta u)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t \delta a + v^2 \cdot \nabla \delta a = \delta F, \\ \partial_t \delta v - \mathcal{A} \delta v = \delta G, \\ (\delta a, \delta v)|_{t=0} = (0, 0), \end{cases} \tag{6.15}$$

这里

$$\begin{aligned} \delta F = & -\delta v \cdot \nabla a^1 - \mathrm{div} \delta v - a^1 \mathrm{div} \delta v - \delta a \mathrm{div} v^2, \\ \delta G = & -\nabla \delta a - (v^1 \cdot \nabla v^1 - v^2 \cdot \nabla v^2) - L(a^1) \mathcal{A} v^1 + L(a^2) \mathcal{A} v^2 \\ & - K(a^1) \nabla a^1 + K(a^2) \nabla a^2. \end{aligned}$$

现记

$$V^i(t) = \int_0^t \|v^i(\tau)\|_{\dot{B}^{\frac{n}{p}+1}_{p,1}} d\tau, \qquad i = 1, 2,$$

A_T 是一个依赖 $\|a^1\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1})}$ 及 $\|a^2\|_{\mathcal{L}^\infty_T(\dot{B}^{\frac{n}{p}}_{p,1})}$ 的常数. 根据嵌入关系 $\mathcal{E}^{\frac{n}{p}} \subseteq \mathcal{E}^1 (p \leqslant n)$, 仅需证明解在空间 $\mathcal{E}^1$ 中的唯一性即可. 因此, 下面取 $p = n$.

应用命题 2.9 就得

$$\|\delta a(t)\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} \leqslant e^{CV^2(t)} \int_0^t \|\delta F(\tau)\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} d\tau. \tag{6.16}$$

根据引理 2.2, 就得

$$\|\delta F(\tau)\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} \leqslant C \|v^2\|_{\dot{B}^2_{p,1}} \|\delta a\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} + C(1 + \|a^1\|_{\dot{B}^1_{p,1}}) \|\delta v\|_{\dot{B}^1_{p,1}}.$$

将上式代入 (6.16), 利用 Gronwall 不等式就推出

$$\|\delta a(t)\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} \leqslant e^{CV^2(t)} \int_0^t (1 + \|a^1\|_{\dot{B}^1_{p,1}}) \|\delta v\|_{\dot{B}^1_{p,1}} d\tau. \tag{6.17}$$

应用命题 2.8 到 (6.15) 的第二个方程, 就得

$$\|\delta v(t)\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot{B}^1_{p,\infty})} + \|\delta v(t)\|_{\mathcal{L}^2_t(\dot{B}^0_{p,\infty})} \leqslant C \int_0^t \|\delta G(\tau)\|_{\dot{B}^{-1}_{p,\infty}} d\tau. \tag{6.18}$$

从引理 2.2 与命题 4.5, 推出

$$\begin{aligned} \|\delta G(t)\|_{\dot{B}^{-1}_{p,\infty}} \leqslant & C \|(v^1, v^2)\|_{\dot{B}^1_{p,1}} \|\delta v\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}} + A_t \|a^1\|_{\dot{B}^1_{p,1}} \|\delta v\|_{\dot{B}^1_{p,\infty}} \\ & + A_t (1 + \|v^2\|_{\dot{B}^2_{p,1}}) \|\delta a\|_{\dot{B}^0_{p,\infty}}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

选取 T 充分小使得

$$\|(v^1,v^2)\|_{L^1_T(\dot B^2_{p,1})\cap L^2_T(\dot B^1_{p,1})}\ll 1.$$

因此, 将 (6.19) 代入 (6.18), 对于任意的 $t\in[0,T]$, 推出

$$\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot B^1_{p,\infty})}\leqslant A_T\int_0^t\big(1+\|(v^1,v^2)\|_{\dot B^2_{p,1}}\big)\|\delta a\|_{\dot B^0_{p,\infty}}d\tau. \tag{6.20}$$

下面回忆第 1 章讨论的一个 log- 型不等式, 即

引理 6.5 设 $s\in\mathbb{R}$. 则对于任意的 $1\leqslant p,r\leqslant+\infty$ 及 $0<\varepsilon\leqslant 1$, 有

$$\|f\|_{\mathcal{L}^r_T(\dot B^s_{p,1})}\leqslant C\frac{\|f\|_{\mathcal{L}^r_T(\dot B^s_{p,\infty})}}{\varepsilon}\log\Big(e+\frac{\|f\|_{\mathcal{L}^r_T(\dot B^{s-\varepsilon}_{p,\infty})}+\|f\|_{\mathcal{L}^r_T(\dot B^{s+\varepsilon}_{p,\infty})}}{\|f\|_{\mathcal{L}^r_T(\dot B^s_{p,\infty})}}\Big).$$

根据引理 6.5, 推知

$$\|\delta v\|_{L^1_t(\dot B^1_{p,1})}\leqslant C\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot B^1_{p,\infty})}\log\Big(e+\frac{\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot B^0_{p,\infty})}+\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot B^2_{p,\infty})}}{\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot B^1_{p,\infty})}}\Big),$$

结合 (6.17) 与 (6.20) 就推出: 对于任意的 $t\in[0,T]$, 成立

$$\begin{aligned}\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_t(\dot B^1_{p,\infty})}\leqslant& e^{CV^2(t)}A_T\int_0^t\big(1+\|(v^1,v^2)\|_{\dot B^2_{p,1}}\big)\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_\tau(\dot B^1_{p,\infty})}\\&\log\big(e+C_T\|\delta v\|^{-1}_{\mathcal{L}^1_\tau(\dot B^1_{p,\infty})}\big)d\tau,\end{aligned}$$

这里 $C_T=\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot B^0_{p,\infty})}+\|\delta v\|_{\mathcal{L}^1_T(\dot B^2_{p,\infty})}$. 注意到 $\|(v^1,v^2)(t)\|_{\dot B^2_{p,1}}$ 在 $[0,T]$ 上的可积性及

$$\int_0^1\frac{dr}{r\log(e+C_Tr^{-1})}=+\infty,$$

利用 Osgood 引理就推知, 对于任意的 $t\in[0,T]$, $(\delta a,\delta v)=0$. 再利用连续性 (或唯一性是一个局部性问题) 就推出在整个时间区间 $[0,\infty)$ 上, $(a^1,v^1)=(a^2,v^2)$.

附录　Navier-Stokes 方程的经典研究

A.1　引　　言

考虑不可压 Navier-Stokes 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla P, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ \mathrm{div} u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{NS$_\nu$}$$

其中

$$u(t) = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_d(t,x)) \triangleq (u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(d)})$$

是 $\mathbb{R}^d$ 中的向量场, 刻画了流体的速度场, $P(t,x)$ 是数量场, 表示流体压力. $(\mathrm{NS})_\nu$ 的物理意义是刻画了无边界 (或可以忽略边界效应) 的不可压流体, 主要限于 $d = 2, 3$ 的情形讨论. 一般来说, 高维情形 $(d > 3)$ 对应的结果与 $d = 3$ 的结果是类似的. 为了便于读者参考，我们将这部分经典的研究作为附录给出, 主要取材于文献 [Chem3], [Ca1], [Lem1], [MiZ].

A.1.1　$(\mathrm{NS})_\nu$ 的弱形式

对于光滑的向量场 $u(t,x)$, 由 Leibniz 公式, 形式计算就有

$$u \cdot \nabla u = \mathrm{div}(u \otimes u), \quad \mathrm{div}(u \otimes u)^{(j)} \triangleq \sum_{k=1}^{d} \partial_k (u^{(j)} u^{(k)}) = \mathrm{div}(u^{(j)} u).$$

于是, $(\mathrm{NS})_\nu$ 可以写成如下弱形式:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathrm{div}(u \otimes u) - \nu \Delta u = -\nabla P, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases}$$

与原来形式的 $(\mathrm{NS})_\nu$ 相比较, 它可以容许奇性更强的向量场 u.

A.1.2　能量估计 (上下重复指标表示求和)

用 $(\mathrm{NS})_\nu$ 与 u 作 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内积, 可以看出

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + (u \cdot \nabla u, u) - \nu(\Delta u, u) = -(\nabla P, u).$$

简单的计算

$$\begin{aligned}(u\cdot\nabla u,u)=&(u^{(j)}\partial_j u,u)=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}u\cdot|u|^2dx=0,\\(\nabla P,u)=&-\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{div}u\cdot Pdx=0,\\(\Delta u,u)=&\sum_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\Delta u^{(j)}\cdot u^{(j)}dx\\=&\sum_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\cdot(\nabla u^{(j)}u^{(j)})dx-\sum_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}^d}\nabla u^{(j)}\cdot\nabla u^{(j)}dx\\=&-\|\nabla u\|_2^2,\end{aligned}$$

就推出

$$\frac{1}{2}\frac{\delta}{dt}\|u\|_2^2+\nu\|\nabla u\|_2^2=0.$$

因此

$$\|u\|_2^2+2\nu\int_0^t\|\nabla u\|_2^2dt'=\|u_0\|_2^2. \tag{1.1}$$

基于光滑解所满足的能量等式, 采用 Galerkin 逼近与紧致性原理, Leray[Ler] 证明了 N-S 方程弱解的整体存在性. 之后, Hopf 给出了一个推广与漂亮的证明.

A.1.3 Leray-Hopf 定理

定理 1.1 设 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\mathrm{div}u_0(x)=0$, 则 $(\mathrm{NS})_\nu$ 在能量空间

$$L^\infty(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1)\equiv\mathcal{E}(\mathbb{R}^+)$$

上至少存在一个弱解 $u(t)\triangleq u(t,x)$, 满足

$$\|u(t)\|_2^2+2\nu\int_0^t\|\nabla u(t)\|_2^2dt\leqslant\|u_0(x)\|_2^2,\quad\forall t>0. \tag{1.2}$$

定义 1.1 (弱解与 Leray-Hopf 弱解的定义) 称 $\mathbb{R}^d\times[0,T)$ 上的可测函数 $u(t,x)$ 是 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的弱解, 如果

(i) $u\in L^\infty([0,T);L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^2([0,T);\dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$, 且在分布意义下, 成立 $\mathrm{div}u=0$.

(ii) 对任意的 $\psi(t)\in C^1((0,T);\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, $\psi(T)=0$, $\mathrm{div}\psi=0$, 成立

$$\int_0^T\Big\{(u,\partial_\tau\psi)-\nu(\nabla u,\nabla\psi)+(u\otimes u,\nabla\psi)\Big\}d\tau=(u_0(x),\psi(0,x)), \tag{1.3}$$

这里 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 内积. 由于 Leray-Hopf 证明了 $(\mathrm{NS})_\nu$ 至少存在一个满足能量不等式 (1.2) 的整体弱解. 因此, 习惯上, 称满足能量不等式 (1.2) 的弱解是 Leray-Hopf 弱解.

进而, Leray 在 1934 年还证明 $d=2$ 时, $(\mathrm{NS})_\nu$ 存在唯一的整体弱解 (后面将会证明它是光滑解). 具体地讲, 就是

定理 1.2 ([Ler]) 设 $d=2$, 那么定义 1.1 给出的整体弱解满足

$$u(t)\in C([0,T);L^2(\mathbb{R}^2))\cap L^2([0,T);H^1(\mathbb{R}^2)),\quad \forall T>0, \tag{1.4}$$

及能量守恒律

$$\|u(T)\|_2^2+2\nu\int_0^T\|\nabla u(t)\|_2^2dt=\|u_0\|_2^2,\quad \forall T\in(0,\infty]. \tag{1.5}$$

A.1.4 压力 P 与流体速度场 u 的关系

用散度算子 div 作用于 $(\mathrm{NS})_\nu$ 两边, 易见

$$\partial_t\mathrm{div}u+\sum_{1\leqslant j,k\leqslant d}\partial_j\partial_k(u^{(j)}u^{(k)})-\nu\Delta\mathrm{div}u=-\Delta P.$$

注意到 $\mathrm{div}u=0$, 容易推出

$$-\Delta P=\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\partial_j\partial_k(u^{(j)}u^{(k)}),$$

$$P=\sum_{1\leqslant j,k\leqslant d}\frac{\partial_j\partial_k}{(-\Delta)}(u^{(j)}u^{(k)})=R_jR_k(u^{(j)}u^{(k)}), \tag{1.6}$$

这里

$$R_j(f)=\frac{x_j}{|x|^{d+1}}*f=\mathcal{F}^{-1}\Big(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)\Big). \tag{1.7}$$

A.1.5 双线性映射

用 Q 表示与 $(\mathrm{NS})_\nu$ 方程相对应的双线性算子就是

$$\begin{aligned}Q^{(j)}(u,v)&\triangleq\mathrm{div}(v^{(j)}u)+\sum_{1\leqslant k,l\leqslant d}\partial_j\frac{\partial_k\partial_l}{(-\Delta)}(u^{(k)}v^{(l)})\\&=\mathrm{div}(v^{(j)}u)+\sum_{1\leqslant k,l\leqslant d}\partial_jR_lR_k(u^{(k)}v^{(l)}).\end{aligned} \tag{1.8}$$

A.1.6 与不可压 N-S 方程 $(\mathrm{NS})_\nu$ 等价的积分方程

$$u(t,x)=e^{\nu t\Delta}u_0-\int_0^t e^{\nu(t-\tau)\Delta}Q(u,u)d\tau\triangleq e^{\nu t\Delta}u_0+B(u,u). \tag{INS$_\nu$}$$

注记 1.1　如果采用不反解压力 P 的做法, 可以先对 $(\mathrm{NS})_\nu$ 两边取投影算子

$$\mathcal{P}:\ (L^p)^d \longmapsto E_p \triangleq \left\{(L^p)^d,\ \mathrm{div}u = 0\right\},$$

此时, $(\mathrm{NS})_\nu$ 就变成抽象抛物方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t + Au = -\mathcal{P}\nabla(u\otimes u), \quad A = -\mathcal{P}\nu\Delta, \\ u(0) = \mathcal{P}u_0(x) = u_0(x). \end{cases} \tag{NS}$$

与此等价的积分方程

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-tA}u_0(x) - \int_0^t e^{-(t-\tau)A}\mathcal{P}\nabla(u\otimes u)d\tau \\ &\triangleq e^{-tA}u_0(x) + B(u,u), \end{aligned} \tag{INS}$$

这里

$$\mathcal{P} = I - R\otimes R \triangleq I - \frac{1}{\Delta}\nabla\otimes\nabla, \quad \widehat{\mathcal{P}u}^{(j)} = \sum_{k=1}^d \Big(\delta_{jk} - \frac{\xi^{(j)}\xi^{(k)}}{|\xi|^2}\Big)\widehat{u}_k(\xi). \tag{1.9}$$

A.1.7　压缩映射原理及 Picard 迭代技术

定理 1.3 (Picard)　设 $(E, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, T 是 $E\times E \longmapsto E$ 上的双线性映射, 如果

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} \triangleq \sup_{\substack{\|u\|\leqslant 1\\ \|v\|\leqslant 1}} \|T(u,v)\| < \frac{1}{4a}, \quad 或\ a < (4\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)})^{-1}. \tag{1.10}$$

则对于任意 $y\in B_E(0,a)$, 算子方程

$$x = y + T(x,x) \tag{1.11}$$

在 $B_E(0,2a)$ 中存在唯一解 x 满足估计

$$\|x\|_E \leqslant 2a. \tag{1.12}$$

证明　可以直接使用 Banach 压缩映射原理证明定理 1.3. 为了完备起见, 用 Picard 逼近来证明定理 1.3.

构造逼近序列

$$x_0 = y, \quad x_{n+1} = y + T(x_n, x_n). \tag{1.13}$$

用归纳法证明 $\|x_n\|_E \leqslant 2a$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 事实上, 从关系式

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\| &\leqslant \|y\| + \|T(x_n,x_n)\| \leqslant a + \|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|x_n\|^2 \\ &\leqslant a + \frac{1}{4a}\cdot(2a)^2 = 2a, \end{aligned} \tag{1.14}$$

就可推知, 迭代序列 $\{x_n\} \subset B_E(0,2a)$. 进而观察

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n =& T(x_n,x_n)-T(x_{n-1},x_{n-1}) \\ =& T(x_n-x_{n-1},x_n)+T(x_{n-1},x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}-x_n\| \leqslant& \|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}\left[\|x_n\|+\|x_{n-1}\|\right]\|x_n-x_{n-1}\| \\ \leqslant& 4a\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|x_n-x_{n-1}\|. \end{aligned} \tag{1.15}$$

注意到 $4a\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}<1$, 说明 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Banach 空间中的 Cauchy 列, 相应的极限仍然在闭球 $B_E(0,2a)$, 并且满足算子方程 (1.11), 即

$$x=y+T(x,x).$$

另一方面, 注意到如果还有另外一个解 $\widetilde{x}$, 则

$$\begin{aligned} \|x-\widetilde{x}\|_E \leqslant& \|T(x-\widetilde{x},\widetilde{x})\|_E+\|T(x,x-\widetilde{x})\|_E \\ \leqslant& 4a\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|x-\widetilde{x}\|_E. \end{aligned}$$

矛盾. □

注记 1.2 条件 (1.10) 是最优的, 否则, 如果 $a=\dfrac{1+\varepsilon}{4\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}}$, 则无解. 反例:

$$t=a+\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)}t^2.$$

A.1.8 尺度变换与 N-S 方程所对应的临界空间

通俗地讲, 保持在尺度变换

$$u(t,x)\longmapsto u_\lambda(t,x)=\lambda^{-1}u(\lambda^{-1}x,\lambda^{-2}t)$$

下, 范数保持不变的齐次空间是临界空间.

定义 1.2 在齐次的函数空间的范畴下, 定义 $X(\mathbb{R}^d)$ 的度如下:

$$\deg X(\mathbb{R}^d)=\log_\lambda\frac{\|\varphi(\lambda x)\|_X}{\|\varphi(x)\|_X}.$$

从而, 就引入了恰当空间、临界空间与不恰当空间的定义如下:

$$X(\mathbb{R}^d)\xLeftrightarrow{\text{临界空间}}\deg X(\mathbb{R}^d)=-1,$$

$$X(\mathbb{R}^d)\xLeftrightarrow{\text{恰当空间}}\deg X(\mathbb{R}^d)>-1,$$

$$X(\mathbb{R}^d)\xLeftrightarrow{\text{不恰当空间}}\deg X(\mathbb{R}^d)<-1.$$

注记 1.3　设 X 是初始状态空间, 按照尺度变换所建议的机制, $(\mathrm{NS})_\nu$ 的温和解的求解空间与初始状态空间的关系、是否可解的原则是

(i) 如果 X 是恰当空间, 可以直接在 $C(I,X)$ 用 Picard 方法求解;

(ii) 如果 X 是临界空间, 在 $C(I,X)$ 用 Picard 方法求解是困难的, 甚至是不可能的. 但是, 可以在形如 $C(I,X)\cap$ 时空空间或直接在时空空间中使用 Picard 方法求解.

(iii) 如果 X 是不恰当空间, 则无法使用 Picard 方法在时空空间中求解. 但有时可用紧致性方法在广义解范畴内求解, 例如, 基于紧致性原理与 Galerkin 有限逼近得到的 Leray-Hopf 弱解.

通常, $(\mathrm{NS})_\nu$ 在不同层次所对应的齐次临界空间 $X(\mathbb{R}^d)$ $(\deg(X)=-1)$ 主要是

$$\begin{aligned}
X =&L^p(\mathbb{R}^d) \quad p=d;\\
X =&\dot{H}^s, \quad s=\frac{d}{2}-1;\\
X =&\dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}}, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty;\\
X =&\dot{F}_{p,q}^{-1+\frac{d}{p}}, \quad 1\leqslant p\leqslant\infty, \quad 1\leqslant q\leqslant\infty.
\end{aligned}$$

注记 1.4　在通常意义下, 当初值 $\varphi\in X$(临界空间) 时, 在形如

$$C(I,X)\cap \text{时空空间 (相同的度)}$$

例如

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}(I) =&C(I;L^d)\cap L^q(I;L^r(\mathbb{R}^d)), \quad \frac{2}{q}=d\Big(\frac{1}{d}-\frac{1}{r}\Big),\ d\leqslant r<\frac{d^2}{d-2};\\
\mathcal{X}(I) =&C(I;L^d)\cap \dot{\mathscr{C}}_q(I,L^r), \quad \frac{2}{q}=d\Big(\frac{1}{d}-\frac{1}{r}\Big), d\leqslant r<\infty,
\end{aligned}$$

或

$$\mathcal{X}(I)=L^\infty(I;\dot{H}^{\frac{d}{2}-1})\cap L^2(I;\dot{H}^{\frac{d}{2}}) \text{ 中求解 } (\mathrm{NS})_\nu.$$

另一方面, 采用线性抛物方程的正则性估计, 亦可以直接在形如

$$\mathcal{Y}(I)=L^4(I;\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})$$

中求解 $(\mathrm{NS})_\nu$, 进而证明 $\mathcal{Y}(I)$ 中的解亦具有时空正则性质

$$u(t)\in C(I;\dot{H}^{\frac{d}{2}-1})\cap\cdots \quad (\text{时空可积空间}).$$

这就是所谓的**单模方法**.

注记 1.5 (a) 当 $d \geqslant 3$ 时, 初值函数所属的空间取 $X = L^2(\mathbb{R}^d)$ 时, 注意到 $\deg(X) = -\dfrac{d}{2} < -1$, 它就对应着不恰当空间, 这是无法用 Picard 方程求解的. 而利用正则化 (低频截断方法) 与紧致性方法所获得的解未必是真正的物理解. 这也正是 Leray-Hopf 弱解的正则性、唯一性的困难所在. 比较一下:

$$\deg\mathcal{E}(\mathbb{R}) < \deg\mathcal{X}(\mathbb{R}) \Longleftarrow \begin{cases} \text{能量空间} L^\infty(I; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(I; \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) = \mathcal{E}(I), \\ \text{临界空间} L^\infty(I; \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(I; \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)) = \mathcal{X}(I), \\ (\text{临界空间是 Picard 方法适用的最低正则性空间}). \end{cases}$$

(b) 当 $d = 2$ 时, 能量空间

$$\mathcal{E}(I) = L^\infty(I, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(I; \dot{H}^1) = \mathcal{X}(I)$$

与同形的临界空间 $\mathcal{X}(I)$ 重合. 利用抛物方程解的正则性及 Serrin 型的正则性准则, 可见 Leray-Hopf 弱解就是唯一的光滑解.

(c) 对于一般的 $\mathbb{R}^d$ 空间, 能量空间仍然是

$$\mathcal{E}(I) = L^\infty(I, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(I; \dot{H}^1),$$

与同形的临界空间 $\mathcal{X}(I)$ (即 Hilbert 框架下的时空空间) 就是

$$\mathcal{X}(I) = L^\infty(I, H^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(I; \dot{H}^{\frac{d}{2}}).$$

由插值定理

$$L^q(I, L^{\frac{qd}{q-2}}(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow L^q(I, \dot{H}^{\frac{d}{2}-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow L^2(I; \dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)), \quad 2 < q < \infty.$$

读者将会看到可选取 Lebesgue 型的时空空间替代具有正则性的 Hilbert 空间. 另一方面, 结合抛物型方程解的极大函数估计及其他光滑效应, 可以直接在临界时空空间中研究适定性问题, 这就是所谓的**单模方法**.

本章用经典的方法, 即 Sobolev 嵌入、Banach 压缩映射原理、Young 不等式、Hölder 不等式、抛物型方程解的光滑效应等来研究如下问题:

(1) 当 $\varphi \in \dot{H}^{\frac{d}{2}-1}$ 时, 证明 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的局部适定性及在 $\|\varphi\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \ll 1$ 条件下的整体适定性.

(2) 着力介绍如何利用对流项的结构. 首先证明 $d = 2$ 时, Leray-Hopf 弱解的唯一性. 对于 $d = 3$ 时, 假设 $u(t) \in C(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{3}{2}})$, 则

$$\lim_{t\to\infty} \|u\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \int_0^\infty \|u(t)\|^4_{\dot{H}^1} dt < \infty.$$

与此同时, 所有保证 $(\mathrm{NS})_\nu$ 整体可解的初值 $\varphi\in\dot H^{\frac12}$ 的集合是一个开集.

(3) 介绍 Kato 的双模方法, 这就是经典的时空估计方法或加权时空估计方法. 有时亦称是 L^p 方法.

(4) 利用抽象的插值方法及双线性估计, 研究 N-S 方程解的无条件唯一性.

A.2 N-S 方程在 Hilbert 空间 H^s 中的适定性理论

A.2.1 简单的函数空间及其嵌入关系

$$\dot H^s(\mathbb{R}^d)=\left\{f(x)\in\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^d)\middle|\quad \|f\|_{\dot H^s}^2=\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}|\widehat f(\xi)|^2d\xi<\infty\right\},$$
$$H^s(\mathbb{R}^d)=\left\{f(x)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)\middle|\quad \|f\|_{H^s}^2\cong\|f\|_{L^2}^2+\|f\|_{\dot H^s}^2<\infty\right\},$$

这里 $\mathcal{Z}'(\mathbb{R}^d)=\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上全体多项式的集合.

定理 2.1 设 $s\in\left[0,\dfrac d2\right)$, 则 $\dot H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$. 进而有直接的推论:

$$H^s(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d),\qquad 2\leqslant q\leqslant\frac{2d}{d-2s}.$$

证明 嵌入关系 $\dot H^s\hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s}}$ 是恰当嵌入. 事实上, 利用尺度分析, 容易看出

$$\dot H^s\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)\Longleftrightarrow s-\frac d2=-\frac dq.$$

下面采用调和分析中的技术, 给出这一嵌入关系的严格证明. 无妨假设可测函数 $f(x)$ 满足 $\|f\|_{\dot H^s}=1$. 采用 Fubini 定理 (L^p- 范数的 Chebyshev 表示法), 对于 $1\leqslant p<\infty$, 有

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p&\triangleq\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^pdx=p\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^{|f(x)|}\lambda^{p-1}d\lambda dx\\&=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}m(|f(x)|>\lambda)d\lambda\triangleq p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)d\lambda.\end{aligned}\tag{2.1}$$

采用高频–低频分解技术:

$$f(x)=f_{h,A}+f_{l,A},\quad f_{l,A}=\mathcal{F}^{-1}(\chi_{B_A(0)}\widehat f),\quad f_{h,A}=f-f_{l,A},\tag{2.2}$$

由于低频部分是正则部分 ($\widehat{f_{l,A}}(\xi)$ 具有紧支集), 可推出

$$\begin{aligned}\|f_{l,A}\|_\infty&\lesssim\|\widehat{f_{l,A}}\|_1=\int_{B_A(0)}|\xi|^{-s}|\xi|^s|\widehat f(\xi)|d\xi\\&\lesssim\left(\int_{B_A(0)}|\xi|^{-2s}d\xi\right)^{\frac12}\|f\|_{\dot H^s}\leqslant C\frac{A^{\frac d2-s}}{(d-2s)^{\frac12}}.\end{aligned}$$

注意到

$$\Big\{x:|f|>\lambda\Big\}\subset\Big\{x:|f_{l,A}|>\frac{\lambda}{2}\Big\}\cup\Big\{x:|f_{h,A}|>\frac{\lambda}{2}\Big\}, \tag{2.3}$$

如果取

$$C\frac{A^{\frac{d}{2}-s}}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\lambda}{4},\quad \text{即 } A=A_\lambda=\Big(\frac{\lambda(d-2s)^{\frac{1}{2}}}{4C}\Big)^{\frac{p}{d}}, \tag{2.4}$$

则 $\big\{x:|f_{l,A}|>\lambda/2\big\}=\varnothing$. 从而

$$\|f\|_p^p\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-1}m\Big\{|f_{h,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}\Big\}d\lambda. \tag{2.5}$$

观察:

$$m\Big\{|f_{h,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}\Big\}=\int_{|f_{h,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}}dx\leqslant\int_{|f_{h,A_\lambda}|>\frac{\lambda}{2}}\frac{4|f_{h,A_\lambda}(x)|^2}{\lambda^2}dx\leqslant\frac{4\|f_{h,A_\lambda}\|_2^2}{\lambda^2}, \tag{2.6}$$

代入 (2.5) 式就得

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p&\leqslant 4p\int_0^\infty\lambda^{p-3}\|f_{h,A_\lambda}\|_2^2d\lambda\leqslant 4p\int_0^\infty\lambda^{p-3}\int_{|\xi|\geqslant A_\lambda}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi d\lambda\\&\leqslant 4p\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\int_0^{C_\xi}\lambda^{p-3}d\lambda\Big)|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\qquad\Big(|\xi|\geqslant A_\lambda\Longleftrightarrow\lambda\leqslant C_\xi\triangleq\frac{4C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}|\xi|^{\frac{d}{p}}\Big)\\&\lesssim\frac{4p}{p-2}\Big(\frac{4C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}\Big)^{p-2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{\frac{d(p-2)}{p}}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi\\&\lesssim\frac{4p}{p-2}\Big(\frac{4C}{(d-2s)^{\frac{1}{2}}}\Big)^{p-2}\|f(x)\|_{\dot{H}^s}^2\lesssim C.\end{aligned} \tag{2.7}$$

证毕. □

推论 2.2 $p\in(1,2]$, $s=d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\leqslant 0$, 则

$$L^p(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow\dot{H}^s(\mathbb{R}^d).$$

证明 它是定理 2.1 的对偶形式, 由泛函的经典结果可知. 为方便读者, 给出它的证明细节. 记 $\bar{p}=\dfrac{p}{p-1}\geqslant 2$. 由 Sobolev 嵌入关系,

$$\dot{H}^{-s}\hookrightarrow L^{\bar{p}},\quad -s=d\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\bar{p}}\Big)\Longleftrightarrow s=d\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\Big).$$

于是, 对任意 $\varphi\in L^p(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\dot{H}^s}&=\sup_{\|\psi\|_{\dot{H}^{-s}}\leqslant 1}\langle\varphi,\psi\rangle\leqslant\sup_{\|\psi\|_{\dot{H}^{-s}}\leqslant 1}\|\varphi\|_p\|\psi\|_{\bar{p}}\\&\leqslant C\sup_{\|\psi\|_{\dot{H}^{-s}}\leqslant 1}\|\varphi\|_p\|\psi\|_{\dot{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|\varphi\|_p.\end{aligned} \tag{2.8}$$

□

为了在 Sobolev 空间 $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}$ 中研究 N-S 方程的适定性, 先建立一些预备引理.

引理 2.3 设 $Q(u,v)$ 是 N-S 方程对应的双线性映射, 即

$$Q^{(j)}(u,v)=\operatorname{div}(v^{(j)}u)+\sum_{1\leqslant k,l\leqslant d}\partial_j R_l R_k(u^{(k)}v^{(l)}). \tag{2.9}$$

则

$$\|Q(u,v)\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-2}}\leqslant C\|u\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|v\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}. \tag{2.10}$$

证明 为简单起见, 仅就 $d=2,3$ 证明 (2.10). 当 $d=2$ 时, 根据 Hölder 不等式, 就有

$$\|Q(u,v)\|_{\dot{H}^{-1}}\leqslant C\|uv\|_2\lesssim\|u\|_4\|v\|_4\lesssim\|u\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\|v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}},\quad \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2). \tag{2.11}$$

当 $d=3$ 时, 由奇异积分算子的有界性及 Hölder 不等式, 可见

$$\begin{aligned}\|Q(u,v)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}&\leqslant C\sup_{k,l}(\|u^{(k)}\partial v^{(l)}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}+\|v^{(l)}\partial u^{(k)}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}})\\&\leqslant C\sup_{k,l}(\|u^{(k)}\partial v^{(l)}\|_{\frac{3}{2}}+\|v^{(l)}\partial u^{(k)}\|_{\frac{3}{2}})\qquad(L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))\\&\leqslant C\|u\|_6\|\partial v\|_2+\|v\|_6\|\partial u\|_2\\&\lesssim C\|u\|_{\dot{H}^1}\|v\|_{\dot{H}^1}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

当 $d\geqslant 4$ 时, 利用 Bony 的仿积分解, 容易证明双线性估计 (2.10), 作为练习留给读者. □

引理 2.4 设 $v\in C(I,S'(\mathbb{R}^d))$ 是线性热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\partial_t v-\nu\Delta v=f,\quad f\in L^2([0,T];\dot{H}^{s-1}),\\ v(0)=v_0\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)\end{cases} \tag{2.13}$$

的解. 则

$$v\in\bigcap_{q=2}^{\infty}L^q([0,T];\dot{H}^{s+\frac{2}{q}}), \tag{2.14}$$

进而满足如下估计:

$$\|v\|_{\dot{H}^s}^2+2\nu\int_0^t\|\nabla v(t')\|_{\dot{H}^s}^2dt'=2\int_0^t\langle f(t'),v(t')\rangle_s dt'+\|v_0\|_{\dot{H}^s}^2\quad(\text{能量估计}), \tag{2.15}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2s}(\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}|\widehat{v}(t',\xi)|)^2d\xi\leqslant\|v_0\|_{\dot{H}^s}^2+\frac{1}{2\nu}\|f\|_{L^2([0,T);\dot{H}^{s-1})}^2\quad(\text{极大函数估计}), \tag{2.16}$$

$$\|v(t)\|_{L^q([0,T);\dot{H}^{s+\frac{2}{q}})}\leqslant\frac{1}{\nu^{\frac{1}{q}}}(\|v_0\|_{\dot{H}^s}+\frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{L^2([0,T);\dot{H}^{s-1})})\quad(\text{时空估计}), \tag{2.17}$$

这里 $\langle a,b\rangle_s$ 表示 $\dot{H}^s$ 上的内积, 即

$$\langle a,b\rangle_s \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}\widehat{a}(\xi)\widehat{b}(-\xi)d\xi.$$

证明 (2.13) 等价于

$$v(t)=e^{\nu\Delta t}v_0(x)+\int_0^t e^{\nu\Delta(t-s)}f(s,x)ds. \tag{2.18}$$

两边取 Fourier 变换 (关于空间变量 x)

$$\widehat{v}(t,\xi)=e^{-\nu t|\xi|^2}\widehat{v_0}(\xi)+\int_0^t e^{-\nu(t-s)|\xi|^2}\widehat{f}(s,\xi)ds. \tag{2.19}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 可见

$$\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}|\widehat{v}(t',\xi)|\leqslant|\widehat{v_0}(\xi)|+\frac{1}{\sqrt{2\nu|\xi|^2}}\|\widehat{f}(\xi,\cdot)\|_{L^2(0,t)}. \tag{2.20}$$

两边取 $L^2(|\xi|^{2s}d\xi)$ 范数, 就可以推出

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\left(\sup_{0\leqslant t'\leqslant t}|\widehat{v}(t',\xi)|\right)^2|\xi|^{2s}d\xi\right)^{\frac12}&\leqslant\|v_0\|_{\dot{H}^s}+\frac{1}{(2\nu)^{\frac12}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\|\widehat{f}(\xi,\cdot)\|^2_{L^2(0,t)}|\xi|^{2s-2}d\xi\right)^{\frac12}\\&\leqslant\|v_0\|_{\dot{H}^s}+\frac{1}{(2\nu)^{\frac12}}\left(\int_{\mathbb{R}^d\times[0,t]}|\widehat{f}(t',\xi)|^2|\xi|^{2s-2}d\xi dt'\right)^{\frac12}\\&\leqslant\|v_0\|_{\dot{H}^s}+\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\|f\|_{L^2([0,t);\dot{H}^{s-1})}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

同理, 用 $|\xi|^{2s}\widehat{v}(-\xi)$ 乘以 (2.13) 在频率空间的形式

$$\begin{cases}\partial_t\widehat{v}(\xi,t)+\nu|\xi|^2\widehat{v}(\xi,t)=\widehat{f}(\xi,t),\\ \widehat{v}(\xi,0)=\widehat{v_0}(\xi).\end{cases} \tag{2.22}$$

用 Parseval 恒等式, 可推出

$$\frac12\frac{\delta}{dt}\|v\|^2_{\dot{H}^s}+\nu\|\nabla v(t)\|^2_{\dot{H}^s}=\langle f(t),v(t)\rangle_s. \tag{2.23}$$

积分两边就推出估计 (2.15).

最后, 对于估计式 (2.15) 左边的范数进行插值, 等价于

$$[L^\infty(I;\dot{H}^s),L^2(I;\dot{H}^{s+1})]_{\frac{2}{q}}=L^q(I;\dot{H}^{s+\frac{2}{q}}).$$

具体细节: (2.15) 可进一步估计为

$$\|v(t)\|_{\dot H^s}^2+2\nu\int_0^t\|v(t')\|_{\dot H^{s+1}}^2dt'\leqslant 2\int_0^t\|f\|_{\dot H^{s-1}}\|v(t')\|_{\dot H^{s+1}}dt'+\|v_0\|_{\dot H^s}^2$$
$$\leqslant\frac{1}{\nu}\int_0^t\|f\|_{\dot H^{s-1}}^2dt'+\nu\int_0^t\|v(t')\|_{\dot H^{s+1}}^2dt'+\|v_0\|_{\dot H^s}^2.$$

因此

$$\|v(t)\|_{\dot H^s}^2+\nu\int_0^t\|v(t')\|_{\dot H^{s+1}}^2dt'\leqslant\frac{1}{\nu}\int_0^t\|f\|_{\dot H^{s-1}}^2dt'+\|v_0\|_{\dot H^s}^2. \tag{2.24}$$

从而

$$\|v(t)\|_{\dot H^s}\leqslant\Big(\frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(I;\dot H^{s-1})}^2+\|v_0\|_{\dot H^s}^2\Big)^{\frac12},$$
$$\|v(t)\|_{L^2(I;\dot H^{s+1})}\leqslant\Big(\frac{1}{\nu^2}\|f\|_{L^2(I;\dot H^{s-1})}^2+\frac{1}{\nu}\|v_0\|_{\dot H^s}^2\Big)^{\frac12},$$
$$\|v(t)\|_{L^q(I;\dot H^{s+\frac2q})}\leqslant\Big(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\Big)^{\frac2q}\Big(\frac{1}{\nu}\|f\|_{L^2(I;\dot H^{s-1})}^2+\|v_0\|_{\dot H^s}^2\Big)^{\frac12}$$
$$\leqslant\frac{1}{\nu^{\frac1q}}\Big(\frac{2}{\nu^{\frac12}}\|f\|_{L^2(I;\dot H^{s-1})}+\|v_0\|_{\dot H^s}\Big).$$

□

推论 2.5　存在常数 C_0, 成立如下的双线性估计:

$$\|B(u,v)\|_{L^4([0,T);\dot H^{\frac{d-1}{2}})}\leqslant\frac{C_0}{\nu^{\frac34}}\|u\|_{L^4([0,T);\dot H^{\frac{d-1}{2}})}\|v\|_{L^4([0,T);\dot H^{\frac{d-1}{2}})}. \tag{2.25}$$

证明　直接验证

$$\begin{cases}\partial_tB(u,v)-\nu\Delta B(u,v)=Q(u,v),\\ B(u,v)\big|_{t=0}=0.\end{cases} \tag{2.26}$$

应用抛物型方程的正则性估计引理 2.4, 取

$$q=4,\quad s=\frac{d-2}{2}=\frac d2-1\Longrightarrow\frac2q+s=\frac{d-1}{2}.$$

则利用双线性估计引理 2.3, 可见

$$\|B(u,v)\|_{L^4([0,T);\dot H^{\frac{d-1}{2}})}\leqslant\frac{1}{\nu^{\frac14}}\cdot\frac{2}{\nu^{\frac12}}\|Q(u,v)\|_{L^2(I;\dot H^{\frac d2-2})}$$
$$\leqslant\frac{C_0}{\nu^{\frac34}}\|u\|_{L^4(I;\dot H^{\frac{d-1}{2}})}\|v\|_{L^4(I;\dot H^{\frac{d-1}{2}})}.$$

证毕.　□

定理 2.6　设 $u_0(x)\in\dot H^{\frac d2-1}$, 则 $(\mathrm{NS})_\nu$ 存在唯一的解 $u(t)\in L^4([0,T);\dot H^{\frac{d-1}{2}})$ 并且

$$u\in C([0,T);\dot H^{\frac d2-1})\cap L^2([0,T);\dot H^{\frac d2}). \tag{2.27}$$

记 T_{u_0} 表示 $u(t,x)$ 的极大存在时间, 则有如下结论:

(a) 存在常数 $C>0$ 使得

$$\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \leqslant C\nu \Longrightarrow T_{u_0}=+\infty.$$

(b) 如果 $T_{u_0}<\infty$, 则

$$\int_0^{T_{u_0}} \|u(t)\|^4_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}} dt = +\infty. \tag{2.28}$$

(c) 解是稳定的. 具体地讲, 如果 u, v 是 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的两个解, 则

$$\begin{aligned}
&\|u(t)-v(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} + \nu\int_0^t \|u(\tau)-v(\tau)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}} d\tau \\
\leqslant &\|u_0-v_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \exp\left(\frac{C}{\nu^3}\int_0^t \left(\|u(\tau)\|^4_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}} + \|v(\tau)\|^4_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\right)d\tau\right).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

证明 第一步. 在工作空间 $L^4([0,T];\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})$ 上研究积分方程

$$u \longmapsto e^{\nu t\Delta}u_0 + \vec{B}(u,u). \tag{2.30}$$

利用推论 2.5, 可见

$$\|B\|_{L^4([0,T];\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}) \to L^4([0,T];\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})} \leqslant \frac{C_0}{\nu^{\frac{3}{4}}}. \tag{2.31}$$

根据抽象算子方程的 Picard 定理, 即将定理 1.3 应用到积分方程 (2.30) 上, 就可知道仅需证明

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0(x)\|_{L^4([0,T];\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})} \leqslant \frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{4C_0+}, \tag{2.32}$$

此就意味着积分方程 (2.30) 在 $L^4([0,T];\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})$ 的闭球 $B_{\frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{2C_0+}}(0)$ 中有唯一解.

事实上, 由自由群的压缩性及能量估计可见

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \leqslant \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \quad (\text{压缩半群}), \tag{2.33}$$

$$\int_0^\infty \|e^{\nu t\Delta}u_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}} dt \leqslant \frac{1}{2\nu}\|u_0\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \quad (\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}\text{层次能量估计}), \tag{2.34}$$

利用插值定理, 就得

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{L^4([0,T];\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})} \leqslant \frac{1}{(2\nu)^{\frac{1}{4}}}\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}. \tag{2.35}$$

故只要取

$$\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \leqslant \frac{\nu}{4C_0} < \frac{2^{\frac{1}{4}}\nu}{4C_0+},$$

此就可以保证积分方程 (2.30) 存在唯一的整体解 ($T=\infty$).

下面来研究大初值情形. 用高–低频分解技术, 真正看清楚在临界空间中, $T=T(u_0)$ 是如何依赖 u_0 的 profile.

利用高低频分解

$$\widehat{u_0}(\xi)=\widehat{u_0}(\xi)\chi_{|\xi|\geqslant\rho_{u_0}}(\xi)+\widehat{u_0}(\xi)\chi_{|\xi|\leqslant\rho_{u_0}}(\xi)=\widehat{u_{0h}}+\widehat{u_{0l}}, \tag{2.36}$$

使得

$$\|u_{0h}\|_{\dot H^{\frac d2-1}}=\left(\int_{|\xi|\geqslant\rho_{u_0}}|\xi|^{d-2}|\widehat{u_0}(\xi)|^2d\xi\right)^{\frac12}\leqslant\frac{\nu}{8C_0}. \tag{2.37}$$

利用 (2.35) 就得

$$\begin{aligned}\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{L^4([0,T];\dot H^{\frac{d-1}{2}})}&\leqslant\frac{1}{(2\nu)^{\frac14}}\|u_{0h}\|_{\dot H^{\frac d2-1}}+\|e^{\nu t\Delta}u_{0l}\|_{L^4([0,T];\dot H^{\frac{d-1}{2}})}\\&\leqslant\frac{\nu^{\frac34}}{8C_0+}+\|e^{\nu t\Delta}u_{0l}\|_{L^4([0,T];\dot H^{\frac{d-1}{2}})}.\end{aligned} \tag{2.38}$$

注意到 $u_{0l}=\mathcal F^{-1}(\chi_{|\xi|\leqslant\rho_{u_0}}(\xi)\widehat{u_0}(\xi))$, 从而

$$\begin{aligned}\|e^{\nu t\Delta}u_{0l}\|_{L^4([0,T];\dot H^{\frac{d-1}{2}})}&\leqslant\rho_{u_0}^{\frac12}\|e^{\nu t\Delta}u_{0l}\|_{L^4([0,T];\dot H^{\frac d2-1})}\\&\leqslant(\rho_{u_0}^2T)^{\frac14}\|u_0\|_{\dot H^{\frac d2-1}}\quad(\text{放大}).\end{aligned} \tag{2.39}$$

因此, 只要选取 T 满足 $(\rho_{u_0}^2T)^{\frac14}\|u_0\|_{\dot H^{\frac d2-1}}\leqslant\dfrac{\nu^{\frac34}}{8C_0+}$, 即

$$T\leqslant\frac{\nu^3}{(8C_0\rho_{u_0}^{\frac12}\|u_0\|_{\dot H^{\frac d2-1}})^4}, \tag{2.40}$$

就可利用抽象算子方程解的存在性定理推出: $(\mathrm{NS})_\nu$ 在 $L^4([0,T];\dot H^{\frac{d-1}{2}})$ 的球 $B_{\frac{\nu^{\frac34}}{2C_0+}}(0)$ 内存在唯一的解.

第二步. 下面来证明正则性与可积性. 注意到 $u\in L^4([0,T];\dot H^{\frac{d-1}{2}})$, 利用双线性估计引理 2.3, 可见

$$Q(u,u)\in L^2([0,T];\dot H^{\frac d2-2}). \tag{2.41}$$

利用线性热传导方程的光滑效应引理 2.4, 就可推出

$$u\in C([0,T];\dot H^{\frac d2-1})\cap L^2([0,T];\dot H^{\frac d2}). \tag{2.42}$$

利用插值定理, 就得

$$u\in L^q([0,T];\dot H^{\frac d2-1+\frac2q}),\quad\forall 2\leqslant q\leqslant\infty. \tag{2.43}$$

第三步. 下面来研究稳定性估计. 设 u, v 是 $(\mathrm{NS})_\nu$ 在 $L^4(I;\dot{H}^{\frac{d-1}{2}})$ 中的两个解, 则 $w=u-v$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t w-\nu\Delta w=Q(w,w)+Q(w,v)+Q(v,w), \\ w|_{t=0}=w_0 \triangleq u_0(x)-v_0(x), \end{cases} \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} Q(u,u)-Q(v,v)&=Q(u,u)-Q(u,v)+Q(u,v)-Q(v,v) \\ &=Q(u,w)+Q(w,v) \\ &=Q(w,w)+Q(v,w)+Q(w,v). \end{aligned}$$

同理亦有

$$Q(v,v)-Q(u,u)=Q(w,w)+Q(w,u)+Q(u,w).$$

根据 $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}$ 层次上的能量估计, 可见

$$\begin{aligned} \Delta_w(t) &\triangleq \|w(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}+2\nu\int_0^t\|\nabla w(t')\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}dt' \\ &\leqslant \|w(0)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}+2\int_0^t\langle Q(w,v),w(t')\rangle_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}dt', \end{aligned} \tag{2.45}$$

这里用到 $\langle Q(w,w),w\rangle=0$ 及 $\langle Q(v,w),w\rangle=0$.

引理 2.7 (三线性估计) *存在常数 C 使得*

$$\langle Q(u,v),w\rangle_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}\leqslant C\|u\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|v\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|\nabla w\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}. \tag{2.46}$$

事实上

$$\langle Q(u,v),w\rangle_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}\leqslant\|Q(u,v)\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-2}}\|\nabla w\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}\leqslant C\|u\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|v\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|\nabla w\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}},$$

就得到估计式 (2.46).

记 $N(t)=\|u\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}+\|v\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}$, 将 (2.46) 代入 (2.45), 就得

$$\begin{aligned} \Delta_w(t) &\leqslant \|w(0)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}+C\int_0^t\|w(t')\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|v\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|\nabla w\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}dt' \\ &\leqslant \|w(0)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}+C\int_0^t\|w(t')\|^{\frac12}_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}\|v\|_{\dot{H}^{\frac{d-1}{2}}}\|\nabla w\|^{\frac32}_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}dt' \\ &\leqslant \|w(0)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}+C\int_0^t\|w(t')\|^{\frac12}_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}N(t')\|\nabla w\|^{\frac32}_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}dt' \\ &\leqslant \|w(0)\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}+\frac{C}{\nu^3}\int_0^t\|w(t')\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}N(t')^4dt'+\nu\int_0^t\|\nabla w(t')\|^2_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}}dt', \end{aligned}$$

这里用到 Cauchy 不等式 $ab\leqslant\dfrac14a^4+\dfrac34b^{\frac43}$, 整理上式可见

$$\begin{aligned}
&\|w(t)\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}^2+\nu\int_0^t\|\nabla w(t')\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}^2dt'\\
\leqslant&\|w(0)\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}^2+\frac{C}{\nu^3}\int_0^t\|w(t')\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}^2N(t')^4dt'.
\end{aligned}\tag{2.47}$$

利用 Gronwall 不等式, 就得稳定性结果. 事实上, 这里所得到结论比定理中陈述的稳定性还要强.

第四步. 最后来建立 Blow-up 准则. 换句话讲, 若 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的解 $u(t)$ 满足

$$\int_0^T\|u(t)\|_{\dot H^{\frac{d-1}{2}}}^4dt<\infty,\tag{2.48}$$

则 $T_{u_0}>T$. 换句话说, 若 $T_{u_0}<\infty$, 则

$$\int_0^{T_{u_0}}\|u(t)\|_{\dot H^{\frac{d-1}{2}}}^4dt=\infty.\tag{2.49}$$

由热方程解的光滑效应引理 2.4 及双线性估计 (引理 2.3), 就得

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{d-2}(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\widehat{u}(\xi,t)|)^2d\xi\right)^{\frac12}\\
\leqslant&\|u_0(x)\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}+\frac{1}{(2\nu)^{\frac12}}\|Q(u,u)\|_{L^2([0,T);\dot H^{\frac{d}{2}-2})}\\
\leqslant&\|u_0(x)\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}+\frac{C}{\sqrt{2\nu}}\|u\|_{L^4([0,T);\dot H^{\frac{d-1}{2}})}^2<\infty,
\end{aligned}\tag{2.50}$$

于是, 存在 $\rho>0$ 使得 (很重要, 存在如下一致估计)

$$\int_{|\xi|\geqslant\rho}|\xi|^{n-2}|\widehat{u}(t,\xi)|^2d\xi<\frac{\nu}{8C_0},\quad\forall t\in[0,T).\tag{2.51}$$

由第一步确定的大解存在区间, 对 $\forall t\in[0,T)$ 作为初值，都有 $\rho\equiv\rho_{u(t)}$(不依赖 T), 使得

$$\widetilde{T}-t\leqslant\frac{\nu^3}{(8C_0\rho^{\frac12}\|u(t)\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}})^4},\tag{2.52}$$

说明

$$\widetilde{T}\leqslant t+\frac{\nu^3}{(8C_0\rho^{\frac12}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}})^4}.\tag{2.53}$$

即当 $t\to T$ 时, $\widetilde{T}$ 可以超过 T. 故 $T_{u_0}>T$. □

下面考虑初值函数满足

$$\|u_0\|_{\dot H^{\frac{d}{2}-1}}\leqslant(4C_0)^{-1}\nu$$

的整体解 $u(t)\in L^4([0,\infty);\dot H^{\frac{d-1}{2}})$. 如果取合适的 $c\leqslant (4C_0)^{-1}$, 当 $\|u_0\|_{\dot H^{\frac d2-1}}<c\nu$ 时, 相应的 $\|u(t)\|_{\dot H^{\frac d2-1}}$ 就是在 0 附近的 Lyapunov 函数.

命题 2.8 设 $\|u_0\|_{\dot H^{\frac d2-1}}\leqslant c\nu$ (要求 c 充分小), 则

$$t\longmapsto \|u(t)\|_{\dot H^{\frac d2-1}} \tag{2.54}$$

是一个递减函数.

证明 注意到

$$\partial_t u-\nu\Delta u=Q(u,u),\quad Q(u,u)\in L^2(\mathbb{R}^+;\dot H^{\frac d2-2}). \tag{2.55}$$

由 $\dot H^{\frac d2-1}$ 层次上的能量不等式可见

$$\begin{aligned}&\|u(t)\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}+2\nu\int_0^t\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}dt'\\ =&\|u_0\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}+2\int_0^t\langle Q(u(t'),u(t')),u(t')\rangle_{\dot H^{\frac d2-1}}dt'.\end{aligned} \tag{2.56}$$

应用引理 2.7 中的三线性估计及插值定理, 可见

$$\begin{aligned}&\|u(t_2)\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}+2\nu\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}dt'\\ \leqslant&\|u(t_1)\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}+C\int_{t_1}^{t_2}\|u(t')\|^2_{\dot H^{\frac{d-1}{2}}}\|\nabla u(t')\|_{\dot H^{\frac d2-1}}dt'\\ \leqslant&\|u(t_1)\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}+C\int_{t_1}^{t_2}\|u(t')\|_{\dot H^{\frac d2-1}}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}dt'.\end{aligned} \tag{2.57}$$

注意到

$$\|u(t)\|_{\dot H^{\frac d2-1}}\leqslant 2\|u_0\|_{\dot H^{\frac d2-1}}\leqslant 2c\nu, \tag{2.58}$$

因此, 只要 c 适当小, 就可以保证

$$\|u(t_2)\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}+\nu\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u(t')\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}dt'\leqslant\|u(t_1)\|^2_{\dot H^{\frac d2-1}}. \tag{2.59}$$

证毕. □

A.3 N-S 方程的结构及相应结果

本节就是要开发利用 N-S 方程的特殊结构, 来对 N-S 方程解的性态进行更进一步的研究.

定理 3.1 设 $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^2)$, $(\mathrm{NS})_\nu$ 存在唯一的解 $u\in L^4(\mathbb{R}^+;\dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^2))$ 满足

$$u(t)\in C_b(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^2))\cap L^2(\mathbb{R}^+;\dot H^1(\mathbb{R}^2)), \tag{3.1}$$

并且满足能量守恒等式

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_2^2 dt' = \|u_0\|_2^2. \tag{3.2}$$

证明 由定理 2.6, $(\mathrm{NS})_\nu$ 在 $u \in L^4_{\mathrm{loc}}([0, T_{u_0}); \dot{H}^{\frac{1}{2}})$ 上存在唯一的解, 满足

$$u(t) \in C([0, T_{u_0}); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\mathrm{loc}}([0, T_{u_0}); \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)), \tag{3.3}$$

据 Blow-up 准则, 仅需证明

$$\int_0^{T_{u_0}} \|u(t)\|^4_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} dt < \infty \tag{3.4}$$

即可.

事实上, 对任意 $t < T_{u_0}$. 由不可压条件 $\mathrm{div} u = 0$ 知

$$Q(u, u) \in L^2_{\mathrm{loc}}([0, T_{u_0}); \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^2)).$$

由 L^2 层次的能量估计

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_2^2 dt' = \|u_0\|_2^2 + 2 \int_0^t \langle Q(u(t'), u(t')), u(t') \rangle_{(\dot{H}^{-1}, \dot{H}^1)} dt',$$

用到 $\langle a, b \rangle_{L^2} = \langle a, b \rangle_{(H^s,\ H^{-s})}$. 注意到

$$\langle Q(u, u), u \rangle = \sum_{1 \leqslant k, l \leqslant 2} \int_{\mathbb{R}^2} u^{(k)} \partial_k u^{(l)} \cdot u^{(l)} dx = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{div} u \cdot |u|^2 dx = 0, \tag{3.5}$$

因此

$$\|u(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_2^2 dt' = \|u_0\|_2^2. \tag{3.6}$$

由插值公式 $[L^\infty(L^2), L^2(\dot{H}^1)]_{\frac{1}{2}} \sim L^4(\dot{H}^{\frac{1}{2}})$ 推出

$$\int_0^T \|u(t)\|^4_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} dt \leqslant \|u_0\|_2^2 \int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2 dt \leqslant \frac{1}{2\nu} \|u_0\|_2^4 < \infty. \tag{3.7}$$

取 $T \to T_{u_0}$, 就有

$$\int_0^{T_{u_0}} \|u(t)\|^4_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} dt < \infty.$$

这与 $T_{u_0} < \infty$ 相矛盾. 由 Blow-up 准则和热传导方程的光滑效应, 就得定理 3.1 的所有结果. □

注记 3.1 (i) 当 $d=2$ 时, 能量估计就意味着在尺度变换下的不变量的控制.

(ii) 当 $d=3$ 时, 对于 $u_0(x)\in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $(\mathrm{NS})_\nu$ 解的整体适定性就是**著名的千年百万征题**. 下面证明定理 2.6 所得的局部温和解满足能量恒等式. 进而, 在假设解是整体存在的前提下, 可以证明解是稳定的.

命题 3.2 (能量恒等式) 设 $u_0(x)\in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. 设 $u(t)\in L^4_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ 是由定理 2.6 决定的温和解, 则 $u(t)\in C([0,T_{u_0});L^2(\mathbb{R}^3))$ 并且满足能量恒等式

$$\|u(t)\|_2^2+2\nu\int_0^t\|\nabla u(t')\|_2^2dt'=\|u_0\|_2^2. \tag{3.8}$$

证明 由于 $u(t)\in C([0,T_{u_0});\dot{H}^{\frac{1}{2}})\cap L^2_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});\dot{H}^{\frac{3}{2}})$, 则由插值定理可见

$$u(t)\in L^8_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});\dot{H}^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R}^3)), \tag{3.9}$$

这里所用的插值关系为

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}=&\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{2}\Longrightarrow\theta=\frac{1}{4},\\ s=&\frac{1}{2}(1-\theta)+\frac{3}{2}\times\theta=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

注意到嵌入定理, 就得

$$u(t)\in L^4_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});\dot{H}^{\frac{3}{4}}(\mathbb{R}^3))\hookrightarrow L^4_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});L^4(\mathbb{R}^3)). \tag{3.10}$$

进而有

$$u^{(j)}u^{(k)}\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});L^2(\mathbb{R}^3))\Longrightarrow Q(u,u)\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)). \tag{3.11}$$

因此, 由于 $u_0\in L^2(\mathbb{R}^3)$ 及 $Q(u,u)\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,T_{u_0});\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$ 则抛物型方程的光滑效应定理 2.4 就意味着 $u(t)\in C([0,T_{u_0});L^2(\mathbb{R}^3))$ 并且满足能量恒等式 (见定理 3.1 的证明过程, 用到 $\langle Q(u,u),u\rangle=0$). □

定理 3.3 设 $u(t)\in L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+;\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ 是 $(\mathrm{NS})_\nu$ 方程的整体解, 则有

$$\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}=0,\quad \int_0^\infty\|u(t)\|^4_{\dot{H}^1}dt<\infty. \tag{3.12}$$

注记 3.2 在定理 3.3 中, 如果还假设 $u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^3)$, 则直接从引理 2.8 就可得到定理 3.3 的证明. 事实上, 从能量恒等式

$$\|u(t)\|_2^2+2\nu\int_0^t\|\nabla u(t')\|_2^2dt'=\|u_0\|_2^2$$

可以推出

$$\sup_t \|u(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^\infty \|\nabla u(t')\|_2^2 dt' = \|u_0(x)\|_2^2.$$

利用插值公式, 就得

$$\int_{\mathbb{R}^+} \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^4 dt \leqslant \frac{1}{2\nu}\|u_0\|_2^4 < \infty.$$

因此, 至少存在一点 $t_0 > 0$, 使得 $\|u(t_0)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \ll 1$. 利用引理 2.8 中 Lyapunov 函数的单调衰减性, 就可以推出

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

利用从 t_0 之后, 小解的整体适定性 (含整体时空估计) 与有限时间段内的时空估计, 就推出整体时空估计 (3.12). 证毕.

定理 3.3 的证明　对初值函数进行频率分解

$$u_0(x) = u_{0h} + u_{0l}, \quad u_{0l} \triangleq \mathcal{F}^{-1}(\chi_{B_\rho(0)}(\xi)\widehat{u_0}(\xi)), \tag{3.13}$$

选取 ρ 使得

$$\|u_{0l}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leqslant \min\left\{c\nu, \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{3.14}$$

记 $u_l(t)$ 是由低频初值 $u_{0l}(t)$ 决定的 $(\mathrm{NS})_\nu$ 方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u = Q(u,u), \\ u|_{t=0} = u_{0l}(x) \end{cases} \tag{3.15}$$

的整体解 (见定理 2.6). 注意到 (3.14), 命题 2.8 就确保 $\|u_l(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$ 单调下降 (小解对应的 Lyapunov 函数 $\searrow 0$)

$$\|u_l(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.16}$$

令 $u_h = u - u_l$, 则它满足相关方程

$$\begin{cases} \partial_t u_h - \nu\Delta u_h = Q(u, u_h) + Q(u_h, u_l), \\ u_h|_{t=0} = u_{0h}(x). \end{cases} \tag{3.17}$$

由 Bernstein 估计

$$\|u_{0h}\|_2 \leqslant \rho^{-\frac{1}{2}}\|u_{0h}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \infty. \tag{3.18}$$

完全类似于命题 3.2 的证明过程:

$$u(t) \in L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^1) \Longrightarrow u(t) \in C(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)),$$

利用插值公式 $u(t) \in L^8_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{3}{4}})$ 及嵌入定理就得

$$u(t) \in L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{\frac{3}{4}}) \hookrightarrow L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^4(\mathbb{R}^3)).$$

因此

$$Q(u,u), \quad Q(u,u_h), \quad Q(u_h,u_l) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3)).$$

由 $u_h(0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 及 L^2 层次上的守恒律

$$\|u_h\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u_h(\tau)\|_2^2 d\tau = \|u_{0h}\|_2^2 + 2\int_0^t \big\langle Q(u_h,u_l), u_h\big\rangle_{(\dot{H}^{-1},\dot{H}^1)} d\tau, \tag{3.19}$$

这里用到 $\big\langle Q(u,u_h), u_h\big\rangle = 0$.

由 Sobolev 嵌入定理可见

$$\begin{aligned}
|\big\langle Q(u_h(t),u_l(t)), u_h(t)\big\rangle| &\leqslant C\|u_h u_l\|_2 \|\nabla u_h\|_2 \\
&\leqslant C\|u_h\|_6 \|u_l\|_3 \|\nabla u_h\|_2 \\
&\leqslant C\|u_l\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \|\nabla u_h\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

注意到低频部分满足 $\|u_\ell(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 将上式代入 (3.19) 就得

$$\|u_h(t)\|_2^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u_h(\tau)\|_2^2 d\tau \leqslant \|u_{0h}\|_2^2 + C\varepsilon \int_0^t \|\nabla u_h(\tau)\|_2^2 d\tau. \tag{3.21}$$

取 ε 充分小, 就可以保证

$$\|u_h(t)\|_2^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u_h(\tau)\|_2^2 d\tau \leqslant \|u_{0h}\|_2^2, \tag{3.22}$$

利用插值定理, 就得

$$\int_0^\infty \|u_h(\tau)\|^4_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} d\tau \leqslant \frac{1}{\nu}\|u_{0h}\|_2^4 < \infty. \tag{3.23}$$

存在 t_ε, 使得 $\|u_h(t_\varepsilon)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而推出

$$\|u(t_\varepsilon)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|u_l(t_\varepsilon)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} + \|u_h(t_\varepsilon)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \varepsilon.$$

现以 $t = t_\varepsilon$ 为初始状态, 求解 $(\text{NS})_\nu$ 方程, 由小解的整体存在性定理 (见定理 2.6), 推出

$$\int_{t_\varepsilon}^\infty \|u(t)\|^4_{\dot{H}^1} dt < \infty,$$

自然推出

$$\int_0^\infty \|u(t)\|^4_{\dot{H}^1} dt < \infty.$$

注意到当 $t \geqslant t_\varepsilon$ 时, $\|u(t)\|_{\dot H^{\frac12}} \searrow$ (单调下降), 且 $u(t) \in C([t_\varepsilon, \infty); \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3))$, 推出

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot H^{\frac12}} = 0 \quad (\text{否则, 就产生矛盾}). \qquad \square$$

推论 3.4　$\dot H^{\frac12}$ 中确保 $(\mathrm{NS})_\nu$ 整体存在的初值 $u_0(x)$ 的集合是开集.

证明　由题设条件, 可假设

$$\begin{aligned} u_0(x) \in \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3) \longmapsto & u(t) \in C(\mathbb{R}^+; \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+; \dot H^{\frac32}), \\ & u(t) \in L^4(\mathbb{R}^+; \dot H^1(\mathbb{R}^3)); \\ v_0(x) \in \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3) \longmapsto & v(t) \in L^4_{\mathrm{loc}}([0, T_{v_0}); \dot H^1), \\ & v(t) \in C([0, T_{v_0}); \dot H^{\frac12}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{\mathrm{loc}}([0, T_{v_0}); \dot H^{\frac32}(\mathbb{R}^3)). \end{aligned}$$

考虑 $w_0 = v_0(x) - u_0(x)$ 为初值, 则 $w(t) = v(t) - u(t)$ 应满足如下相差问题:

$$\begin{cases} \partial_t w - \nu\Delta w = Q(u, w) + Q(w, u) + Q(w, w), \\ w\big|_{t=0} = w_0(x). \end{cases} \tag{3.24}$$

由三线性估计及插值定理可见

$$\langle Q(u, v), w\rangle_{\dot H^{\frac d2 - 1}} \leqslant \|Q(u, v)\|_{\dot H^{\frac d2 - 2}} \|w\|_{\dot H^{\frac d2}} \leqslant \|u\|_{\dot H^{\frac{d-1}{2}}} \|v\|_{\dot H^{\frac{d-1}{2}}} \|w\|_{\dot H^{\frac d2}},$$

因此

$$\langle Q(u, w) + Q(w, u), w\rangle_{\dot H^{\frac12}} \leqslant \|u\|_{\dot H^1} \|w\|_{\dot H^1} \|\nabla w\|_{\dot H^{\frac12}} \lesssim \|u\|_{\dot H^1} \|w\|^{\frac12}_{\dot H^{\frac12}} \|\nabla w\|^{\frac32}_{\dot H^{\frac12}}, \tag{3.25}$$

$$\langle Q(w, w), w\rangle_{\dot H^{\frac12}} \leqslant C\|w\|_{\dot H^{\frac12}} \|\nabla w\|^2_{\dot H^{\frac12}}, \tag{3.26}$$

从而

$$\langle Q(u, w), w\rangle = 0, \qquad \langle Q(w, w), w\rangle = 0.$$

设 $\|w_0\|_{\dot H^{\frac12}} \leqslant \dfrac{\nu}{8C}$, 定义

$$T_{w_0} \triangleq \sup\Big\{t; \sup_{0\leqslant t'\leqslant t} \|w(t')\|_{\dot H^{\frac12}} \leqslant \frac{\nu}{4C}\Big\}, \tag{3.27}$$

则利用热方程的正则效应 (能量估计、极大函数估计、时空估计)

$$\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}} + 2\nu \int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}} dt' \leqslant \|w(0)\|^2_{\dot H^{\frac12}} + C\int_0^t \|u\|_{\dot H^1} \|w\|^{\frac12}_{\dot H^{\frac12}} \|\nabla w\|^{\frac32}_{\dot H^{\frac12}} dt',$$

因此

$$\|w(t)\|^2_{\dot H^{\frac12}} + \nu\int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}} dt' \leqslant \|w(0)\|^2_{\dot H^{\frac12}} + \frac{C}{\nu^3}\int_0^t \|u(t')\|^4_{\dot H^1} \|w(t')\|^2_{\dot H^{\frac12}} dt'. \tag{3.28}$$

由 Gronwall 不等式, 就可以推出

$$\|w(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2+\nu\int_0^t\|\nabla w(t')\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2dt'\leqslant\|w_0(x)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2\exp\Big(\frac{C}{\nu^3}\int_0^\infty\|u(t)\|_{\dot{H}^1}^4dt\Big),\qquad(3.29)$$

这里 Gronwall 不等式是对于函数

$$F=\|w(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2+\nu\int_0^t\|\nabla w\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2d\tau$$

使用的. 因此, 利用定理 3.3 中的估计, 取 $w_0(x)$ 进一步满足

$$\|w_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2\exp\Big(\frac{C}{\nu^3}\int_0^\infty\|u(t)\|_{\dot{H}^1}^4dt\Big)\leqslant\frac{\nu^2}{16C^2}\qquad(3.30)$$

代入到不等式 (3.29), 则所得的估计就意味着 $T_{w_0}=\infty$.

上面的推理表明: 只要 $w(0)=v_0(x)-u_0(x)$ 满足 $\|w_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\leqslant\dfrac{\nu}{8C}$ 及 (3.30), 则

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\infty}\|v(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\leqslant\|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}+\|w(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}<\infty,\qquad(3.31)$$

于是, $T_{v_0}=\infty$. □

A.4 N-S 方程的 L^p 方法及其注记

以 $\mathbb{R}^3$ 为例, 来介绍 $(\mathrm{NS})_\nu$ 方程在临界空间 $L^3(\mathbb{R}^3)$ 中的局部适定性.

定理 4.1 设 $u_0(x)\in L^3(\mathbb{R}^3)$. 则存在 $T>0$ 与 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的唯一解 $u(t)\in C([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))$. 进而, 存在常数 $c>0$, 当 $\|u_0\|_3\leqslant c\nu$ 时, $T=\infty$.

注记 4.1 (a) F. Oru 在其博士论文中证明 $B(u,v)$ 不是

$$L^\infty([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))\times L^\infty([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))\longmapsto L^\infty([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))$$

上的有界双线性算子. 事实上, 对 $\forall d\geqslant 3$, 双线性算子在 $C([0,T);L^d(\mathbb{R}^d))$ 都是无界的, 证明可见文献 [Lem1].

(b) 试图在 $L^\infty(I,L^3(\mathbb{R}^3))$ 上构造 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的 Picard 解是不可能的 (直接利用不动点定理). 这就要利用线性抛物方程的光滑效应来构造时空空间

$$C(I;L^3)\cap L^q(I;L^r(\mathbb{R}^3)),\quad \frac{2}{q}=3\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{r}\Big),\quad 3<r\leqslant 9,\qquad(4.1)$$

或关于时间变量加权的时空空间 (亦称 Kato 型空间)

$$C(I;L^3(\mathbb{R}^3))\cap\mathcal{C}_q(I;L^r(\mathbb{R}^3)),\quad \frac{2}{q}=3\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{r}\Big),\quad 3<r<\infty.\qquad(4.2)$$

下面以 Kato 型空间为例来阐述 L^p 方法. 详细的证明可见文献 [MiZ], [MYZ], [MZ] 等.

定义 4.1　设 $r>3$, $0<T\leqslant\infty$, I=[0,T), 定义

$$\mathcal{C}_q(I;L^r(\mathbb{R}^3))=\Big\{u\in C((0,T);L^r(\mathbb{R}^3)),\|u\|_{\mathcal{C}_q(r)(I,L^r(\mathbb{R}^3))}\triangleq\sup_{t\in[0,T]}(\nu t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{r})}\|u(t)\|_r$$
$$=\sup_{t\in[0,T]}(\nu t)^{\frac{1}{q}}\|u(t)\|_r<\infty\Big\},$$

这里 $\dfrac{2}{q}=3\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{r}\right)$. 当 $r=3$ 时, $\mathcal{C}_q(I;L^r)=C_b(I;L^r)$.

习惯上, 亦有记 $K_r(I)=\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))$. 当 $T=\infty$ 时, $\mathcal{C}_{q(r)}(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^3))$ 是在 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的尺度变换下不变的空间. 当 $r=3$ 时, $q(r)=\infty$, 此时 $\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))\triangleq C_b(I,L^3(\mathbb{R}^3))$.

注记 4.2　(a) 此方法源于自由热方程的 $L^p\longrightarrow L^r$ 估计. 事实上, 由

$$e^{\nu t\Delta}u_0=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4\nu t}}*u_0(x) \tag{4.3}$$

及解的 Young 不等式

$$\begin{aligned}\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_r\leqslant&\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\|e^{-\frac{|x|^2}{4\nu t}}\|_{L^\sigma}\|u_0\|_3\quad\left(\frac{1}{r}+1=\frac{1}{3}+\frac{1}{\sigma}\right)\\ \leqslant&C(\nu t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{3}{r})}\|u_0\|_3,\end{aligned}$$

等价地有

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))}\leqslant C\|u_0\|_3. \tag{4.4}$$

事实　$\forall\varepsilon>0$, $\exists\varphi\in S(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^3)$, 当 $\|u_0-\varphi\|_3<\varepsilon$, 就有

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0-e^{\nu t\Delta}\varphi\|_{\mathcal{C}_q(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^3))}\leqslant C\varepsilon, \tag{4.5}$$

注意到 $\|e^{\nu t\Delta}\varphi\|_r\leqslant\|\varphi\|_r$, 容易推出

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))}\leqslant C\varepsilon+T^{\frac{1}{q(r)}}\|\varphi\|_r. \tag{4.6}$$

(b) 在临界空间中研究 $(\mathrm{NS})_\nu$ 小解的整体适定性时,

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^3))}\cong\|u_0\|_{B_{r,\infty}^{-1+\frac{3}{r}}} \tag{4.7}$$

是 $\|u_0\|_{L^3}$, $\|u_0\|_{\dot H^{\frac{1}{2}}}$ 的一个很好的替代条件. 即仅要求 $\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_q(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^3))}$ 的小性, 勿需要求 $\|u_0\|_{L^3}$ 或 $\|u_0\|_{\dot H^{\frac{1}{2}}}$ 的小性. 从 Besov 空间理论可见, $\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^3))}$ 恰是 Besov 空间 $B_{r,\infty}^{-1+\frac{3}{r}}\equiv B_{r,\infty}^{-\frac{2}{q}}$ 的等价模.

例子：取 $w \in \Sigma^2$ ($\mathbb{R}^3$ 中的单位球面), $\phi \in S(\mathbb{R}^3)$ 并且 $\mathrm{supp}\widehat{\phi}$ 紧 (仅含低频). 定义

$$\phi_n \triangleq e^{in\omega\cdot x}\phi(x).$$

直接验算:

$$\|\phi_n\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = \||\xi|^{\frac{1}{2}}\widehat{\phi_n}(\xi)\|_2 = \||\xi|^{\frac{1}{2}}\widehat{\phi}(\xi - n\omega)\|_2 = \||\eta + n\omega|^{\frac{1}{2}}\widehat{\phi}(\eta)\|_2 \geqslant C\sqrt{n}, \qquad (4.8)$$

$$e^{t\nu\Delta}\phi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\xi\cdot x}e^{-\nu t|\xi|^2}\widehat{\phi}(\xi - nw)d\xi = e^{inx\cdot w}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\eta}e^{-\nu t|\eta+nw|^2}\widehat{\phi}(\eta)d\eta. \qquad (4.9)$$

注意到, 只要 n 充分大, 由 $\widehat{\phi}(\eta)$ 的紧支特征, 易见

$$t^{\frac{1}{q(r)}}\|e^{t\nu\Delta}\phi_n\|_{L^r} \leqslant t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2r}}e^{-\frac{\nu}{2}tn^2}\|\widehat{\phi}(\eta)\|_{r'} \leqslant \frac{1}{n^{1-\frac{3}{r}}}\|\widehat{\phi}(\eta)\|_{r'}, \qquad (4.10)$$

此意味着：虽然 $\|\phi_n\|_3 = \|\phi\|_3 < \infty$, 然而

$$\lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\|\phi_n\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))} = 0.$$

上面例子充分说明了空间 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}^{-1+\frac{3}{r}}_{r,\infty}(\mathbb{R}^3)$ 的包含关系.

定理 4.2 设 $r \in (3,\infty)$, $u_0 \in S'(\mathbb{R}^3)$, 若对 $T > 0$ 满足

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0(x)\|_{\mathcal{C}_q(\mathbb{R}^+;L^r(\mathbb{R}^3))} \cong \|u_0\|_{\dot{B}^{-\frac{2}{q(r)}}_{r,\infty}} < c\nu.$$

则 $(\mathrm{NS})_\nu$ 存在唯一的解 $u(t,x) \in B_{2c\nu}(0)$, 这里 $B_{2c\nu}(0)$ 是 Banach 空间 $\mathcal{C}_q(\mathbb{R}^+; L^r(\mathbb{R}^3))$ 中以 0 为中心, $2c\nu$ 为半径的球.

注记 4.3 (i) 我们将会看到, 定理 4.1 是定理 4.2 中结果的一个直接推论.

(ii) 对于 $u_0(x) \in L^3(\mathbb{R}^3)$, 可选取 $\varphi \in S(\mathbb{R}^3)$ 满足 $\|u_0 - \varphi\|_3 < \varepsilon$, 使得 (4.6) 成立, 即

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))} \leqslant C\varepsilon + T^{\frac{1}{q(r)}}\|\varphi\|_r.$$

通过建立双线性估计

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{C}_q(I;L^r(\mathbb{R}^3))} \leqslant C_0\|u\|_{\mathcal{C}_q(I;L^r(\mathbb{R}^3))}\|v\|_{\mathcal{C}_q(I;L^r(\mathbb{R}^3))},$$

则就可以取 T 充分小, 就可以推导出 $\mathcal{C}_q(I;L^r(\mathbb{R}^3))$ 中的局部适定性结果. 这一事实无法直接从

$$\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))} \leqslant C\|u_0\|_3$$

看出. 这里蕴涵着逼近的思想, 事实上, 如果知道 (4.6) 意味着

$$\lim_{T\to 0}\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_3 = 0$$

就可以. 详见文献 [MiZ] 有关的讨论.

(iii) 当 $\|u_0\|_3 \ll 1$ 时, 直接利用时空估计 (4.4) 就推出小解的整体存在性.

定理 4.2 的证明可以转化为研究 $(\mathrm{NS})_\nu$ 方程对应的积分方程

$$u = e^{\nu t\Delta}u_0 + B(u,u) \tag{4.11}$$

的适定性. 思想就是在 $\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r(\mathbb{R}^3))$ 中研究 (4.11) 右边定义的非线性映射的不动点. 为此, 首先研究相应的双线性估计.

命题 4.3 $(\mathrm{NS})_\nu$ *方程对应的双线性估计的卷积形式是*

$$B^{(j)}(u,v)(t,x) = \sum_{l,k}\int_0^t \Gamma^j_{k,l}(t-t',\cdot) * (u^{(k)}(t',\cdot)u^{(l)}(t',\cdot))dt', \tag{4.12}$$

其中 $\Gamma^j_{k,l} \in C((0,\infty);L^s(\mathbb{R}^3))$, $\forall s \in [1,\infty)$, *并且*

$$\|\Gamma^j_{k,l}(t,\cdot)\|_s \leqslant \frac{C}{(\nu t)^{2-\frac{3}{2s}}}. \tag{4.13}$$

证明 容易看出, 一般双线性算子 $B^{(j)}(u,v)$ 有如下的表示形式:

$$B(u,v) = -\int_0^t e^{-\nu(t-t')\Delta}\mathcal{P}\nabla\cdot(u\otimes v)(t')dt',$$

就可以直接推出

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}B^{(j)}(u,v) &= -i\int_0^t e^{-\nu(t-t')|\xi|^2}\Big(\delta_{jk} - \frac{\xi_j\xi_k}{|\xi|^2}\Big)\xi_l\mathcal{F}(u^{(l)}u^{(k)})dt' \\
&= -i\int_0^t e^{-\nu(t-t')|\xi|^2}\frac{-\xi_j\xi_k\xi_l + \delta_{jk}\xi_l\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}\mathcal{F}(u^{(l)}u^{(k)})dt' \\
&= -i\int_0^t e^{-\nu(t-t')|\xi|^2}\sum_{k,l}a_j^{(k,l)}\frac{\xi_j\xi_k\xi_l}{|\xi|^2}\mathcal{F}(u^{(l)}u^{(k)})dt'.
\end{aligned}$$

由此看出可以将双线性形式表示成形如

$$\begin{aligned}
\Gamma^j_{k,l}(t,x) &= -i\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{-\nu t|\xi|^2}\sum_{k,l}\frac{-\xi_j\xi_k\xi_l + \delta_{jk}\xi_l\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}\Big) \\
&\triangleq -i\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{-\nu t|\xi|^2}\sum_{k,l}a_j^{(k,l)}\xi_j\xi_k\xi_l,|\xi|^{-2}\Big)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

的等价形式. 当然, (4.14) 最后一个等式可以视为是 N-S 方程所对应的双线性项的推广形式.

下面目的就是要将 (4.14) 写成卷积形式 (4.12), 这可以归结为计算

$$\xi_k\xi_j\xi_l|\xi|^{-2}e^{-\nu t|\xi|^2}$$

的 Fourier 逆变换. 事实上,

$$e^{-\nu t|\xi|^2}|\xi|^{-2} = \nu \int_t^\infty e^{-\nu\tau|\xi|^2} d\tau,$$

$\Gamma^j_{k,l}(t,x)$ 本质上可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{k,l}(t,x) =& - i\nu \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \xi_j\xi_k\xi_l e^{ix\cdot\xi-\nu\tau|\xi|^2} d\tau d\xi \\ =&\nu\partial_j\partial_k\partial_l \int_t^\infty \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi-\nu\tau|\xi|^2} d\tau d\xi.\end{aligned}$$

利用 Gauss 函数的性质, 就有

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{k,l}(t,x) =&\nu\partial_j\partial_k\partial_l \int_t^\infty \frac{1}{(4\nu\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4\nu\tau}} d\tau \\ =&\frac{\nu}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_t^\infty \frac{1}{(4\nu\tau)^3} \psi^{(j)}_{kl}\left(\frac{x}{\sqrt{4\nu\tau}}\right) d\tau,\end{aligned} \tag{4.15}$$

这里

$$\psi^{(j)}_{kl}(z) \triangleq \partial_j\partial_k\partial_l e^{-|z|^2}. \tag{4.16}$$

令 $r = (4\nu\tau)^{-\frac{1}{2}}|x|$, 就可以推出 $\dfrac{x}{\sqrt{4\nu\tau}} = \dfrac{x}{|x|}r$, 于是

$$|\Gamma^j_{k,l}(t,x)| \leqslant \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}|x|^4} \int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{4\nu t}}} r^3 \psi^{(j)}_{kl}\left(\frac{x}{|x|}r\right) dr. \tag{4.17}$$

分别视 $|\psi^{(j)}_{kl}\left(\dfrac{x}{|x|}r\right)| \leqslant C$ 或 $r^3\psi^{(j)}_{kl}\left(\dfrac{x}{|x|}r\right)$ 可积,

$$|\Gamma^j_{k,l}(t,x)| \leqslant C \min\left\{\frac{1}{|x|^4}, \frac{1}{(\nu t)^2}\right\},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |\Gamma^j_{k,l}(t,x)|^s dx \leqslant& \int_{|x|\leqslant\chi} \frac{dx}{(\nu t)^{2s}} + \int_{|x|>\chi} \frac{dx}{|x|^{4s}} \\ \lesssim& \frac{1}{(\nu t)^{2s}}\chi^3 + \chi^{3-4s} \qquad (\text{令 } \chi = (\nu t)^{\frac{1}{2}}) \\ \lesssim& \frac{1}{(\nu t)^{2s-\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

故

$$\|\Gamma^j_{k,l}(t,x)\|_s \leqslant \frac{C}{(\nu t)^{2-\frac{3}{2s}}} \qquad \left(\text{将会看到 } \frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{r}\right). \tag{4.18}$$

为了证明连续性, 仅需对于 $0 < c < t_1 \leqslant t_2$, 有

$$|\Gamma^j_{k,l}(t_2,x)-\Gamma^j_{k,l}(t_1,x)|\leqslant \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}|x|^4}\int_{\frac{|x|}{\sqrt{4\nu t_1}}}^{\frac{|x|}{\sqrt{4\nu t_2}}} r^3\psi^{(j)}_{kl}\Big(\frac{x}{|x|}r\Big)dr$$

$$\leqslant C\min\Big(\frac{1}{|x|^4},\frac{t_2^2-t_1^2}{(\nu t_1t_2)^2}\Big). \tag{4.19}$$

从而说明命题 4.3. □

作为命题 4.3 的推论, 有如下比齐次部分更优的正则性, 它在无条件唯一性的证明中非常有效.

引理 4.4 (双线性估计)　设 p_1,p_2,r 满足

$$0<\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1,\quad \frac{1}{r}\leqslant\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}<\frac{1}{3}+\frac{1}{r}\leqslant 1. \tag{4.20}$$

则对 $\forall T>0$, 双线性映射

$$B:\mathcal{C}_{q(p_1)}(I;L^{p_1}(\mathbb{R}^3))\times\mathcal{C}_{q(p_2)}(I;L^{p_2}(\mathbb{R}^3))\longrightarrow\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^{r}(\mathbb{R}^3)),$$

并且满足估计

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{C}_{q(r)}(I;L^r)}\leqslant\frac{C}{\nu}\|u\|_{\mathcal{C}_{q(p_1)}(I;L^{p_1})}\|v\|_{\mathcal{C}_{q(p_2)}(I;L^{p_2})}. \tag{4.21}$$

证明　由 (4.20), $\exists s\in[1,\infty)$ 使得

$$1+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}.$$

利用 Young 不等式就推出

$$\begin{aligned}\|B(u,v)\|_{L^r(\mathbb{R}^3)}\leqslant& C\int_0^t\frac{1}{(\nu(t-t'))^{\frac{1}{2}(4-3(1+\frac{1}{r}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}))}}\|u(t')\|_{p_1}\|v(t')\|_{p_2}dt'\\ \leqslant& C\int_0^t\frac{1}{(\nu(t-t'))^{\frac{1}{2}(1-3(\frac{1}{r}-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}))}}\frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}(2-3(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}))}}dt'\\ &\times\|u\|_{\mathcal{C}_{q(p_1)}(I;L^{p_1})}\|v\|_{\mathcal{C}_{q(p_2)}(I;L^{p_2})}\\ \leqslant&\frac{C}{\nu}\frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{r})}}\|u\|_{\mathcal{C}_{q(p_1)}(I;L^{p_1})}\|v\|_{\mathcal{C}_{q(p_2)}(I;L^{p_2})}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

此就意味着双线性估计 (4.21). 对于 $r=p_1=p_2$ 使用抽象存在性定理 1.3, 就得定理 4.2 的证明. □

定理 4.1 的证明　第一步. 在附录 A.1 中抽象算子方程的存在性定理 1.3 的框架下, 利用

自由部分时空估计 (4.6)	$\oplus$	双线性估计 (4.21)
$r=6,q(r)=4$		$r=p_1=p_2=6,q(r)=q(p_1)=q(p_2)=4$

直接推出大解的局部存在性.

另一方面, 利用

$$\boxed{\text{自由部分时空估计 (4.4)}} \oplus \boxed{\text{双线性估计 (4.21)}}$$
$$r=6, q(r)=4 \qquad r=p_1=p_2=6, q(r)=q(p_1)=q(p_2)=4$$

就推出小解的整体存在性.

第二步. 证明: $u \in C(I, L^3(\mathbb{R}^3))$ 或 $u(t) \in C(\mathbb{R}^+; L^3(\mathbb{R}^3))$. 记

$$\begin{aligned} w =& u - e^{\nu t\Delta}u_0 = \int_0^t e^{\nu(t-t')\Delta}Q(u,u)dt' \\ \triangleq& B(u,u) \quad \text{(充分利用热方程非齐次部分的光滑效应)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

由双线性估计 (取 $r=3$, $p_1=p_2=6$), 在开区间 $(0,T)$ 上,

$$w(t) \in C((0,T); L^3(\mathbb{R}^3)). \tag{4.24}$$

下面来证明 $t=0$ 处的连续性. 由双线性估计可见

$$\|w\|_{L^\infty([0,t];L^3(\mathbb{R}^3))} \leqslant \frac{C}{\nu}\|u\|^2_{\mathcal{C}_4([0,t];L^6(\mathbb{R}^3))}, \quad \forall t < T, \tag{4.25}$$

及构造不动点时闭球的取法, 就有

$$\|u\|_{\mathcal{C}_4([0,t);L^6(\mathbb{R}^3))} \leqslant 2\|e^{\nu t\Delta}u_0\|_{\mathcal{C}_4([0,t);L^6(\mathbb{R}^3))}. \tag{4.26}$$

注意到 (4.6), 上式本质上就意味着

$$\lim_{t\to 0}\|e^{\nu t\Delta}u_0(x)\|_{\mathcal{C}_4([0,t);L^6(\mathbb{R}^3))} = 0, \tag{4.27}$$

根据 (4.25),(4.26) 及 (4.27), 可见

$$\lim_{t\to 0}\|w\|_{L^\infty([0,t];L^3(\mathbb{R}^3))} = 0. \tag{4.28}$$

再利用热流的连续性

$$\lim_{t\to 0}\|e^{\nu t\Delta}u_0(x) - u_0(x)\|_3 = 0,$$

可以推出

$$\lim_{t\to 0} u(t) = u_0(x), \quad L^3(\mathbb{R}^3).$$

第三步. $u(t)$ 在函数空间 $C([0,T]; L^3(\mathbb{R}^3))$ 中的无条件唯一性.

由于求解过程依赖于工作空间, 那么 N-S 方程在 $C([0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$ 中是否保持唯一性. 这就对应着无条件唯一性问题. 利用双线性估计引理 4.4 中的估计 (4.21), 取 $r=2$, $p_1=p_2=3$ (充分反映了非齐次部分具有更好的正则性), 则

$$\sup_{t\in[0,T]}(\nu t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{2})}\|w\|_2\leqslant\frac{C}{\nu}\|u\|^2_{\mathcal{C}_b([0,T);L^3)}. \tag{4.29}$$

因此, $w(t,x)\in C([0,T),L^2(\mathbb{R}^d))$. 今设 $u_j(t)$ 是 $(\mathrm{NS})_\nu$ 在 $C([0,T];L^3(\mathbb{R}^3))$ 中的具有相同初值 $u_0(x)$ 的解, $u_{21}\triangleq u_2(t)-u_1(t)\equiv w_2-w_1\in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^3))$, 并且满足

$$\begin{cases}\partial_t u_{21}-\nu\Delta u_{21}=f_{21},\\ u_{21}(0)=0,\end{cases} \tag{4.30}$$

这里

$$f_{21}=Q(e^{\nu t\Delta}u_0,u_{21})+Q(u_{21},e^{\nu t\Delta}u_0)+Q(w_2,u_{21})+Q(u_{21},w_1). \tag{4.31}$$

事实上, 直接验算就知

$$\begin{aligned}Q(u_2,u_2)-Q(u_1,u_1)=&Q(u_2-u_1,u_2)+Q(u_1,u_2-u_1)\\=&Q(u_{21},u_2)+Q(u_1,u_{21})\\=&Q(u_{21},e^{\nu t\Delta}u_0)+Q(u_{21},w_2)\\&+Q(e^{\nu t\Delta}u_0,u_{21})+Q(w_1,u_{21}).\end{aligned}$$

由 Sobolev 嵌入定理, 有

$$\begin{aligned}\|Q(g,h)\|_{\dot H^{-\frac{3}{2}}}\leqslant C\sup_{1\leqslant k,l\leqslant 3}\|g^{(k)}h^{(l)}\|_{\dot H^{-\frac{1}{2}}}\leqslant C\sup_{1\leqslant k,l\leqslant 3}\|g^{(k)}h^{(l)}\|_{L^{\frac{3}{2}}}\\ \leqslant C\|g\|_{L^3}\|h\|_{L^3},\end{aligned} \tag{4.32}$$

因此

$$f_{21}\in L^2([0,T];\dot H^{-\frac{3}{2}}). \tag{4.33}$$

此意味着 u_{21} 是 $C(I,S'(\mathbb{R}^3))$ 中唯一的解, 于是由热传导方程解的光滑效应 (能量不等式部分, 引理 2.4), 可见

$$u_{21}\in C_b([0,T];\dot H^{-\frac{1}{2}})\cap L^2([0,T];\dot H^{\frac{1}{2}}), \tag{4.34}$$

及

$$\begin{aligned}\|u_{21}\|^2_{\dot H^{-\frac{1}{2}}}+2\nu\int_0^t\|u_{21}\|^2_{\dot H^{\frac{1}{2}}}dt'=&2\int_0^t\langle f_{21}(t'),u_{21}(t')\rangle_{\dot H^{-\frac{1}{2}}}dt'\\ \leqslant&2\int_0^t\|f_{21}(t')\|_{\dot H^{-\frac{3}{2}}}\|u_{21}(t')\|_{\dot H^{\frac{1}{2}}}dt'.\end{aligned} \tag{4.35}$$

由于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 稠于 $L^3(\mathbb{R}^3)$, 分解 u_0 如下:

$$u_0(x) = u_{0h} + u_{0\ell}, \quad \|u_{0h}\|_3 \leqslant c\nu, \quad u_{0\ell} \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap L^6(\mathbb{R}^3). \tag{4.36}$$

令

$$g_{21} \triangleq f_{21} - Q(e^{\nu t\Delta}u_{0\ell}, u_{21}) - Q(u_{21}, e^{\nu t\Delta}u_{0\ell}), \tag{4.37}$$

应用 (4.32) 的估计方法, 再次利用 Sobolev 嵌入定理, 可见

$$\begin{aligned} A_{21}(t) &\overset{\text{def}}{=} \|g_{21}(t)\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}} \\ &\leqslant C(\|e^{\nu t\Delta}u_{0h}\|_3 + \|w_1\|_{L^\infty L^3} + \|w_2\|_{L^\infty L^3})\|u_{21}(t)\|_{L^3} \\ &\leqslant C(\|u_{0h}\|_3 + \|w_1\|_{C_b(I,L^3)} + \|w_2\|_{C_b(I,L^3)})\|u_{21}(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

(4.36) 意味着: 只要取 c 及 t 充分小, 就可保证

$$A_{21}(t) \leqslant \frac{\nu}{4}\|u_{21}(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}. \tag{4.39}$$

另一方面, 利用 Hölder 不等式及 Sobolev 嵌入定理, 亦有

$$\begin{aligned} B_{21}(t) &\triangleq \|Q(e^{\nu t\Delta}u_{0\ell}, u_{21}) + Q(u_{21}, e^{\nu t\Delta}u_{0\ell})\|_{\dot{H}^{-\frac{3}{2}}} \\ &\leqslant C \sup_{1\leqslant k,l\leqslant 3} \|(e^{\nu t\Delta}u_{0\ell}^{(k)})u_{21}^{(l)}\|_{L^{\frac{3}{2}}} \\ &\leqslant C\|e^{\nu t\Delta}u_{0\ell}\|_6\|u_{21}\|_2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

利用热流在 L^p 中的压缩性, 并借助于 $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ 与 $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ 的插值可见

$$B_{21}(t) \leqslant C\|u_{0\ell}\|_6\|u_{21}\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}}\|u_{21}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.41}$$

将 (4.39), (4.41) 代入估计 (4.35) 中, 又得

$$\|u_{21}(t)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 + \frac{3}{2}\nu\int_0^t \|u_{21}(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 dt' \leqslant C\|u_{0\ell}\|_6 \int_0^t \|u_{21}(t')\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^{\frac{1}{2}}\|u_{21}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^{\frac{3}{2}} dt'. \tag{4.42}$$

采用 Young 不等式

$$ab \leqslant \frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{4}b^{\frac{4}{3}},$$

就得

$$\|u_{21}(t)\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 + \nu\int_0^t \|u_{21}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}^2 dt' \leqslant \frac{C}{\nu^3}\|u_{0\ell}\|_6^4 \int_0^t \|u_{21}(t')\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}}^2 dt'. \tag{4.43}$$

因此

$$u_{21} \equiv 0, \quad \text{在 } [0,t] \quad (\text{用到 } u_{21} \in C_b([0,T];\dot{H}^{-\frac{1}{2}})).$$

由于唯一性是局部性质, 可推出无条件唯一性定理. □

注记 4.4 (a) 不可压 N-S 方程的数学理论源于 Leray 关于弱解的整体存在性的著名文章 ([Ler]). 到目前为止, 弱解的正则性最好的结果是 Caffarelli, Kohn 及 Nirenberg 的工作, 见 [CKN].

(b) Leray 在 1933 年还证明: 如果初值满足如下小条件:

$$\|u_0\|_2 \cdot \|\nabla u_0\|_2 \leqslant c\nu^2, \quad 或\ \|u_0\|_2^2 \cdot \|\nabla u_0\|_\infty \leqslant c\nu^3, \tag{4.44}$$

就可以导出解的唯一性, 当然它就是所求的物理解. 小解条件被 Fujta 及 Kato 改进成定理 2.6 的形式 ([FKl]). 这里是 Chemin 给出了单模方法的新证明.

(c) 大解的整体稳定性是由 Gallegher, Iftimie 及 Planchon 给出的. 推论 3.4 的思想源于 Ponce, Racke, Siers 及 Titi 的工作 [PRST]. L^r- 理论结果源于 Kato 的工作 [Katol]. 无条件唯一性则是由 Furioli, Lemarié-Rieusset 及 Terreneo 首先解决, 见 [FLRT].

注记 4.5 关于双线性部分估计 (命题 4.3), 可以简单地化成数量形式的双线性估计. 事实上

$$B(u,v) = -\int_0^t S(t-\tau)\mathcal{P}\nabla\cdot(u\otimes v)(\tau)d\tau,$$

记

$$Q(t-\tau) \triangleq S(t-\tau)\mathcal{P}\nabla\cdot$$

则它对应的卷积的张量形式核函数 $K(x,t)$ 由如下公式给出:

$$\widehat{K_j^{k,\ell}}(\xi,t) = e^{-(t-\tau)|\xi|^2}\Big(\delta_{j,k} - \frac{\xi_k\xi_j}{|\xi|^2}\Big)\xi_\ell. \tag{4.45}$$

为方便起见, 记

$$\sqrt{t-\tau}Q(t-\tau) = \Big(\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\Big)^3\Theta\Big(\frac{\cdot}{\sqrt{t-\tau}}\Big)*,$$

这里

$$\Theta = \{\theta_j^{k,\ell}\} \in L^1\cap L^\infty, \quad |\widehat{\Theta}(\xi)| \sim |\xi|e^{-|\xi|^2}.$$

于是, 在进行双线性估计时, 可以考虑 $B(u,v)$ 的数量函数形式

$$B(f,g) = -\int_0^t (t-s)^{-2}\Theta\Big(\frac{\cdot}{\sqrt{t-\tau}}\Big)*(fg)(s)ds, \quad \widehat{\Theta}(\xi) \cong |\xi|e^{-|\xi|^2}$$

来进行估计, 就可以获得完全相同的结果.

由于

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Theta(x)dx = \widehat{\Theta}(0) = 0,$$

容易看出

$$\Theta_t = \Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)^3\Theta\Big(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\Big),$$

具有与齐次 Littlewood-Paley 算子 Δ_j 对应的核函数 $\psi_j = 2^{3j}\varphi(2^j x)$ 的功能 (即连续形式与离散形式), 具有类似的振荡性质. 因此, 可以借助于 $\Theta(\xi)$ 定义齐次 Besov 空间. 事实上, $\widehat{S}(\xi) = e^{-|\xi|^2}$ 与 $\widehat{\Theta} \cong |\xi|e^{-|\xi|^2}$ 的关系类似于 Littlewood-Paley 分解中 $\widehat{\varphi}(\xi)$ 与 $\widehat{\psi}(\xi)$ 的关系, 这也是可以用 $\Theta(x)$ 定义齐次 Besov 空间的基本理念.

$$\widehat{S}(\xi) = e^{-|\xi|^2} \Longrightarrow S_t = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3 S\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) * \sim S_j = 2^{3j}\varphi(2^j\cdot)*,$$

$$\widehat{\Theta}(\xi) \cong |\xi|e^{-|\xi|^2} \Longrightarrow \Theta_t = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^3 \Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) * \sim \dot{\Delta}_j = 2^{3j}\varphi(2^j\cdot)*,$$

这里 $\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{\varphi}\left(\dfrac{\xi}{2}\right) - \widehat{\varphi}(\xi)$. 于是, 设 $\alpha > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, 则 $\dot{B}^{-\alpha}_{p,q}$ 有如下形式的等价范数:

$$\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_j (2^{-\alpha j}\|\dot{\Delta}_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,q}} = \left(\sum_j (2^{-\alpha j}\|S_j f\|_p)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{\alpha}{2}}\|S_t f\|_p)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{\alpha}\|\Theta_t f\|_p)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

特别, 当 $q = \infty$ 时,

$$\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}} \cong \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|S_t f\|_p \cong \sup_{t>0} t^{\alpha}\|\Theta_t f\|_p.$$

同理, 在 $p < \infty$ 的条件下, 亦可以给出负指数 Triebel-Lizorkin 空间的类似的刻画.

A.5 L^d-解的无条件唯一性

由于 $B(u, v)$ 不是

$$L^\infty([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d)) \times L^\infty([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d)) \longrightarrow L^\infty([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d))$$

的双线性有界算子, 从而无法直接在 $C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d))$ 上构造 $(\mathrm{NS})_\nu$ 的解. 一般来说, 总是在 $C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d))$ 的子空间或中介的时空空间中利用压缩映射原理来求解 (所获得的解在这些工作空间中保持唯一性, 并且 $u(t) \in C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d))$). 由于附加空间的选取或中介的时空工作空间不尽相同, 从而产生了如下新的问题: $u(t) \in C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d))$ 是否保持唯一性?

定理 5.1 ([FLRT]) 设

$$u(t), \quad v(t) \in C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d))$$

是 $(\mathrm{NS})_\nu$ 方程具有相同初值的弱解, 则 $u(t) = v(t)$.

本节简单介绍另外三种证明唯一性的方法, 即 Besov 空间方法、Lorentz 空间方法及极大函数方法.

设

$$u = e^{\nu t\Delta}u_0 + B(u,u) \triangleq e^{\nu t\Delta}u_0 + w_1 \in C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d)),$$
$$v = e^{\nu t\Delta}u_0 + B(v,v) \triangleq e^{\nu t\Delta}u_0 + w_2 \in C([0,T^*); L^d(\mathbb{R}^d)).$$

则 $w = u - v = w_1 - w_2 = B(u,u) - B(v,v)$ 就可表示成

$$\begin{aligned} w =& B(w,u) + B(v,w) \\ =& B(w,w_1) + B(w_2,w) + B(w, e^{\nu t\Delta}u_0) + B(e^{\nu t\Delta}u_0, w). \end{aligned} \tag{5.1}$$

A.5.1 Besov 空间方法

Besov 空间方法是由 Lemarié-Rieusset 首先给出的. 为了书写方便, 下面总取 $\nu = 1$. 我们将会发现, 基于 K- 泛函的抽象插值公式, 对于第二可积指标是 ∞ 的空间 (即范数可以通过单频段或单频块刻画的空间, 至少从形式看是如此), 可以实现时空正则性的完全转化. 为此, 先作一些预备性的工作.

设 V 是一个拓扑向量空间, $A_0, A_1 \subset V$ 是两个 Banach 空间, 满足 $A_0 \cap A_1$ 及 $A_0 + A_1$ 是良定的 Banach 空间. $\mathcal{F}$ 是 Banach 空间 (A_0, A_1) 的插值函子, $\mathcal{F}(A_0, A_1) \subset A_0 + A_1$ 就定义了满足如下原则的插值空间: 记 $\mathcal{F}(B_0, B_1) \subset B_0 + B_1 \subset V$ 是与 Banach 空间 (B_0, B_1) 相关联的空间. 若 $\mathcal{T}$ 是 A_j 到 B_j 有界线性算子 $(j = 0, 1)$, 则 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ 到 $\mathcal{F}(B_0, B_1)$ 上的有界线性算子. 插值空间理论源于 Lions 与 Peetre 的实方法 ([LP]) 及 Calderón 的复方法. 这方面的详尽描述见文献 [BL].

实插值的 K- 泛函方法 $\forall a \in A_0 + A_1$, 记

$$K(t,a) = \min\left\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1};\ a = a_0 + a_1\right\},$$

$\forall \theta \in (0,1)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 定义 $a \in [A_0, A_1]_{\theta,q}$ 是指 $a \in A_0 + A_1$, 并且

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,q}} = \left(\sum_j 2^{-jq\theta} K(2^j, a)^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty.$$

特别地, 当 $q = \infty$ 时,

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,\infty}} = \sup_j 2^{-j\theta} K(2^j, a) = \sup_j \left(2^{-j\theta}\|a_0\|_{A_0} + 2^{(1-\theta)j}\|a_1\|_{A_1}\right).$$

实插值的 J- 泛函方法 $\forall a\in A_0\cap A_1$, 记

$$J(t,a)=\max\left(\|a\|_{A_0},t\|a\|_{A_1}\right).$$

$\forall\theta\in(0,1)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, 定义 $a\in[A_0,A_1]_{\theta,q}$ 如下：如果

$$a=\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_j,\quad \text{其中 } u_j\in A_0\cap A_1$$

在 A_0+A_1 中收敛, 且满足

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{-jq\theta}J(2^j,u_j)^q\Big)^{\frac{1}{q}}<\infty.$$

于是, 可以定义 a 的插值模为

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,q}}=\min_{a=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}u_j}\left[\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{-jq\theta}\|u_j\|_{A_0}^q\Big)^{\frac{1}{q}}+\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}2^{jq(1-\theta)}\|u_j\|_{A_1}^q\Big)^{\frac{1}{q}}\right]<\infty.$$

特别, 当 $q=\infty$ 时, 作适当的修正, 就是

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,\infty}}=\sup_{a=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}u_j}2^{-j\theta}J(2^j,u_j)=\sup_{a=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}}u_j}\left(2^{-j\theta}\|u_j\|_{A_0},2^{j(1-\theta)}\|u_j\|_{A_1}\right).$$

定义 5.1 称 E 是由试验函数构成的一个平移不变 Banach 空间, 如果 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\subset E\subset\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 满足:

(i) 对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}^d$ 及 $f(x)\in E$, 总有 $f(x-x_0)\in E$ 且 $\|f(x-x_0)\|_E=\|f(x)\|_E$.

(ii) 对于任意的 $\lambda>0$, 存在 $C_\lambda>0$, 使得对于任意的 $f(x)\in E$, 总有 $f(\lambda x)\in E$ 且 $\|f(\lambda x)\|_E\leqslant C_\lambda\|f(x)\|_E$.

(iii) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 稠于 E.

定义 5.2 称 X 是由分布构成的一个平移不变 Banach 空间, 如果它是试验函数构成的一个平移不变 Banach 空间 $X^{(*)}$ 的对偶空间. X 中的光滑元素所构成的平移不变空间 $X^{(0)}$ 定义成 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 在 X 中的完备化空间.

注记 5.1 容易看出

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset E\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),\qquad \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset X^{(0)}\subset X\subset\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

及 Young 不等式、Bernstein 不等式等一些分析结果在 E 或 X 上仍然成立.

引理 5.2 设 X 是分布函数构成的一个平移不变 Banach 空间, 并且存在某个 $\alpha\in\mathbb{R}$, $X\subset\dot{B}^{\alpha}_{\infty,\infty}$. 对于 $s+\alpha<0$, 定义

$$\dot{B}^{s,\infty}_X=\Big\{f:f\overset{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}{=\!=\!=}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_jf,\quad \|f\|_{\dot{B}^{s,\infty}_X}\triangleq\sup_j 2^{js}\|\Delta_jf\|_X<\infty\Big\}.\tag{5.2}$$

则对任意 $f(t,x) \in L^\infty((0,\infty);\dot{B}_X^{s,\infty})$, 有

$$\int_0^\infty \Delta e^{\tau\Delta} f(\tau,\cdot)d\tau \in \dot{B}_X^{s,\infty}. \tag{5.3}$$

证明　由 Bernstein 不等式, $(-\Delta)^\nu : \dot{B}_X^{s,\infty} \longmapsto \dot{B}_X^{s-2\nu,\infty}$, 这里 $s+\alpha-2\nu<0$, 并且

$$\|(-\Delta)^{1-\nu} e^{t\Delta} g\|_{\dot{B}_X^{s-2\nu,\infty}} \leqslant C_\nu t^{-(1-\nu)} \|g\|_{\dot{B}_X^{s-2\nu,\infty}}, \quad \nu \leqslant 1. \tag{5.4}$$

因此, 分解积分

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \Delta e^{\tau\Delta} f(\tau,\cdot)d\tau =& -\int_0^A (-\Delta)^{1-\nu} e^{\tau\Delta} (-\Delta)^\nu f(\tau,\cdot)d\tau \\ &-\int_A^\infty (-\Delta)^{1+\nu} e^{\tau\Delta} (-\Delta)^{-\nu} f(\tau,\cdot)d\tau \\ \triangleq& G_A + H_A,\end{aligned} \tag{5.5}$$

这里要求

$$0<\nu<\min\left(1, \frac{-(s+\alpha)}{2}\right) \qquad (\text{条件源于下面两个估计}). \tag{5.6}$$

注意到, 对 $\forall A>0$, 有

$$\|G_A\|_{\dot{B}_X^{s-2\nu,\infty}} \leqslant C_\nu \int_0^A t^{-(1-\nu)} dt \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_X^{s,\infty}} \leqslant C_\nu A^\nu \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_X^{s,\infty}}, \tag{5.7}$$

$$\|H_A\|_{\dot{B}_X^{s+2\nu,\infty}} \leqslant C_\nu \int_A^\infty t^{-(1+\nu)} dt \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_X^{s,\infty}} \leqslant C_\nu A^{-\nu} \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_X^{s,\infty}}. \tag{5.8}$$

由实插值的 K- 泛函理论, 取

$$\theta = \frac{1}{2}, \quad A = 2^{\frac{j}{2\nu}}, \quad A_0 = \dot{B}_X^{s-2\nu,\infty}, \quad A_1 = \dot{B}_X^{s+2\nu,\infty},$$

则 $\|\cdot\|_{[A_0,A_1]_{\theta,\infty}}$ 的估计如下:

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\infty \Delta e^{\tau\Delta} f(\tau,\cdot)d\tau\right\|_{\dot{B}_X^{s,\infty}} \leqslant& \left\|\int_0^\infty \Delta e^{\tau\Delta} f(\tau,\cdot)d\tau\right\|_{[\dot{B}_X^{s-2\nu,\infty},\dot{B}_X^{s+2\nu,\infty}]_{\frac{1}{2},\infty}} \\ \leqslant& \|f\|_{L_t^\infty \dot{B}_X^{s,\infty}}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

□

注记 5.2　在抽象插值估计过程中, 完全遵循小尺度利用积分, 大尺度估计要充分利用光滑性的原则.

引理 5.3 (Besov 空间中的乘积估计)　设 $2 \leqslant p < d$, $q \in \left[p, \dfrac{pd}{d-p}\right)$, 则

$$\|u\cdot v\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-1}} \|v\|_{\dot{B}_{q,\infty}^0}, \tag{5.10}$$

$$\|u\cdot v\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-2}} \leqslant C\|u\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-1}} \|v\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{\frac{d}{p}-1}}. \tag{5.11}$$

证明 按第 1 章的记号, $\Delta_j f = S_{j+1}f - S_j f$, 由 Bony 仿积分解可见

$$
\begin{aligned}
uv =& \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-1}u\Delta_j v + \sum_{j\in\mathbb{Z}} S_{j-1}v\Delta_j u + \sum_{|j-j'|\leqslant 1} \Delta_j u\Delta_{j'}v \\
\triangleq& T_u v + T_v u + R(u,v).
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

注意到

$$
\mathrm{supp}\widehat{S_{j-1}u} \subset \Big\{\xi\Big||\xi| \leqslant \frac{4}{3}2^{j-1}\Big\}, \quad \mathrm{supp}\widehat{\Delta_j v} \subset \Big\{\xi\Big|\frac{3}{4}2^j \leqslant |\xi| \leqslant \frac{4}{3}2^{j+1}\Big\},
$$

$$
\mathrm{supp}\widehat{S_{j-1}u\Delta_j v} \subset \Big\{\xi\Big|\frac{1}{12}2^j \leqslant |\xi| \leqslant \frac{5}{3}2^{j+1}\Big\}.
$$

则利用 Besov 空间的等价定义, 容易看出

$$
\begin{aligned}
\|T_u v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}}_{p,\infty}} \lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\|S_{j-1}u\Delta_j v\|_p \lesssim \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\Big\|\sum_{k\leqslant j-1}\Delta_k u\Delta_j v\Big\|_p \\
\lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\sum_{k\leqslant j-1}\|\Delta_k u\|_r\|\Delta_j v\|_q \\
\lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\sum_{k\leqslant j-1}2^{nk(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|\Delta_k u\|_p\|\Delta_j v\|_q \\
\lesssim& \sup_j \sum_{k\leqslant j-1} 2^{-(1-\frac{1}{r})(j-k)}\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^0_{q,\infty}} \\
\lesssim& \|v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|u\|_{\dot B^0_{q,\infty}} \qquad (\text{用到 } d>p),
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\|T_u v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-2}_{p,\infty}} \lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-2)j}\sum_{k\leqslant j-1}\|\Delta_k u\|_\infty\|\Delta_j v\|_p \\
\lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-2)j}\sum_{k\leqslant j-1}2^{k\frac{d}{p}}\|\Delta_k u\|_p\|\Delta_j v\|_p \\
\lesssim& \sup_j \sum_{k\leqslant j-1} 2^{-(j-k)}\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} \\
\lesssim& \|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}},
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

及

$$
\begin{aligned}
\|T_v u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}}_{p,\infty}} \lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\Big\|\sum_{k\leqslant j-1}\Delta_k v\Delta_j u\Big\|_p \\
\lesssim& \sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\sum_{k\leqslant j-1}\|\Delta_k v\|_\infty\|\Delta_j u\|_p \\
\lesssim& \sup_j \sum_{k\leqslant j-1} 2^{\frac{d}{q}(k-j)}\|v\|_{\dot B^{-\frac{d}{q}}_{\infty,\infty}}\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}
\end{aligned}
$$

$$\lesssim\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^0_{q,\infty}}\quad(\text{用到嵌入定理}).\tag{5.15}$$

与 (5.14) 完全相同, 就有

$$\|T_v u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-2}_{p,\infty}}\lesssim\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\|R(u,v)\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}}_{p,\infty}}&=\sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q})j}\Big\|\Delta_j\Big(\sum_{|k-k'|\leqslant 1}\Delta_k u\Delta_{k'}v\Big)\Big\|_p\\&\lesssim\sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1)j}\Big\|\Delta_j\sum_{|k-k'|\leqslant 1}(\Delta_k u\Delta_{k'}v)\Big\|_{\frac{pq}{p+q}}\\&\lesssim\sup_j 2^{(\frac{d}{p}-1)j}\sum_{j\leqslant k+2}\|\Delta_k u\|_p\|\widetilde{\Delta}_k v\|_q\\&\lesssim\sup_j\sum_{j\leqslant k+2}2^{(\frac{d}{p}-1)(j-k)}\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^0_{q,\infty}}\\&\lesssim\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^0_{q,\infty}}\quad(\text{用到 } p<d),\end{aligned}\tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}\|R(u,v)\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-2}_{p,\infty}}&\lesssim\sup_j 2^{(\frac{d}{p}-2)j}2^{\frac{d}{p}j}\Big\|\Delta_j\sum_{|k-k'|\leqslant 1}(\Delta_k u\Delta_{k'}v)\Big\|_{\frac{p}{2}}\\&\lesssim\sup_j 2^{2(\frac{d}{p}-1)j}\sum_{j\leqslant k+2}\|\Delta_k u\|_p\|\widetilde{\Delta}_k v\|_p\\&\lesssim\sup_j\sum_{j\leqslant k+2}2^{2(\frac{d}{p}-1)(j-k)}\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\\&\lesssim\|u\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|v\|_{\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}.\end{aligned}\tag{5.18}$$

综合 (5.13)~(5.18) 就推出引理成立. □

作为引理 5.2 与引理 5.3 的直接结果, 先来证明 $\dot H^{\frac{d}{2}-1}$ 解的无条件唯一性. 注意到

$$\dot H^{\frac{d}{2}-1}\hookrightarrow\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}\hookrightarrow\dot B^{\frac{d}{q}-1}_{q,\infty},\quad 2\leqslant p<d,\quad d<q<\frac{pd}{d-p},\tag{5.19}$$

由 $u\in C(I;\dot H^{\frac{d}{2}-1})$ 推知

$$\begin{cases}w,w_1,w_2\in L^\infty((0,T^*);\dot B^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}),\\ t^{\frac{d}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}e^{t\Delta}u_0(x)\in L^\infty((0,T^*);L^q).\end{cases}\tag{5.20}$$

根据 w 的表达式 (5.1),

$$w=B(w,w_1)+B(w_2,w)+B(w,e^{\nu t\Delta}u_0)+B(e^{\nu t\Delta}u_0,v).$$

关键点是估计 $B(w,w_1)$, 改写成形如

$$B(w,w_1)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Delta Z ds,\quad Z=\frac{1}{\Delta}\mathcal{P}\cdot\nabla w\otimes w_1. \tag{5.21}$$

这样, 问题就转化成证明

$$\|Z\|_{L^\infty(\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty})}\lesssim\|w\otimes w_1\|_{L^\infty(\dot{B}^{\frac{d}{p}-2}_{p,\infty})}\lesssim\|w\|_{L^\infty(\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty})}\|w_1\|_{L^\infty(\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty})}. \tag{5.22}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\|B(e^{t\Delta}u_0,w)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}&\leqslant\int_0^t(t-s)^{-(1+\frac{d}{q})/2}\|e^{s\Delta}u_0\otimes w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}}_{p,\infty}}ds\\&\leqslant\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{d}{q})}\|w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}s^{(1-\frac{d}{q})/2}\|e^{s\Delta}u_0\|_q\frac{ds}{s^{(1-\frac{d}{q})/2}}.\end{aligned} \tag{5.23}$$

因此

$$\|w(t)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\leqslant C\sup_{0<s<t}\|w(s)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\sup_{0<s<t}A(s), \tag{5.24}$$

这里

$$A(s)=\|w_1(s)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}+\|w_2(s)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}+s^{\frac{d}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}\|e^{s\Delta}u_0\|_q.$$

利用 $\lim\limits_{s\to 0}A(s)=0$ 及唯一性是局部性质, 可以推出 $u\in C(I,\dot{H}^{\frac{d}{2}-1})$ 是唯一解.

定理 5.1 的证明 (Besov 空间方法) 上面的证明不能直接用于 $C(I,L^d(\mathbb{R}^d))$ 的唯一性, 原因在于 $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}\hookrightarrow\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}$, 然而, 我们不知道 $L^d\hookrightarrow\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}$. 因此, 需要利用非齐次部分较自由部分更正则的性质, 即从 $f,g\in C(I;L^d)$, 可以导出 $B(f,g)\in C(I;\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}))$, 即

引理 5.4 $B:L^\infty((0,T^*);L^d)\otimes L^\infty((0,T^*);L^d)\longrightarrow L^\infty((0,T^*);\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty})$, $\forall p\in\left[\frac{d}{2},\infty\right)$ *有界.*

证明

$$B(u,v)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Delta Z(s)ds,\quad Z=\frac{1}{\Delta}\mathcal{P}\cdot\nabla u\otimes v, \tag{5.25}$$

由引理 5.2, 问题就归结为证明

$$Z\in L^\infty([0,T^*);\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}),$$

$$\begin{aligned}\|Z\|_{L^\infty([0,T^*);\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty})}&\leqslant\|u\otimes v\|_{L^\infty([0,T^*);\dot{B}^{\frac{d}{p}-2}_{p,\infty})}\\&\leqslant\|u\otimes v\|_{L^\infty\dot{B}^0_{\frac{d}{2},\infty}}\quad\left(\text{Sobolev 嵌入定理 }p>\frac{d}{2}\right)\\&\leqslant\|u\otimes v\|_{L^\infty L^{\frac{d}{2}}}\leqslant\|u\|_{L^\infty L^d}\|v\|_{L^\infty L^d}.\end{aligned} \tag{5.26}$$

□

下面来证明唯一性. 由表达式 (5.1), 对于 $\max\left(2, \frac{d}{2}\right) < p < d$, $q \in \left(d, \frac{pd}{d-p}\right)$, 直接估计

$$\begin{aligned}\|B(w,w_1)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} \leqslant & \left\|\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Delta\cdot\frac{1}{\Delta}\mathcal{P}\nabla\cdot(w\otimes w_1)ds\right\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} \\ \leqslant & \|w\otimes w_1\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-2}_{p,\infty}} \lesssim \|w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\|w_1\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}},\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\|B(w,e^{t\Delta}u_0)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} \leqslant & \int_0^t (t-s)^{-(1+\frac{d}{q})/2}\|e^{s\Delta}u_0\otimes w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1-\frac{d}{q}}_{p,\infty}}ds \\ \leqslant & C\|w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} \sup_{0\leqslant s\leqslant t} t^{\frac{d}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}\|e^{s\Delta}u_0\|_q.\end{aligned} \tag{5.28}$$

因此

$$\|w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} \leqslant C\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|w\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}A(s),$$

$$A(s) = \|w_1(s)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} + \|w_2(s)\|_{\dot{B}^{\frac{d}{p}-1}_{p,\infty}} + s^{\frac{d}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{q})}\|e^{s\Delta}u_0\|_q. \tag{5.29}$$

由于 $\lim\limits_{s\to 0}A(s)=0$ 及唯一性是局部性质, 可以推出 $u(t)\in C(I,L^d)$ 是唯一解. □

A.5.2 Lorentz 空间方法

利用 Lorentz 空间框架研究无条件唯一性始于 Meyer, 主要基于如下引理:

引理 5.5 设 $p\in(1,d)$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{d}$, 则

$$\left\|\int_0^\infty \sqrt{-\Delta}e^{\tau\Delta}f(\tau,\cdot)d\tau\right\|_{L^{q,\infty}} \leqslant C\|f\|_{L^\infty([0,\infty);L^{p,\infty})}. \tag{5.30}$$

证明 由 Sobolev 不等式

$$\|(-\Delta)^{-\beta}f\|_{L^{r,\infty}} \lesssim \|f\|_{L^{p,\infty}}, \quad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}-\frac{2\beta}{d}, \quad 0<\beta<\frac{d}{2p}, \tag{5.31}$$

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}-\beta}e^{t\Delta}f\|_{L^{r,\infty}} \leqslant C_\nu t^{-(\frac{1}{2}-\beta)}\|f\|_{L^{r,\infty}}. \tag{5.32}$$

将 $F=\int_0^\infty\sqrt{-\Delta}e^{\tau\Delta}f(\tau,\cdot)d\tau$ 分解成 G_A+H_A, 其中

$$\begin{aligned}G_A &= \int_0^A (-\Delta)^{1-\beta}e^{\tau\Delta}(-\Delta)^{\beta-\frac{1}{2}}f(\tau,\cdot)d\tau, \\ H_A &= \int_A^\infty (-\Delta)^{1+\beta}e^{\tau\Delta}(-\Delta)^{-\beta-\frac{1}{2}}f(\tau,\cdot)d\tau, \\ & 0<\beta<\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{d}\right)<1.\end{aligned}$$

注意到

$$\|G_A\|_{L^{\frac{qd}{d+2\beta q},\infty}} \lesssim \int_0^A t^{-(1-\beta)}\|(-\Delta)^{\beta-\frac{1}{2}}f\|_{L^{\frac{qd}{d+2\beta q},\infty}}d\tau \lesssim C_\beta A^\beta\|f\|_{L_t^\infty L^{p,\infty}}, \tag{5.33}$$

$$\|H_A\|_{L^{\frac{qd}{d-2\beta q},\infty}} \lesssim \int_A^\infty t^{-(1+\beta)}\|(-\Delta)^{-\beta-\frac{1}{2}}f\|_{L^{\frac{nq}{d-2\beta q},\infty}}d\tau \lesssim C_\beta A^{-\beta}\|f\|_{L_t^\infty L^{p,\infty}}. \tag{5.34}$$

由实插值方法可见

$$\|F\|_{L^{q,\infty}} \leqslant \|f\|_{[L^{\frac{qd}{d+2\beta q},\infty},L^{\frac{qd}{d-2\beta q},\infty}]_{\frac{1}{2},\infty}} \lesssim \|f\|_{L_t^\infty L^{p,\infty}}. \tag{5.35}$$

由表达式 (5.1), 直接估计 $\left(p=\dfrac{d}{2},q=d\right)$

$$\|B(w,w_1)\|_{L^{d,\infty}} \leqslant \|w\otimes w_1\|_{L^{\frac{d}{2}},\infty} \lesssim \|w\|_{L^{d,\infty}}\|w\|_{L^{d,\infty}}. \tag{5.36}$$

另一方面, 注意到

$$\|(-\Delta)^{-\frac{d}{2q}}(fg)\|_{L^{d,\infty}} \leqslant \|f\|_{L^{d,\infty}}\|g\|_{L^{q,\infty}} \quad \left(\frac{1}{\nu}=\frac{1}{d}+\frac{1}{q},\ \frac{1}{d}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{q}\right), \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\|B(w_1,e^{t\Delta}u_0)\|_{L^{n,\infty}} &\leqslant \int_o^t (t-s)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{d}+\frac{1}{q})}\|w\|_{L^{n,\infty}}\|e^{s\Delta}u_0\|_q d\tau\\ &\leqslant \|w\|_{L^{d,\infty}}\sup_s(s^{\frac{d}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{q})}\|e^{s\Delta}u_0\|_q)\cdot\int_o^t(t-s)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{q})}s^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{q})}d\tau\\ &\lesssim \|w\|_{L^{d,\infty}}\sup_s(s^{\frac{d}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{q})}\|e^{s\Delta}u_0\|_q).\end{aligned} \tag{5.38}$$

因此

$$\|w\|_{L^{d,\infty}} \leqslant \sup_{0<s<t}\|w(s)\|_{L^{d,\infty}}\sup_{0<s<t}A(s), \tag{5.39}$$

其中

$$A(s)=\|w_1(s)\|_{L^{d,\infty}}+\|w_2(s)\|_{L^{d,\infty}}+s^{\frac{d}{2}(\frac{1}{d}-\frac{1}{q})}\|e^{s\Delta}u_0\|_q. \tag{5.40}$$

由 $\lim\limits_{s\to0}A(s)=0$ 及唯一性是局部性质, 可以推出 $u(t)\in C(I,L^d)$ 是唯一解. □

A.5.3 极大正则性方法

Monniaux 采用抛物方程的光滑效应研究无条件唯一性. 本质上等价于抛物奇异积分算子的时空 Lebegue 空间的有界性.

引理 5.6 算子

$$Af(t,x)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Delta f(s,\cdot)ds \tag{5.41}$$

是 $L^q([0,T);L^r(\mathbb{R}^d))\longrightarrow L^q([0,T);L^r(\mathbb{R}^d))$ 上的有界线性算子, 这里 $1<q,r<\infty$, $T\in(0,\infty]$, 即

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \Delta f(s,\cdot) ds \right\|_{L^q(I;L^r(\mathbb{R}^d))} \leqslant \|f\|_{L^q(I;L^r(\mathbb{R}^d))}, \quad I=[0,T). \tag{5.42}$$

证明 仅需对于 $T=\infty$ 来证明, 否则, 对于函数

$$\tilde{f}(t,x) = f(t,x)\chi_{[0,T]}(t), \quad \forall t \in [0,\infty)$$

来进行证明即可. 同理, 定义

$$\begin{cases} Af(t,x) = 0, \\ f(t,x) = 0, \end{cases} \qquad t<0.$$

这样, Af 与 f 的定义域均扩充到整个 $t \in \mathbb{R}$.

第一步. $L_t^2 L_x^2$ 型估计. 注意到 Guass 函数

$$G(t,x) = W_{\sqrt{t}}(x) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad W(x) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}.$$

令

$$\Omega(t,x) = \begin{cases} t^{-\frac{d}{2}}(\Delta W)\left(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\right), & t>0, \\ 0, & t<0. \end{cases} \tag{5.43}$$

于是, 算子在物理空间可表示成如下的卷积型算子:

$$Af(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{t-s} \Omega(t-s, x-y) f(s,y) ds dy. \tag{5.44}$$

利用 Fourier 变换, 就有

$$\mathcal{F}_t \mathcal{F}_x \left(\frac{1}{t} \Omega(t,x) \right) = \mathcal{F}_t \left(\frac{1}{t} |\sqrt{t}\xi|^2 e^{t|\xi|^2} \right) = \mathcal{F}_t \left(|\xi|^2 e^{t|\xi|^2} \right) = -\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2 + i\tau}. \tag{5.45}$$

注意到

$$\left| \frac{|\xi|^2}{|\xi|^2 + i\tau} \right| \leqslant 1,$$

故 A 是 $L_t^2 L_x^2$ 到 $L_t^2 L_x^2$ 的有界线性算子.

第二步. $L_t^p L_x^p$ 型估计 $(1<p<\infty)$. 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ 上引入抛物度量

$$d\big((t,x),(s,y)\big) = \left(|x-y|^4 + |t-s|^2 \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \big|B_r(t,x)\big| = Cr^{d+2}. \tag{5.46}$$

定义核函数如下:

$$L\big((t,x),(s,y)\big) = I_{(0,\infty)}(t-s) \cdot (t-s)^{-\frac{d+2}{2}} (\Delta W)\Big(\frac{x-y}{\sqrt{t-s}} \Big). \tag{5.47}$$

显然, 核函数 $L\big((t,x),(s,y)\big)$ 满足如下估计:

$$\begin{cases} \big|L\big((t,x),(s,y)\big)\big| \leqslant \dfrac{\|\Delta W(z)\|_\infty}{|t-s|^{\frac{d+2}{2}}}, & |x-y| \leqslant \sqrt{t-s}, \\ \big|L\big((t,x),(s,y)\big)\big| \leqslant \dfrac{\|z^{d+2}\Delta W(z)\|_\infty}{|x-y|^{d+2}}, & |x-y| \geqslant \sqrt{t-s}, \end{cases}$$

这里 $z=|x-y|/\sqrt{t-s}$. 利用

$$\|\Delta W(z)\|_\infty < \infty, \qquad \|z^{d+2}\Delta W(z)\|_\infty < \infty$$

就可以看出

$$\big|L\big((t,x),(s,y)\big)\big| \leqslant \frac{C}{d\big((t,x),(s,y)\big)^{d+2}}. \tag{5.48}$$

同理可见

$$\left|\frac{\partial L\big((t,x),(s,y)\big)}{\partial t}\right| \leqslant \frac{C}{d\big((t,x),(s,y)\big)^{d+4}}, \tag{5.49}$$

$$\left|\frac{\partial L\big((t,x),(s,y)\big)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{C}{d\big((t,x),(s,y)\big)^{d+3}}. \tag{5.50}$$

由中值定理与插项技术可见

$$\begin{aligned} &\big|L\big((t,x),(s,y)\big) - L\big((t+\tau,x+h),(s,y)\big)\big| \\ \leqslant\; & C\left(\frac{|\tau|}{d\big((t,x),(s,y)\big)^{d+4}} + \frac{|h|}{d\big((t,x),(s,y)\big)^{d+3}}\right). \end{aligned} \tag{5.51}$$

当 $|(\tau,h)| \ll d((t,x),(s,y))$ 时, 注意到抛物距离的定义, 容易看出

$$\big|L\big((t,x),(s,y)\big) - L\big((t+\tau,x+h),(s,y)\big)\big| \leqslant \frac{Cd\big((t,x),(t+\tau,x+h)\big)}{d\big((t,x),(s,y)\big)^{d+3}}. \tag{5.52}$$

同理, 核函数 L 关于 (s,y) 也有相同的正则性. 上面的估计意味着算子 A 是拟度量空间 $(\mathbb{R}^{1+d},d)$ 上的 Calderon-Zygmund 奇异积分算子, 因此 A 是 $L^p_t(\mathbb{R};L^p_x(\mathbb{R}^d)) = L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ 上的有界线性算子.

第三步. $L^p_tL^q_x$ 型估计 $(1<p,q<\infty)$. 问题可以归结为证明算子 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 Calderon-Zygmund 奇异积分算子. 事实上, 注意到 $\Delta e^{(t-s)\Delta}$ 对应的核函数 $L(t,x)$ 满足

$$\|L\|_{(L^q_x,L^q_x)} \leqslant \frac{C}{|t-s|}, \tag{5.53}$$

$$\left\|\frac{\partial L}{\partial t}\right\|_{(L^q_x,L^q_x)} = \left\|\frac{\partial L}{\partial s}\right\|_{(L^q_x,L^q_x)} = \big\|\Delta^2 e^{(t-s)\Delta}\big\|_{(L^q_x,L^q_x)} \leqslant \frac{C}{|t-s|^2}. \tag{5.54}$$

从而推出 A 是 $L_t^p(\mathbb{R};L_x^q(\mathbb{R}^d))$ 上的有界线性算子. 定义核函数如下: □

选取 $p\in(2,\infty)$, 根据 w 的表达式 (5.1),

$$w=B(w,w_1)+B(w_2,w)+B(w,e^{\nu t\Delta}u_0)+B(e^{\nu t\Delta}u_0,w).$$

对 $\forall T<T^*$, 有 $T<\infty$, 且

$$\begin{cases} w_1,\ w_2\in L^\infty((0,T);L^d),\\ w\in L^p([0,T);L^d(\mathbb{R}^d)),\\ t^{\frac12}e^{t\Delta}u_0\in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d),\end{cases}$$

$$B(w,w_1)=\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\Delta Z(s)ds,\quad Z(s)=\frac{1}{\Delta}\mathcal{P}\nabla\cdot(w\otimes w_1). \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}\|Z\|_{L_t^p([0,T);L^d)}\leqslant&\|w\otimes w_1\|_{L_t^p([0,T);L^{\frac d2})}\qquad (\dot H^{1,\frac d2}\hookrightarrow L^d)\\ \leqslant&\|w\|_{L^p([0,T);L^d)}\|w_1\|_{L^\infty([0,T);L^d)}.\end{aligned}\tag{5.56}$$

另一方面, 注意到

$$\|w(t)\|_{L^p([0,T);L^d(\mathbb{R}^d))}<\infty,\quad \|t^{-\frac12}\|_{L^{2,\infty}(0,T)}<\infty,\quad T<\infty. \tag{5.57}$$

则

$$\begin{aligned}\|B(e^{t\Delta}u_0,w)\|_{L_t^pL_x^d}\leqslant&\left\|\int_0^t(t-s)^{-\frac12}\|w\|_{L_x^d}\left(\sqrt{s}\|e^{s\Delta}u_0\|_\infty\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right\|_{L_t^p}\\ \overset{\text{卷积型估计}}{\leqslant}&\left\|\|w\|_{L_x^d}(\sqrt{s}\|e^{s\Delta}u_0\|_\infty)\frac{1}{\sqrt{s}}\right\|_{L_t^{\frac{2p}{p+2},p}}\cdot\|t^{-\frac12}\|_{L_t^{2,\infty}}\\ &\left(\frac1p+1=\frac{p+2}{2p}+\frac12,\frac1p=\frac1p+\frac1\infty\right)\\ \overset{\text{点态型估计}}{\leqslant}&\|w\|_{L_t^pL_x^d}\sup_s\sqrt{s}\|e^{s\Delta}u_0\|_\infty\|\sqrt{s}^{-1}\|_{L^{2,\infty}}\\ &\left(\frac{p+2}{2p}=\frac1p+\frac12,\frac1p=\frac1p+\frac1\infty\right).\end{aligned}\tag{5.58}$$

因此, $\forall T\in(0,T^*)$, 有估计

$$\|w(t)\|_{L_t^pL_x^d([0,T)\times\mathbb{R})}\leqslant C\|w\|_{L_t^pL_x^d}\sup_{0<s<t}A(s), \tag{5.59}$$

这里

$$A(s)=\|w_1\|_{L^d}+\|w_2\|_{L^d}+\sqrt{s}\|e^{s\Delta}u_0\|_\infty. \tag{5.60}$$

由于 $\lim\limits_{s\to0}A(s)=0$ 及唯一性是局部性质, 就得 $u(t)\in C(I;L^d)$ 的唯一性.

注记 5.3 不可压 N-S 方程的数学理论是初步的, 距离解决 Leray-Hopf 弱解的正则性与唯一性这一目标还有相当长的路要走, 甚至需要开发新的数学工具. 除此而外, 还有一些有难度的公开问题, 例如, $u(t,x) \in L^\infty(I;L^3(\mathbb{R}^3))$ 或 $u(t,x) \in L^\infty(I;\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^3))$ 的无条件唯一性等.

参 考 文 献

[AH] Abidi H, Hmidi T. On the global wellposedness of the critical quasi-geostrophic equation. SIAM J. Math. Anal., 2008, 40: 167–185.

[AHK] Abidi H, Hmidi T, Keraani S. On the global well-posedness for the axisymmetric Euler equations. Math. Ann., 2010, 347(1): 15–41.

[A] Adams R A. Sobolev Spaces. Academic Press, 1975.

[AG] Alinhac S, Gérard P. Introduction à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels at theéorme de Nash-Moser. Savoirs actuels, Interéditions, 1991.

[BG] Bahouri H, Gérard P. Concentration effects in critical semilinear wave equation and scattering theory. Geometrical Optics and Related Topics (Colombini F and Lerner N, eds). Progress of Nonlinear Differential Equations and Applications. Birkhaüser, 1997, 32: 17–30.

[BKM] Beale J T, Kato T and Majda A J. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. Comm. Math. Phys., 1984, 94: 61–66.

[BD] Ben Ameur J, Danchin R. Limite non visqueuse pour les fluides incompressibles axisymétrique. Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, XIV (Paris), 1997/1998: 29∼55. Stud. Math. Appl., 31. North Holland, Amsterdam, 2002.

[BL] Bergh J, Löfström J. Interpolation Spaces. Springer-Verlag, 1976.

[BP] Bourgain J, Pavlović N. Ill-posedness of the Naiver-Stokes equations in a critical space in 3D. J. Funct. Anal., 2008, 255: 2233–2247.

[Bony] Bony J-M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Sci. École Norm. Sup., 1981, 14: 209–246.

[CKN] Caffarelli L, Kohn R and Nirenberg L. Partial regularity of suitable weak solutions of Navier–Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math., 1982, 35: 771–831.

[C-Va] Caffarelli L and Vasseur V. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equations. Annals of Math., 2010, 171: 1903–1930.

[CKS] Caflisch R E, Klapper I and Steele G. *Remarks on singularities, dimension and energy dissipation for ideal hydrodynamics and MHD.* Comm. Math. Phys., 1997, 184: 443–455.

[Ca] Calderón A P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 1977, 74: 1324–1327.

[C1] Calderón C P. Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with the data in L^p. Trans. Amer. Soc., 1990, 318: 179–297. Addendum to the paper

"Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with the data in L^p", 201–207.

[C2] Calderón C P. Initial value of solutions of the Navier-Stokes equations. Proc. Amer. Math. Soc., 1993, 117: 761–766.

[C2] Calderón A P. Intermediate spaces and interpolation: the complex method. Studia Math., 1964, 24: 113–190.

[Ca1] Cannone M. Harmonic Analysis Tools for sloving the incompressible Navier-Stokes Equations. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics III, Edited by Friedlander S J, Serre D. Elsevier, 2004.

[Ca2] Cannone M. A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations. Rev.Mat. Iberoramericana, 1997, 13: 515–541.

[Ca3] Cannone M. Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes. Diderot Editeur, 1995.

[CCM] Cannone M, Chen Q and Miao C. A losing estimate for the Ideal MHD equations with application to Blow-up criterion. SIAM Math.Anal., 2007, 38: 1847–1859.

[CM] Cannone M and Meyer Y. Littlewood-Paley decomposition and Navier–Stokes equations. Math. and Appl. of Anal., 1995, 2: 307–319.

[CMW] Cannone M, Miao C, Wu G. On the inviscid limit of the two-dimensional Navier-Stokes equations with fractional diffusion. Adv.Math. Sci. and Appl., 2008, 18: 607–624.

[CMP] Meyer Y, Planchon F. Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes. Séminaire "Équations aux Dérivées Partielles" de l'École polytechnique. Exposé VIII, 1993–1994.

[Chae] Chae D. Global regularity for the 2-D Boussinesq equations with partial viscous terms. Advances in Math, 2006, 203: 497–513.

[Chem1] Chemin J-Y. Régularité de la trajectoire des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace. J. Math. Pures Appl., 1992, 71: 407–417.

[Chem2] Chemin J-Y. Perfect incompressibe fluids. New York: Oxford University Press, 1998.

[Chem3] Chemin J-Y. Localization in fourier space and Navier-Stokes system. Phase space analysis of partial differential equations, Vol. I. CRM series, Pisa; Centro, Edizioni, Scunla Normale superiore, 2004: 53–135.

[Chem4] Chemin J-Y. Théorémes d'unicité powr le systéme de Havier-Stokes tridimensionnel. Journal d'Analyse Mathématique, 1999, 77: 27–50.

[Ch-G] Chemin J-Y, Gallagher I. On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data. Ann. de l'Ecole Norm. Sup., 2006, 39: 679–698.

[Ch-GP] Chemin J-Y, Gallagher I, Paicu M. Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations. Annals of Math., 2011, 173: 983-1012.

[Chem-L] Chemin J-Y, Lerner N. Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et êquations de Navier-Stokes. J. Differential Equations, 1995, 121: 314–328.

[C-Mi] Chen Q and Miao C. Existence theorem and blow-up criterion of smooth solutions to the two-fluid MHD equations in R^3. J. Differntial Equations, 2007, 239: 251–271.

[CMZ1] Chen Q, Miao C and Zhang Z. A new Bernstein's Inequality and the 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation. Comm. Math. Phys., 2007, 271: 821–838.

[CMZ2] Chen Q, Miao C and Zhang Z. The Beale-Kato-Majda criterion to the 3D Magneto-hydrodynamics equations. Comm. Math. Phys., 2007, 275: 861–872.

[CMZ3] Chen Q., Miao C. and Zhang Z. Well-posedness for viscous shallow water equations in critical spaces. SIAM. J. Math. Anal., 2008, 40: 443–474.

[CMZ4] Chen Q, Miao C and Zhang Z. On the regularity criterion of weak solution for the 3D viscous Magneto– hydrodynamics equations. Comm. Math. Phys., 2008, 284: 919–930.

[CMZ5] Chen Q, Miao C and Zhang Z. On the uniqueness of weak solutions for the 3D Navier-Stokes equations. Ann. Inst. Henri Poincaré-Nonlinear Analysis, 2009, 26: 2165–2180.

[CMZ6] Chen Q, Miao C and Zhang Z. On the well-posedness of the Ideal MHD equations in the Triebel-Lizorkin spaces. Arch. Rational Mech. Anal., 2010, 195: 561–578.

[CMZ7] Chen Q, Miao C and Zhang Z. Global well-posedness for the compressible Navier-Stokes equations with the highly oscillating initial velocity. Comm. Pure Appl. Math., 2010, LXIII: 1173-1224.

[CMZ8] Chen Q, Miao C and Zhang Z. Well-posedness in critical spaces for the compressible Navier-Stokes equations with density dependent viscosities. Revista Matematica Iberoamericana, 2010, 26: 915-946.

[CMZ9] Chen Q, Miao C and Zhang Z. Global well-posedness for the 3D rotating Navier-Stokes equations with highly oscillating initial data. Preprint.

[CK] Christ M and Kiselev A. Maximal function associated to filtrations. J. Funct. Anal., 2001, 179: 409–425.

[CMM] Coifman R R, McIntosh A and Meyer Y. L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L^2 pour les courbes Lipschitiennes. Annals of Math., 1982, 116: 361–387.

[Con-MT] Constantin P, Majda A J, Tabak E. Formation of strong fronts in the 2-D quasi-geostrophic thermal active scalar. Nonlinearity, 1994, 7: 1495–1533.

[Con-Wu] Constantin P, Wu J. Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations. SIAM J. Math. Anal., 1999, 30: 937–948.

[Con-CW] Constantin P, Cordoba D, Wu J. On the critical dissipative quasi-geostrophic equation. Indiana Univ. Math. J., 2001, 50: 97–107.

[Cord] Córdoba D. Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation. Ann. of Math., 1998, 148: 1135–1152.

[Cor-F] Córdoba D, Fefferman C. Growth of solutions for QG and 2D Euler equations. J. Amer. Math. Soc., 2002, 15: 665–670.

[Cor-AD] Córdoba A, Córdoba D. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. Commum. Math. Phys., 2004, 249: 511–528.

[DK] Dahlberg B J and Kenig C E. Lecture on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. ISSN0347–2809, 1985–1996.

[Dan1] Danchin R. Poches de tourbillon visqueuses. J. Math. Pures Appl., 1997, 76: 609–647.

[Dan2] Danchin R. Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. Invent. Math., 2000, 141: 579–614.

[Dan3] Danchin R. Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases. Comm. Part. Diff. Equa., 2001, 26: 1183–1233.

[Dan4] Danchin R. Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 2003, 133: 1311–1334.

[Dan5] Danchin R.Estimates in Besov spaces for transport and transport-diffusion equations with almost Lipschitz coefficients. Rev. Mat. Iberoamericana, 2005, 21: 861–886.

[Dan6] Danchin R. On the uniqueness in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations.Nonlinear Diff. Equa. Appl., 2005, 12: 111–128.

[Dan7] Danchin R. Well-posedness in critical spaces for barotropic viscous fluids with truly not constant density. Comm. Part. Diff. Equa., 2007, 32: 1–17.

[Dan8] Danchin R. Uniform estimates for transport-diffusion equations. J. Hyper. Diff. Equa., 2007, 6: 1373–1397.

[Dan-P1] Danchin D and Paicu M. Global well-posedness issues for the inviscid Boussinesq system with Youdovich's type data. aeXiv, math.AP/0806.4081.

[Dan-P2] Danchin D and Paicu M. Le théorème de Leray et le théorèmede Fujita-Kato pour le système de Boussinesq partiellement visqueux. Bull. Soc. Math. France, 2008, 136: 261–309.

[ES] Escauriaza L, Seregin G and Šverák V. $L_{3,\infty}$-solutions to the Navier-Stokes equations and backward uniqueness. Russian. Mathematical Surveys, 2003, 58: 211–250.

[FJR] Fabes E B, Jones B F and Riviere N M. Initial value problem for Navier-Stokes equations with data in L^p. Arch. Rat. Mech. Anal., 1972, 45: 222–240.

[FJoR] Fabes E B, Jodeit M and Riviere N M. Potential techniques to boundary value problem on C^1 domain. Acta. Math., 1978, 141: 165–186.

[FS1] Fefferman C and Stein E M. Some Maximal inequalities. Amer. J. Math., 1971, 93: 107–115.

[FS2] Fefferman C and Stein E M. H^p spaces of several variables. Acta. Math., 1972, 129: 137–193.

[Fo] Folland G B. Introduction to the Partial Differential Equations. Second edition. Princeton University Press, 1993.

[FJW] Frazier M, Jawerth B and Weiss G. Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces. Monograph in the CBM-AMS 79, 1991.

[Fr] Friedman A. Partial Differential Equations. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[FK1] Fujita H and Kato T. On the Navier-Stokes initial value problem. I. Arch. Rat. Mech. Anal., 1964, 16: 269–315.

[FM] Fujiwara D and Morimoto H. An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 1977, 24: 685–700.

[GS] Gelfand I M and Shiov G E, Generalized Function I–IV. Academic Press, 1964, 1968.

[Gi] Giga Y. Solutions for Semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes System. J. Diff. Equ., 1986, 61: 186–212.

[GM] Giga Y and Miyakawa T. Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem. Arch. Rat. Mech. Anal., 1985, 89: 267–281.

[GiT] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order. Classic in Mathematics. Springer, 2001.

[Hmidi] Hmidi T. On a maximum principle and its application to logarithmically critical Boussinesq system. accepted by Analysis & PDE.

[Hmidi1] Hmidi T. Régularité höldérienne des poches de tourbillon visqueuses. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2005, 84(11): 1455–1495.

[HK1] Hmidi T and Keraani S. Global solutions of the supercritical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Adv. Math., 2007, 214: 618–638.

[HK2] Hmidi T and Keraani S. On the global well-posedness of the two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity. Adv.Differential Equations, 2007, 12: 461–480.

[HK3] Hmidi T, Keraani S. Incompressible viscous flows in borderline Besov space. Arch. Rational Mech. Anal., 2008, 189: 283–300.

[HK4] Hmidi T, Keraani S. Invisid limit for the two-dimensional N-S system in a critical Besov space. Asymptot. Anal., 2007, 53(3): 125–138.

[HKR1] Hmidi T and Keraani S and Rousset F. Global well-posedness for Euler-Boussinesq system with critical dissipation. Comm. PDE., 2010, 36: 420–445.

[HKR2] Hmidi T and Keraani S and Rousset F. Global well-posedness for a Boussinesq-Navier-Stokes system with critical dissipation. I. Diff. Equat., 2010, 249: 2147–2174.

[HR1] Hmidi T and Rousset F. Global well-posedness for the Navier-Stokes-Boussinesq system with axisymmetric data. preprint. Ann. I'Inst. Henri Poincare Nonlinear Analysis, 2010, 27: 1227–1246.

[H-Zum] Hoff D, Zumbrun K. Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow. Indiana Univ. Math. Jour., 1995, 44: 603–676.

[H1] Hörmander H. Estimates for translation invariant operator in L^p space. Acta. Math., 1960, 104: 93–139.

[H2] Hörmander H. The Analysis of Linear Partial Diffential Operators, I~IV. Springer-Verlag, 1983–1985.

[FLRT] Furioli G, Lemarié-Rieusset P G, Terraneo E. Unicité dans $L^3(R^3)$et d'autres espaces limites pour Navier-Stokes. Revista Mat. Iberoamer., 2000, 16: 605–667.

[HouLi] Hou T Y and C Li C. Global Well-Posedness of the Viscous Boussinesq Equations. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A, 2005, 12: 1–12.

[Ju1] Ju N. Existence and uniqueness of the solution to the dissipative 2D quasi-geostrophic equations in the Sobolev space. Commun. Math. Phys., 2004, 251: 365-376.

[Ju2] Ju N. The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasi-geostrophic equations. Commum. Math. Phys., 2005, 255: 161-181.

[Kato1] Kato T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$. J. Functional Analysis, 1972, 9: 296–305.

[Kato2] Kato T. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$. with applications to weak solutions. Math. Z., 1984, 187: 471–480.

[KP] Kato T and Ponce G. The Navier–Stokes equation with weak initial data. IMRN, 1994, 10: 435–444.

[KP1] Kato T, Ponce G. Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equatiions. Comm. in PDE., 1988, 41: 891–907.

[K] Kenig C E. Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems. CBMS of Amer.Math. Soc., 1994: 83.

[KNV] Kiselev A, Nazarov F and Volberg A. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. Invent. Math., 2007, 167: 445–453.

[KT] Koch H and Tataru D. Well-posedness for the Navier-Stokes equations. Advances in Math., 2001, 157: 27–35.

[KJF] Kufner A, John O, Fućik S. Functional Spaces. Academia Press, 1977.

[KoTa] Kozono H and Taniuchi Y. Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations. Math. Z., 2000, 235: 173–194.

[KOT] Kozono H, Ogawa T and Taniuchi Y. The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations. Math. Z., 2002, 242: 251–278.

[La] Ladyzhenskaya O A. On the theory of mathematical in the incompressible fiuld. New York: Gordon and Breach, 2nd Ed., 1969.

[Ler] Leray J, Sur le. mouvement d'un liquids visqeux emplissant l'espace. Acta Math., 1934, 63: 193–248.

[Lem1] Lemarié-Rieusset P G. Recent developments in the Naviev-Stokes problem. Chapman and Hall/CRC Prcss Boca Raton, FL, 2002.

[Lem2] Lemarié-Rieusset P G. Uniqueness for the Navier-Stokes problem: remarks on a theorem of Jean-Yves Chemin. Nonlinearity, 2007, 20: 1475–1490.

[L] Lions J L. Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non-linéaires. Dunod, Paris, 1969.

[Lion] Lions P-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Compressible models, Vol.2. Oxford University Press, 1998.

[LP] Lions J L, Peetre J. Sur une dasse d'interpolation. I. H. E. S., Publ. Math., 1964, 19: 5–68.

[Maj] Majda A J. It Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables. Applied Mathematical Sciences, 53. New York: Springer-Verlag, 1984.

[Ma-B] Majda A J and Bertozzi A L. Vorticity and incompressible flow. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[Me] Meyer Y. Remarques sur un thèorém de. Bony J B. Suppl. Rendi. Conti. Circ. Math. Palermo., 1981, 1: 1–20.

[Mi1] Miao C. The time-space estimates and nonlinear Parabolic equations. Tokyo Journal of Mathematics, 2001, 22: 245–276.

[Mi2] Miao C. The Cauchy problem of semilinear parabolic equations with weak data in homogenous space and application to the navier-stokes equations. Science in China, 2003, 46: 641–661.

[Mi3] Miao C. Harmonic analysis and applications to partial differential equations. Monographs on Modern Pure Mathematics, 89. Beijing: Science Press, 2004.

[Mi4] Miao C. Modern methods to nonlinear wave equations. Monographs on Modern Pure Mathematics, 133. Beijing: Science Press, 2005.

[MS] Mazyav V, Shaposhnikova T. On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional Sobolev spaces. J. M. P. A., 2002, 195(2): 230–238.

[MiZ] Miao C and Zhang B. Harmonic analysis method of partial differential equations. Monographs on Modern Pure Mathematics, 117. Beijing: Science Press, 2008.

[MW] Miao C and Wu G. Global well-posedness of the critical Burgers equation in critical Besov spaces. J. Differential Equations, 2008, 247: 1673–1693.

[MXZ1] Miao C, Xu G and Zhao L. Global well-posedness and scattering for the energy-critical, defocusing Hartree equation for radial data. Journal of Functional Analysis, 2007, 253: 605–627.

[MXZ2] Miao C, Xu G and Zhao L. Global well-posedness and scattering for the mass-critical Hartree equation with radial data. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2009, 91: 49–79.

[MXZ3] Miao C, Xu G and Zhao L. Global well-posedness and scattering for the defocusing $H^{\frac{1}{2}}$- subcritical Hartree equation in R^d. Ann. Inst. Henri Poincaré-Nonlinear Analysis, 2009, 26: 1831–1852.

[MX1] Miao C and Xue L. Global wellposedness for a modified critical dissipative Quasi-Geostrophic equation. Preprint. http: //arxiv.org/abs/0901.1368.

[MX2] Miao C and Xue L. On the global well-posedness of a class of Boussinesq-Navier-Stokes systems. Preprint. http: //arxiv.org/abs/0910.0311.

[MY1] Miao C and Yuan B. Solutions for some nonlinear parabolic equations in pseudomeasure spaces. Math. Nach., 2007, 180: 171–186.

[MY2] Miao C and Yuan B. On well-posedness of the Cauchy problem for MHD system in Besov spaces. Math. Meth. Appl. Sci., 2009, 32: 53–76.

[MYZ] Miao C, Yuan B and Zhang B. Well-posedness of the Cauchy problem for the fractional power dissipative equations. Nonlinear Analysis TMA, 2007, 68: 416–484.

[MZ] Miao C and Zhang B. The Cauchy problem for the semilinear parabolic equations in Besov spaces. Houston J. Math., 2004, 30: 829–878.

[Mat-N] Matsumura A, Nishida T. The initial value problem for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1979, 55: 337–342.

[Nash] Nash J. Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général. Bulletin de la Soc. Math. de France, 1962, 90: 487–497.

[Pa] Pazy A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, 1983.

[Ped] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. New York: Springer-Verlag, 1987.

[Plan] Planchon F. An extension of the Beale-Kato-Majda criterion for the Euler equations. Comm. Math. Phys., 2003, 232: 319–326.

[PRST] Ponce G, Racke R, Sideris T G, Titi E S. Global stability of Large solutions to the 3D Navier-Stokes equations. Communications in Mathematical Physics.

1994, 159: 329–341.

[Pro] Prodi G. Un teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes. Ann. Mat. Pura Appl., 1959, 48: 173–182.

[RS] Reed M, Simon B. Methods of Mathematical Physics, I–IV. Academic Press, 1972–1979.

[RuS] Runst T, Sickel W. Sobelov Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear PDEs. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1996.

[Ser] Serrin J. The initial value problem for the Navier-stokes equations // langer R. E. (ed.) Nonlinear Problems, 1963: 69–98.

[Sh-Y] Shirota T and Yanagisawa T. Note on global existence for axially symmetric solutions of the Euler system. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1994, 70: 299–304.

[So] Sogge C D. Fourier integral in classical analysis. Cambridge Univ. Press, 1993.

[Ste1] Stein E M. Singular integal and differential property of functions. Princeton University Press, 1970.

[Ste2] Stein E M. Harmonic analysis, real-variable methods, orthogonality and oscillatroy Integrals. Princeton University Press, 1993.

[SW] Stein E M, Weiss G. Introduction to fourier analysis in Euclidean epaces. Princeton University Press, 1970.

[St1] Strichartz R. Multipliers in fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech., 1967, 16: 1031–1060.

[St2] Strichartz R. Convolutions with kernel having singularities. Trans. Amer. Math. Soc., 1970, 148: 461–471.

[St3] Strichartz R. A priori estimates for the wave equations and some applications. J. Funct. Anal., 1970, 5: 218–235.

[St4] Strichartz R. Restrictions of Fourier transforms to quadratic surface and decay of solutions of wave equations. Duke Math. J., 1977, 44: 705–714.

[Tai1] Taira K. Diffussion process and partial differential equations. San Diego, New York, London, Tokyo: Academic Press, 1985.

[Tai2] Taira K. Analytic semigroup and semilinear initial-boundary value problem. London Math. Soc. Lect. Note Series, 223. Cambridge University Press.

[Tao] Tao T. Nonlinear dispersive equations, local and global analysis. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 2006, 106.

[Ta1] Taylor M E. Psedo-differential Operators. Princeton University Press, 1981.

[To] Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. Academic Press, 1986.

[Tr1] Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North-Holland Publishing Company, 1978.

[Tr2] Triebel H. Theory of Function Spaces. Springer-Verlag, 1983.

[UY] Ukhovskii M R and Yudovich V I. Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space. Prikl. Mat. Meh., 1968, 32: 59–69.

[V] Verchota G C. Layer potentials and boundary value problems for Laplace's equation in Lipschitz domain. J. of Funct. Analysis, 1984, 59: 572–611.

[Vi] Vishik M. Hydrodynamics in Besov spaces. Arch. Rational Mech. Anal., 1998, 145: 197–214.

[We1] Weissler F B. Local existence and nonexistence for semilinear parabolice quations in L^p. Indiana Math. J., 1980, 29: 79–102.

[We2] Weissler F B. The Navier–Stokes initial value problem in L^p. Arch. Rat. Mech., Anal., 1981, 74: 219–230.

[We3] Weissler F B. Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equations. Isreal J. Math., 1981, 38: 29–40.

[Wu1] Wu J. Global solutions of the 2D dissipative quasi-geostrophic equation in Besov spaces. SIAM J. Math. Anal., 2004, 36: 1014–1030.

[Wu2] Wu J. The two-dimensional quasi-geostrophic equation with critical or supercritical dissipation. Nonlinearity, 2005, 18: 139–154.

[Wu3] Wu J. Lower bounds for an integral involving fractional Laplacians and the generalized Navier-Stokes equations in Besov spaces. Commum. Math. Phys., 2006, 263: 803–831.

[Wu4] Wu J. Regularity criteria for the generalized MHD equations. Comm. in PDE, 2008, 33: 285–306.

[Xin] Xin Z. Blow up of smooth solutions to the compressible Navier-Stokes equation with compact density. Comm. Pure Appl. Math., 1998, 51: 229–240.

[Yo] Yosida K. Functional analysis. Springer-Verlag, 1980.

名词索引

X

Z

其他

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1　数理逻辑基础(上册)　1981.1　胡世华　陆钟万　著
2　紧黎曼曲面引论　1981.3　伍鸿熙　吕以辇　陈志华　著
3　组合论(上册)　1981.10　柯　召　魏万迪　著
4　数理统计引论　1981.11　陈希孺　著
5　多元统计分析引论　1982.6　张尧庭　方开泰　著
6　概率论基础　1982.8　严士健、王隽骧　刘秀芳　著
7　数理逻辑基础(下册)　1982. 8　胡世华　陆钟万　著
8　有限群构造(上册)　1982.11　张远达　著
9　有限群构造(下册)　1982.12　张远达　著
10　环与代数　1983.3　刘绍学　著
11　测度论基础　1983.9　朱成熹　著
12　分析概率论　1984.4　胡迪鹤　著
13　巴拿赫空间引论　1984.8　定光桂　著
14　微分方程定性理论　1985.5　张芷芬　丁同仁　黄文灶　董镇喜　著
15　傅里叶积分算子理论及其应用　1985.9　仇庆久等　编
16　辛几何引论　1986.3　J.柯歇尔　邹异明　著
17　概率论基础和随机过程　1986.6　王寿仁　著
18　算子代数　1986.6　李炳仁　著
19　线性偏微分算子引论(上册)　1986.8　齐民友　著
20　实用微分几何引论　1986.11　苏步青等　著
21　微分动力系统原理　1987.2　张筑生　著
22　线性代数群表示导论(上册)　1987.2　曹锡华等　著
23　模型论基础　1987.8　王世强　著
24　递归论　1987.11　莫绍揆　著
25　有限群导引(上册)　1987.12　徐明曜　著
26　组合论(下册)　1987.12　柯　召　魏万迪　著
27　拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用　1988.1　李　忠　著
28　代数体函数与常微分方程　1988.2　何育赞　著
29　同调代数　1988.2　周伯壎　著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青 段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜 陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉 冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇 张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李 冲 杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先 霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德　郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林　杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军　张　祥　董梅芳　编著
71　随机分析学基础(第二版)　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚　马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎　陆传荣　张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯　顾凡及　蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒　李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川　崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙　李登峰　谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷　吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群　尹景学　王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格(第二版)　2003.10　万哲先　霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版)　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩　周义仓　王稳地　靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正　刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林　闫宝强　刘衍胜　著
97　代数学中的 Frobenius 结构　2005.7　汪明义　著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
134　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华、吐尔德别克、陈泽乾　著
135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
136　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
137　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.6　苏维宜　著
138　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
139　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
140　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
141　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著
142　Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用　2012.3　苗长兴　吴家宏　章志飞　著

